第24讲　Lyapunov稳定性理论

December 31, 2014

三. Lyapunov第二方法

- **Lyapunov第一方法：微分方程的级数解**
- **Lyapunov第二方法（直接方法）：用Lyapunov函数判定稳定性。**
- **例4　考虑方程组**

$$x' = \sigma x - y^2, \quad y' = \sigma y + xy$$

零解的稳定性, 其中$\sigma = 0, -1, 1$**.**

分析: $V(x,y) = x^2 + y^2$, $\dfrac{dV}{dt} = 2\sigma V$

$$x^2(t) + y^2(t) = ce^{2\sigma t}$$

$$x^2(t,t_0,x_0) + y^2(t,t_0,y_0) = (x_0^2 + y_0^2)e^{2\sigma(t-t_0)}, \quad t \geq t_0$$

$\sigma = -1$**时全局渐进稳定;** $\sigma = 0$**时零解稳定;** $\sigma = 1$**时零解不稳定.**

三. Lyapunov第二方法

(I) **自治系统的Lyapunov函数**

- $$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

  其中x和$f(x)$都是n维向量. 假设$f(0) = 0$, $f(x)$于区域$G: \quad |x| < H$上连续,且满足**Lipschitz**条件.

- 设$V(x)$为定义在

  $$|x| \le h < H \tag{2}$$

  上连续可微纯量函数.

三. Lyapunov第二方法

- **正定（负定）函数：**

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0 \quad (V(x) < 0), x \neq 0.$$

- **常正（半正定）（常负,半负定）函数：**

$$V(0) = 0, V(x) \geq 0 \quad (V(x) \leq 0).$$

- **方向导数（函数$V(x)$沿着方程(1)的方向导数）：**

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x)$$

其中$f_i(x)$是$f(x)$的第i个分量.

三. Lyapunov第二方法

例: $V(x) = V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

例: $V(x) = V(x_1, x_2) = x_1^2$

定理1.4

(1) 如果存在正定函数$V(x)$使得$\frac{dV}{dt}\Big|_{(1)}$半负定，则零解稳定;

(2) 如果存在正定函数$V(x)$使得$\frac{dV}{dt}\Big|_{(1)}$负定，则零解渐进稳定;

(3) 如果存在正定函数$V(x)$使得$\frac{dV}{dt}\Big|_{(1)}$正定，则零解不稳定。

证明(i)：

- $\forall \varepsilon > 0$，记$r_\varepsilon = \min_{\varepsilon \leq |x| \leq h} V(x)$. 由$V(x)$在$x = 0$点连续可知，存在$\delta > 0$，当$|x| < \delta$时，$V(x) < r_\varepsilon$.
- 设$|\xi| < \delta$，则

$$V(\varphi(t, \tau, \xi)) \leq V(\xi) < r_\varepsilon, \tau \leq t < t_1.$$

由r_ε的定义可知$|\varphi(t, \tau, \xi)| < \varepsilon, \tau \leq t < t_1$. 由延展性定理解可延展到$+\infty$.

例5 讨论方程组

$$x' = y, \quad y' = -f(x,y)y - g(x) \tag{3}$$

零解的稳定性，其中$f(x,y)$和$g(x)$连续，且在原点$(0,0)$ 附近$f(x,y) \geq 0, xg(x) > 0, x \neq 0$.

令

$$V(x,y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x g(s)ds,$$

则V正定，且

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(3)} = -f(x,y)y^2$$

半负定，因此系统的零解是稳定的。

例6　讨论方程组

$$x' = y^3, \quad y' = -x^3 \tag{4}$$

零解的稳定性.

令　$V(x,y) = x^4 + y^4$，则V正定，且

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(4)} = 0$$

半负定，因此系统的零解是稳定的，但不是渐进稳定的.

（$x^4(t) + y^4(t) = c$）

例7　讨论方程组

$$x' = 2y + yz - x^3, \quad y' = -x - xz - y^3, \quad z' = xy - z^3 \tag{5}$$

零解的稳定性.

令

$$V(x,y) = ax^2 + by^2 + cz^2,$$

其中$a > 0, b > 0, c > 0$待定，则

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(5)} = 2(2a-b)xy + 2(a-b+c)xyz - 2(ax^4 + by^4 + cz^4)$$

选取$2a - b = 0, a - b + c = 0$，则$V$正定，$\dfrac{dV}{dt}$负定，因此系统的零解是渐进稳定的。

三. Lyapunov第二方法

- **定理** 如果存在函数$V(x)$满足

  (i) $V(x)$正定。

  (ii) $\dfrac{dV}{dt}\Big|_{(1)}$半负定。

  (iii) 使得$\dfrac{dV}{dt}=0$的x的集合中除零解外不包含方程组的整条正半轨线。

  则零解渐进稳定。

- **例：** $\dfrac{dx}{dt}=y, \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{g}{\ell}\sin x-\dfrac{\mu}{m}y.$

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{g}{\ell}(1-\cos x)$$

(II) **平面二阶自治系统零解的稳定性结果**

考虑系统:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

其中$x \in R^2$. **假设**$f(x)$**在**R^2**上连续可微,** $f(0) = 0$. **如果有**

$$det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) > 0, \quad trace\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) < 0,$$

则系统的零解是全局渐进稳定的。 $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right)$

正定Lyapunov函数

- **定义2.1** $W(x) : \mathbf{S} \to \mathbf{R}$**是正定的，系指**

$$(\forall x \neq 0) : W(x) > 0, \quad W(0) = 0 \tag{6}$$

- $V(t,x) : \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S} \to \mathbf{R}$**是正定的，系指**

$$(\exists W(x)\text{正定})(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}) : V(t,x) \geq W(x)\text{且}V(t,0) = 0 \tag{7}$$

- $V(t,x) : \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S} \to \mathbf{R}$**是半正定的(或非负定的)，系指**

$$(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}) : V(t,x) \geq 0\text{且}V(t,0) = 0 \tag{8}$$

- **类似可以有负定、半负定(非正定)的概念.**

例子

- **例2.1** 若$P = P^T \in \mathbf{R}^{n\times n}, V(x) = x^T P x$,则$V(x)$正定当且仅当$P$是正定对称矩阵.
- **例2.2** $V(t,x) = \dfrac{x^T x}{1+t^2}$是半正定的但不是正定的.
- **例2.3** $V(x) = 1 + x^T x$不是正定函数，虽然它具有

$$(\forall x \neq 0) : V(x) > 0$$

但$V(0) = 1 \neq 0$.

作业

$$\dot{x} = f(t, x), f(t, 0) = 0 \tag{9}$$

有相应的稳定性定理和渐近稳定性定理：

定理　如果存在Lyapunov函数V，使得

(i) $V(t, x) \in \mathbf{C^1}(\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S})$.

(ii) $\exists \rho > 0, \mathbf{B}_\rho \subset \mathbf{S}$，$V(t, x)$在$\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{B}_\rho$上正定且$\dot{V}(t, x)|_{(3.1)} \leq 0$.

则(9)的零解稳定。

渐近稳定

- 定理　若对系统

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) = 0 \tag{10}$$

存在一阶可微函数$V(t,x) : \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S} \to \mathbf{R}$与三个$\mathcal{K}$类函数$\alpha(\cdot), \beta(\cdot)$与$\gamma(\cdot)$，使有

$1^\circ.(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}) : \alpha(\|x\|) \le V(t,x) \le \beta(\|x\|);$

$2^\circ.(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}) : \dot{V}(t,x)|_{(5.1)} \le -\gamma(\|x\|).$

则零解渐近稳定。

- 作业：

P150: 1(1,3); 2; 3.