

第26讲 平面动力系统

December 31, 2014

一. 平面动力系统

- 平面动力系统:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \quad (1)$$

其中 $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 在平面 R^2 上连续。

- 考虑奇点是坐标原点的情形。假设(1)在点 $(0, 0)$ 附近可有:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + R(x, y) \quad (2)$$

其中 A 是二阶实矩阵, $R(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 附近连续可微,

$R(0, 0) = 0$, 且 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R(x, y)}{r} = 0$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

一. 平面动力系统

- 奇点: $(0, 0)$

初等奇点: $\det A \neq 0$

高阶奇点: $\det A = 0$

- 在奇点附近, (2)的轨线分布与它的一次近似方程组:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3)$$

相似.

二. 在 $\det A \neq 0$ 下 $x' = Ax$ 奇点附近的轨线分布

- 系统:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det A \neq 0 \quad (4)$$

唯一的奇点(平衡点): $(0, 0)$.

- 存在可逆阵 T 使得 $T^{-1}AT = J$, 其中 J 为约当标准型, J 有下列三种形式:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (5)$$

二. 在 $\det A \neq 0$ 下 $x' = Ax$ 奇点附近的轨线分布

- 令 $x = Ty$, 则方程(4)化为

$$\frac{dy}{dt} = Jy \quad (6)$$

方程(4)和方程(6)奇点相同, 原点附近轨线形状相同, 只是坐标系进行了平移和旋转。

- 不失一般性, 只需考虑系统(4), 其中矩阵 A 为(5)中的三种情形。

二. 在 $\det A \neq 0$ 下 $x' = Ax$ 奇点附近的轨线分布

(I) $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, A 有两个实根。

• 此时方程化为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ \frac{dy}{dt} = \mu y \end{cases}$$

$$x = c_1 e^{\lambda t}, \quad y = c_2 e^{\mu t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu y}{\lambda x} \Rightarrow y = cx^{\frac{\mu}{\lambda}}, \quad x = 0$$

星形结点

(a) $\lambda = \mu$, 即 A 有两个相同的实特征根, 约当块是一阶的。

轨线: $y = cx$, 轨线为过原点的直线束。

- $\lambda < 0$: $t \rightarrow +\infty, (x(t), y(t)) = (c_1 e^{\lambda t}, c_2 e^{\mu t}) \rightarrow (0, 0)$, 奇点稳定, 称为稳定的星形结点 (见图1);
- $\lambda > 0$: 奇点不稳定, 称为不稳定的星形结点 (见图2)。

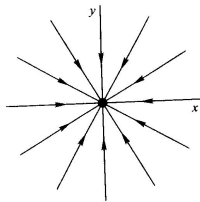


图1 稳定的星形结点

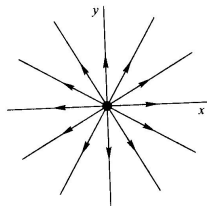


图2 不稳定的星行结点

结点

(b) $\lambda \neq \mu$, $\lambda\mu > 0$, 即 A 有两个同号且不相等的实根。

轨线: $y = cx^{\frac{\mu}{\lambda}}$, 轨线为抛物线。 $\frac{dy}{dx} = c\frac{\mu}{\lambda}x^{\frac{\mu}{\lambda}-1}$.

- 当 $\frac{\mu}{\lambda} > 1$ 时, 轨线与 x 轴相切;
- 当 $\frac{\mu}{\lambda} < 1$ 时, 轨线与 y 轴相切。
- $\lambda < 0, \mu < 0$: 奇点稳定, 称为稳定的双向结点 (见图3);
- $\lambda > 0, \mu > 0$: 奇点不稳定, 称为不稳定的双向结点 (见图4)。

结点

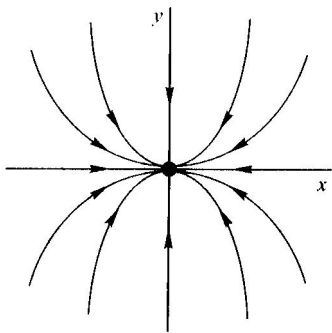


图3 稳定的正常结点

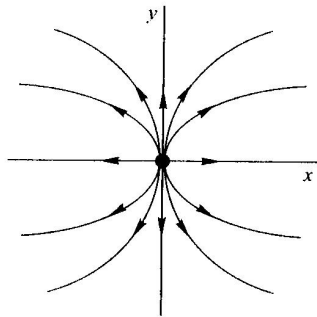


图4 不稳定的正常结点

鞍点

(c) $\lambda\mu < 0$, 即 A 有两个异号且不相等的实根

轨线: $y = cx^{\frac{\mu}{\lambda}}$, 轨线为双曲线, 奇点称为鞍点。

- $\lambda < 0, \mu > 0$: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x = c_1 e^{\lambda t} \rightarrow 0$, 见图5。
- $\lambda > 0, \mu < 0$: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $y = c_2 e^{\mu t} \rightarrow 0$, 见图6。

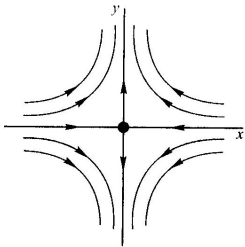


图5 鞍点

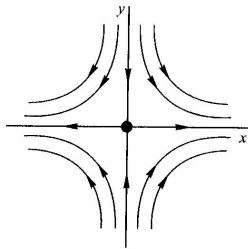


图6 鞍点

单向结点

$$(II) \quad A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

• 方程化为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ \frac{dy}{dt} = x + \lambda y \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lambda} + \frac{y}{x} \Rightarrow y = cx + \frac{x}{\lambda} \ln|x|, \quad x \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = c + \frac{1}{\lambda} \ln|x| + \frac{1}{\lambda}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = \begin{cases} +\infty, & \lambda < 0 \\ -\infty, & \lambda > 0 \end{cases}$$

单向结点

- $\lambda < 0$: 稳定的单向结点, 见图7。
- $\lambda > 0$: 不稳定的单向结点, 见图8。

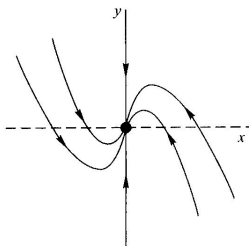


图7 稳定的单向结点($\lambda < 0$)

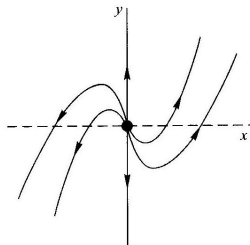


图8 不稳定的单向结点($\lambda > 0$)

单向结点

$$(III) : A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \beta \neq 0.$$

令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 方程化为:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \alpha r \\ \frac{d\theta}{dt} = \beta \end{cases}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\alpha}{\beta} r \Rightarrow r = ce^{\frac{\alpha}{\beta}\theta}, c \geq 0$$

$\beta > 0 : \frac{d\theta}{dt} > 0$, 逆时针方向。

$\beta < 0 : \frac{d\theta}{dt} < 0$, 顺时针方向。

焦点、中心

- $\alpha < 0$: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $r \rightarrow 0$, 稳定的焦点, 见

图9 ($\alpha < 0, \beta > 0$) 。

- $\alpha = 0, \frac{dr}{dt} = 0 \rightarrow r = c$, 同心圆, 称为中心, 见

图10 ($\alpha = 0, \beta > 0$) 。

- $\alpha > 0$: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $r \rightarrow +\infty$, 不稳定的焦点, 见

图11 ($\alpha > 0, \beta > 0$) 。

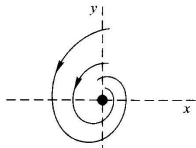


图9 稳定焦点

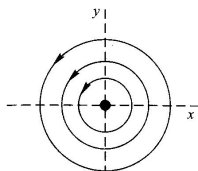


图10 中心

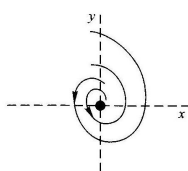


图11 不稳定焦点

根据特征根判定奇点类型

- (1) 同号实根：双向结点
- (2) 异号实根：鞍点
- (3) 相同实根：单向结点或星形结点
- (4) 一对共轭复根：焦点
- (5) 一对纯虚根：中心

三. 用矩阵 A 的迹和行列式判定奇点的类型和稳定性

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- A 的特征方程:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 + p\lambda + q,$$

其中 $p = -(a + d) = -\text{tr}(A)$, $q = ad - bc = \det(A)$.

- 两个根 λ_1, λ_2 满足

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -p, \lambda_1\lambda_2 = q.$$

三. 用矩阵 A 的迹和行列式判定奇点的类型

定理1 (奇点类型判定) 设

$$p = -\text{tr}(A) = -(a + d), \quad q = \det(A) = ad - bc.$$

则

- (1) 当 $q < 0$ 时, 相异实根, 异号, 奇点 $(0,0)$ 为鞍点。
- (1) 当 $q > 0$ 且 $p^2 - 4q > 0$ 时, 同号实根, 奇点 $(0,0)$ 为双向结点。
- (3) 当 $q > 0$ 且 $p^2 - 4q = 0$ 时, 相同实根, 奇点 $(0,0)$ 为单向结点或星形结点。 $\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \right)$ 。
- (4) 当 $q > 0$ 且 $p^2 - 4q < 0, p \neq 0$ 时, 共轭复根, 奇点 $(0,0)$ 为焦点。
- (5) 当 $q > 0$ 且 $p = 0$ 时, $(0,0)$ 为中心。

三. 用矩阵 A 的迹和行列式判定奇点的稳定性

奇点（结点，焦点）的稳定性：

$p > 0$ ，奇点 $(0,0)$ 稳定；

$p < 0$ ，奇点 $(0,0)$ 不稳定。

四. 非线性系统

非线性系统:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + R(x, y) \quad (7)$$

对应的线性系统:

$$x' = Ax \quad (8)$$

定理2

- (1) 如果 $(0, 0)$ 是(8)的焦点, 则它也是(7)的焦点, 并且他们的稳定性相同。
- (2) 如果 $(0, 0)$ 是(8)的鞍点或双向结点, 则它也是(7)的鞍点或双向结点, 并且有相同的稳定性。

四. 非线性系统

(3) 如果 $(0,0)$ 是(8)的单向结点, 又对任给 $\varepsilon > 0$, 都有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R(x, y)}{r^{1+\varepsilon}} = 0 \quad (9)$$

则它也是(7)的单向结点, 并且有相同的稳定性。

(4) 如果 $(0,0)$ 是(8)的星形结点, 并且满足(9), 则它也是(7)的星形结点, 并且有相同的稳定性。

四. 非线性系统

- 注1 如果 $(0,0)$ 是(8)的双曲奇点, 即矩阵 A 的特征值的实部都不等于零, 则只要 $R(x,y)$ 及其导数足够小, (7)就局部拓扑等价于(8), 即在 $(0,0)$ 的一个小邻域内, 存在一个同胚变换(即本身及其逆都连续)将(7)的轨线变到(8)的轨线, 并且还保持轨线的方向。这时称(8)在 $(0,0)$ 附近是局部结构稳定的。

五. 极限环

- 极限环：孤立的闭轨。
- 稳定（不稳定）的极限环：设 Γ 是一个极限环，如果存在 Γ 的一个邻域，使得从这个邻域出发的轨线当 $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) 时都盘旋趋于 Γ 。
- 半稳定（不稳定）的极限环（单侧）：如果存在 Γ 的一侧（内侧或外侧）邻域，使得从这个邻域出发的轨线当 $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) 时都盘旋趋于 Γ 。

五. 极限环

例 考虑方程组:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 方程化为:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= r(1 - r^2) \\ \frac{d\theta}{dt} &= -1\end{aligned}$$

可推得 $r = 1$ 即 $x^2 + y^2 = 1$ 是稳定的极限环。(根据 $\frac{dr}{dt}$ 和 $\frac{d\theta}{dt}$ 的符号判断轨线的走向, 画图)

五. 极限环

- 考虑平面系统:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \quad (10)$$

- 定理3** 设 $x = \varphi(t)$ 是(10)的一条轨线, 它的 ω 极限集 Ω^+ 非空, 有界且不含奇点, 则 Ω^+ 是一条闭轨。
- 定理4** (庞加莱-本迪克松环域定理) 设 D 是由两条简单闭曲线 Γ_1 和 Γ_2 所围成的环域, 并且在 $\bar{D} = \Gamma_1 \cup D \cup \Gamma_2$ 上, 系统(10)无奇点。如果从 Γ_1 和 Γ_2 出发的轨线都不离开 (或都不进入) $\bar{D}$, 而 Γ_1 和 Γ_2 均不是(10)的闭轨, 则 D 内至少存在一条闭轨 (见图)。

五. 极限环

- 构造内境界线 Γ_1 和 Γ_2 ，比较复杂。
- 物理意义：设系统(10)描述了平面流体运动，如果流体是从边界流入 D ， D 中又没有源或汇，则在 D 内就有环流存在。
源：不稳定的结点或焦点；汇：稳定的结点或焦点。
- 如果 $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 在 $\bar{D}$ 上解析，即为解析向量场，则 D 内的闭轨是极限环。

五. 极限环

- **定理5** （本迪克松准则） 设 $X(x, y), Y(x, y)$ 在单连通区域 D 上连续可微，若于 D 的任何子区域中散度

$$\operatorname{div}(X, Y) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$$

不恒为零，并且不变号，则(10)在 D 中无闭轨。

定理6 （有限性定理） 任何多项式系统(10)的极限环的个数在 R^2 中都是有限的。

作业

作业：

P 162: 1(1); 1(2); 1(3)