第20讲　解的延展与解的整体唯一性

December 9, 2014

解的延展

- **饱和解的概念：**

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1}$$

设$x = \varphi(t)$是方程组(1)在区间I上的解，如果存在这样的解$x = \varphi_1(t)$，它的定义区间为I_1，且

(i) $I_1 \supset I$, $I_1 \neq I$.

(ii) 当$t \in I$时，$\varphi_1(t) = \varphi(t)$.

则说$x = \varphi(t)$ 可以延展，称$x = \varphi_1(t)$为$\varphi(t)$的一个延展解。

如果不存在具有上述性质的解，则称$x = \varphi(t)$为(1)的饱和解。

（不能再延展的解）

解的延展

- 设$f(t,x)$在开区域G上连续，则饱和解的存在区间一定是开区间。
- **引理1**　假设

(i) $x=\varphi(t)$是**(1)**于区间$a\le t\le b$上的解。

(ii) $x=\psi(t)$是**(1)**于区间$b\le t\le c$上的解。

(iii) $\varphi(b)=\psi(b)$**.**

则　$x(t)=\begin{cases}\varphi(t), & a\le t\le b\\ \psi(t), & b\le t\le c\end{cases}$ 是**(1)**于区间$a\le t\le c$上的解。

原因：$x'(b+)=f(b,\varphi(b))=f(b,\psi(b))=x'(b-)$，

即$x'(b)=f(b,x(b))$，于是$x(t)$在$t=b$处满足方程。

解的延展

- 设$f(t,x)$于区域G上连续，利用**Peano**定理及引理**1**可将非饱和解左右延展成饱和解。
  （直观图形上）
- 定理（定理**5.4**）　设$f(t,x)$于区域G上连续，则**(1)**的任何非饱和解都可延展成**(1)**的饱和解。
  在唯一性的假设下证明上述结论。
- 定理**1**　设$f(t,x)$于区域G上连续，如果对任一$(t_0,x_0)\in G$，方程组**(1)**满足初值条件$x(t_0)=x_0$的解在含t_0的某个区间上是唯一的，则**(1)**的任何非饱和解都可延展成**(1)**的饱和解。

证明思路：

(i) 设$x=\varphi_0(t)$是**(1)**的任一非饱和解，定义区间为$[a_0,b_0]$，a_0,b_0都是有限数。

(ii) 设$x=\varphi_0(t)$有一个右延展解，定义区间为$[a_0,\beta]$。记这样的β构成的集合为S。S非空，记$b=\sup S$。

(iii) 存在数列$\{b_k\}$, $b_k\in S$, $b_1<b_2<\cdots<b_k<\cdots$，使得$\lim\limits_{k\to\infty} b_k=b$。

(iv) 对每一个b_k，都有$x=\varphi_0(t)$的一个右延展解$x=\varphi_k(t)$，定义在区间$[a_0,b_k]$上，唯一性可推知

$$\varphi_k(t)\equiv\varphi_{k-1}(t),\quad t\in[b_0,b_{k-1}],\quad k=1,2,\cdots,$$

解的延展

(v) 由$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots$连接起一个解

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t \in [a_0, b_0] \\ \varphi_k(t), & t \in [b_{k-1}, b_k], \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

是定义在$[a_0, b)$上的右饱和解。

假如它不是右饱和解，则它一定有一个右延展解$x = \psi(t)$，其至少在$[a_0, b]$上有定义，且$(b, \psi(b)) \in G$，于是$x = \psi(t)$又有右延展解，自然也是$x = \varphi_0(t)$的右延展解，与b的定义矛盾。

解的延展

- 饱和解是否达到了G的边界，如何来刻画解延展与G的边界靠近？
- **定理2**　设$f(t,x)$于区域G内连续，D是(t,x)空间中一有界域，且$\overline{D}\subset G$。则方程组经过D中任一点的解曲线，经向左右延展，都可达到D的边界。（画图）
  （每次延展存在区间都增加一个小区间，有限次必可越过D的边界）
  （G：有界或无界。）
- 延展：上下左右，例：$f(t,x)$在整个平面连续，是否可延展到$(-\infty,+\infty)$？

解的延展

- 饱和解靠近G的边界，可用解曲线上的点与边界的距离$\rho(t)$来刻画。

  ($\rho(t)$**:** 积分曲线上的点$(t,\varphi(t))$)与边界上所有点距离的下确界）
- **定理3**　设G是(t,x)空间一有界域，$f(t,x)$于区域G内连续。对于**(1)**的任一饱和解$x=\varphi(t)$，若其存在区间为$a<t<b$，则

$$\lim_{t\to b_-}\rho(t)=0,\quad \lim_{t\to a_+}\rho(t)=0.$$

解的延展

证明思路：

(i) 只证 $\lim\limits_{t\to b_-}\rho(t)=0$。
反证，假如结论不成立，则存在递增的趋于b的序列$\{t_k\}$和正数$\rho_0>0$，使得

$$\rho(t_k)\geq\rho_0,\quad k=1,2,\cdots.$$

(ii) b是有限数，且$\varphi(t_k)$有界，存在收敛的子序列，不妨还记为$\varphi(t_k)$，令

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(t_k)=x_1.$$

由（i）知，$(b,x_1)\in G$。

解的延展

(iii) 下面证明

$$\lim_{t \to b_-} \varphi(t) = x_1. \qquad (2)$$

若上述成立，则$(b, \varphi(b)) = (b, x_1) \in G$，解$x = \varphi(t)$ 仍可以向右延展，与饱和解矛盾。

(a) 取$\delta > 0$适当小，使得

$$R: \quad |t - b| \le \delta, \quad |x - x_1| \le \delta$$

含于G内。

解的延展

(b) 只需证明：当$t \to b$时，$(t, \varphi(t)) \in R$. 即证明存在k_0，

当$k \geq k_0$时，有

$$|\varphi(t) - x_1| < \delta, \quad t_k \leq t < b. \tag{3}$$

若上式成立，则

$$|\varphi(t) - \varphi(t_k)| \leq \int_{t_k}^{t} |f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \leq M(t - t_k), \quad t_k \leq t < b,$$

其中$M = \max\limits_{(t,x) \in R} |f(t, x)|$，令$k \to \infty$，则**(2)**成立。

(c) 下面证明**(3)**成立（反证）。

显然存在k_0，使得

$$b - t_k < \frac{\delta}{2(M+1)}, \quad |\varphi(t_k) - x_1| < \frac{\delta}{2}, \quad k \geq k_0. \tag{4}$$

解的延展

- 假设(3)不成立，，则在$[t_k, b)$上有t值使$|\varphi(t) - x_1| \geq \delta$。令$\xi$表示这种$t$值的下确界，则

$$|\varphi(t) - x_1| < \delta, \quad t_k \leq t < \xi, \tag{5}$$

$$|\varphi(\xi) - x_1| = \delta. \tag{6}$$

由(4)及(6)，对$k \geq k_0$，有

$$|\varphi(\xi) - \varphi(t_k)| \geq |\varphi(\xi) - x_1| - |x_1 - \varphi(t_k)| > \frac{\delta}{2}. \tag{7}$$

由(4)及(5)，有

$$|\varphi(\xi) - \varphi(t_k)| \leq \int_{t_k}^{\xi} |f(t, \varphi(\tau))| d\tau \leq M(\xi - t_k) < \frac{\delta}{2}.$$

与(7)矛盾。定理证毕。

解的整体唯一性

- 条形区域：$G: \quad T_0 < t < T_1, \quad |x| < +\infty$.
- **定理5** 若$f(t,x)$在域G上连续，且

$$|f(t,x)| \le N|x| + B,$$

则方程组的任何饱和解$x = \varphi(t)$都在(T_0, T_1)上存在，其中N, B是常数。

- 证明：设$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))^T$的存在区间为$(a,b)$.

若$b < T_1$，则$\varphi(t)$在$[t_0, b)$上有界，其中，$t_0 \in (a,b)$，从而与$\varphi(t)$是饱和解矛盾。

下面证明$\varphi(t)$在$[t_0, b)$上有界（反证）：

解的整体唯一性

(1) 假设$x=\varphi(t)$在$[t_0,b)$上无界，令

$$r(t)=(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^2(t))^{\frac{1}{2}}.$$

则对任意$K>r(t_0)+1$，都有$t_k, t_k\in(t_0,b)$，使得$r(t_k)\geq K$.

(2) 由$r(t)$的连续性，存在$\tau_k,\tau_k\in(t_0,t_k)$，使得$r(\tau_k)=r(t_0)+1$，

且$r(t)\geq r(t_0)+1>0, t\in[\tau_k,t_k]$.

(3)

$$\frac{dr}{dt}=r^{-1}(t)\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)\varphi_i'(t)\leq\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i'(t)|=||\varphi'(t)||$$

$$\leq||f(t,\varphi(t))||\leq N||\varphi(t)||+B\leq N\sqrt{n}r(t)+B$$

解的整体唯一性

从τ_k到t_k积分，则

$$ln(N\sqrt{n}r(t_k)+B)-ln(N\sqrt{n}r(\tau_k)+B)\le N\sqrt{n}(t_k-\tau_k)\le N\sqrt{n}(b-t_0)$$

由于$r(t_k)\ge K$，而K可任意大，上式左端可任意大，右端有限，矛盾。

解的整体唯一性

定理6　若

(i) $f(t,x)$在域G上连续。

(ii) $|f(t,x)| \leq Q(|x|), \quad (t,x) \in G$，其中$Q(s)$在$s \geq 0$上连续，且当$s > 0$时，$Q(s) > 0$。

(iii) $\int_{s_0}^{+\infty} \frac{1}{Q(s)} ds = +\infty, s_0 > 0$.

则方程组的任何饱和解$x = \varphi(t)$都在(T_0, T_1)上存在。

作业

P 123: 1 (1), 1(4); 4; 5; 6.

P 125: 1.