

第27讲 非线性系统

December 28, 2010

非线性系统的特性

- 有限的逃逸时间;
- 多个孤立的平衡点;
- 极限环;
- 分叉现象;
- 混沌现象。

非线性系统的特点

(I) 有限的逃逸时间(Finite escape time)。

- 线性时不变系统: $\dot{x} = Ax$ 。不稳定的线性系统当时间 t 趋于无穷时某些解趋于无穷。
- 非线性系统的解可在有限时间内趋于无穷, 如 $\dot{x} = x^2$ 。

(II) 多个孤立的平衡点。

例: 单摆系统 $ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - kl\dot{\theta}$ 。

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2$$

平衡点, 平衡点的稳定性。

非线性系统的特点

(III) 极限环

- 线性时不变系统，振动：纯虚根，在扰动下不可能保持，振幅依赖于初始值。如： $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ 。（中心）
- 稳定的振动必须由非线性系统产生。

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ，方程化为： $\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \frac{d\theta}{dt} = -1$ 。可推得 $r = 1$ 即 $x^2 + y^2 = 1$ 是稳定的极限环。

分叉

- 考虑系统:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu)$$

其中 x 为状态变量向量, μ 为控制参数。

- 分叉问题: 随着控制参数 μ 的改变, f 的雅可比矩阵的全体特征值 $\lambda_i(\mu)$ 将在复平面($Re\lambda, Im\lambda$)上运动, 当控制参数达到某值 μ_0 时, 系统的稳定性将发生变化, 这就是分叉问题。

叉型分叉

当参数 μ 变化时，通过 $Re\lambda = 0$ 的情况可分为三种类型：

(I) 叉型分叉：

特征值沿实轴穿过虚轴。其中 λ 为实数，且由负变正。

例1 $\dot{x} = \mu x - x^3$ ，雅可比矩阵： $\mu - 3x^2$ 。

- 当 $\mu < 0$ 时，唯一的平衡点 $x = 0$ 稳定；
- 当 $\mu > 0$ 时，三个平衡点 $x = 0$ （不稳定）， $x = \sqrt{\mu}$ （稳定）， $x = -\sqrt{\mu}$ （稳定）。
- 分叉点： $\mu = 0$ 。当 μ 由负变正时，特征值 λ 沿实轴穿过虚轴，原平衡点 $x = 0$ 由稳定变为不稳定，从而分叉出新的稳定的平衡点 $x = \pm\sqrt{\mu}$ 。这就是叉型分叉。

霍夫分叉

(II) 霍夫(Hopf)分叉：特征值沿复平面($Re\lambda, Im\lambda$)的上方或下方穿过虚轴。其中 λ 为复数，且其实部由负变正。

- 分叉点： $\mu = \mu_0$ 满足：当 $\mu = \mu_0$ 时，雅可比矩阵在平衡点具有存纯虚根。

例2

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2) \end{cases}$$

霍夫分叉

- $(0,0)$ 为一平衡点，其雅可比矩阵为：

$$J = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

其特征根为 $\lambda = \mu \pm i$ 。当参数 μ 由负变正时， λ 分别沿实轴的上方和下方穿过虚轴，点 $(0,0)$ 由稳定的焦点变成不稳定的焦点。

霍夫分叉

- 极坐标方程为：

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

极坐标系中当 $\mu > 0$ 时还有另一平衡点 $r = \sqrt{\mu}$ ，对应原坐标系中的极限环 $x^2 + y^2 = \mu$ 。

- 总结：当 $\mu < 0$ 时，唯一的平衡点为稳定的焦点，当 $\mu > 0$ 时，点 $(0, 0)$ 变成不稳定的焦点，从而分叉出极限环 $x^2 + y^2 = \mu$ ，这种由失稳后而出现的极限环的分叉，就是霍夫分叉。

鞍结点分叉

- (III) 鞍结点分叉：特征值沿实轴两边趋于虚轴。其中 λ 为实数，且 λ 由正负两边趋于零。

例3

$$\dot{x} = \mu + x^2$$

$$\dot{y} = y$$

- 平衡点 $P(\sqrt{-\mu}, 0)$ 和 $Q(-\sqrt{-\mu}, 0)$ ，**P**点对应的雅可比矩阵的特征值为 $\lambda_1 = 2\sqrt{-\mu}$, $\lambda_2 = 1$ ；**Q**点对应的雅可比矩阵的特征值为 $\lambda_1 = -2\sqrt{-\mu}$, $\lambda_2 = 1$ ；
- 当 $\mu < 0$ 时，**P**点为结点；**Q**点为鞍点；当 $\mu = 0$ 时，**P**点和**Q**点合二为一，即结点和鞍点合为一点 $(0, 0)$ ；当 $\mu > 0$ 时，无平衡点。

吸引子

- 考虑系统:

$$\frac{dx}{dt} = F(x), x \in R^N.$$

- 守恒系统的相空间体积在运动过程中是不变的, 耗散系统其相空间体积在运动过程中是不断收缩的, 相空间的体积

元 $dV = dx_1 dx_2 \cdots, dx_N$ 的变化率应满足

$$\frac{1}{dV} \frac{d}{dt}(dV) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i} < 0$$

上式可作为耗散系统的定义。

- 由于耗散系统其相空间体积在运动过程中是不断收缩的, 运动轨线最后被吸引到一个有限的相空间中去, 这就是吸引子。

吸引子

相空间中的一个子集 A 称为吸引子（如稳定的平衡点，稳定的极限环），如果它具有如下性质：

- (i) A 对于方程的流是不变的；
- (ii) 存在一个 A 的邻域，它在方程所确定的流动下收缩至 A ；
- (iii) 在 A 上的流是循环的，即对 x ($x \in A$) 点的任何邻域，在足够长的时间内，通过 A 中 x 点的轨道总会再次经过这一邻域；
- (iv) A 不能分解成两个不重叠的部分。

吸引子

- 由于耗散系统相空间体积最终要收缩到零，所以吸引子的 N 维体积为零，即吸引子的维数要低于相空间的维数。
- 稳定的平衡点是最简单的吸引子，其维数为零；当稳定的平衡点通过Hopf分叉成为极限环时，它便是一维吸引子；
- 具有非整数维数的吸引子成为奇怪吸引子（混沌吸引子）。
- 在耗散系统系统中常有四种吸引子：定常吸引子，周期吸引子，拟周期吸引子和混沌吸引子。

混沌系统

(IV) 混沌系统

- 混沌现象是不附加任何随机因素的确定性非线性系统（或固定规则）产生的一种位于有限区域且轨道永不重复的运动，混沌运动是不规则的，类似随机的一种行为，但具有非周期的有序性。
- 1963年Lorenz，大气科学，研究天气预报的困难和大气湍流现象时，三个变量自治的罗伦兹方程，其解是非周期且很混乱，是第一个在耗散系统中一个确定的方程导出混沌解的例子。指出气候不能精确重演与天气无法长期预报之间存在着一种联系，描述了初值的敏感性。
其它领域中有很多类似的现象。

Lorenz 系统

- 例1 Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

其中 x 表示对流强度， y 表示向上流和向下流在单位元之间的温度差， z 表示垂直方向温度分布的非线性强度， $-xz$ 和 xy 为非线性项， r 是瑞利数，它表示引起对流和湍流的驱动因素和抑制对流因素之比，是系统的主要控制参数。 $\sigma = \frac{\nu}{\kappa}$ 是普朗特数（ ν 和 κ 分别为分子粘性系数和热传导系数）， b 代表与对流纵横比有关的外形比。

Lorenz 系统

- Lorenz系统为耗散系统：相空间体积的时间变化率为

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \operatorname{div} V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(\sigma + b + 1) < 0, (\sigma > 0, b > 1)$$

- 平衡点：

(1) 当 $0 < r < 1$ 时，仅有一个平衡点

$$O : (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

(2) 当 $r > 1$ 时，有三个平衡点

$$\left\{ \begin{array}{l} O : (x, y, z) = (0, 0, 0) \\ c_1 : (x, y, z) = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \\ c_2 : (x, y, z) = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1) \end{array} \right.$$

Lorenz 系统

一次近似系统的稳定性分析平衡点的稳定性。

- (1) 当 $0 < r < 1$ 时，平衡点 O 点为稳定的。
- (2) 当 $1 < r < r_0 = 24.74$ 时， O 为不稳定的平衡点， c_1 和 c_2 为稳定焦点。
- (3) 当 $r = r_0$ 时发生霍夫分叉，出现了不稳定的极限环。
- (4) 当 $r > r_0 = 24.74$ 时，在某些 r 范围内，其解为周期解，在另一些 r 范围内，其解为奇怪吸引子，产生混沌运动。

Lorenz 系统

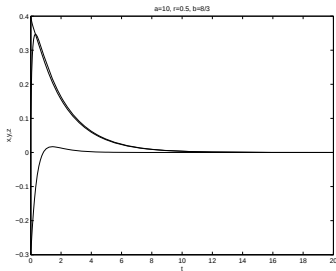


图1

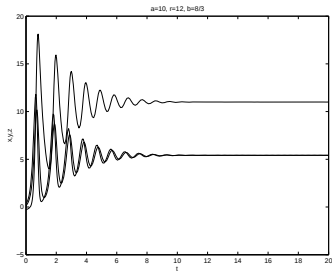


图2

- 图1: 唯一的稳定平衡点 $(0, 0)$.
- 图2: 不稳定平衡点 $(0, 0)$, 稳定平衡点 $(\pm 5.416, \pm 5.416, 11)$

Lorenz 系统

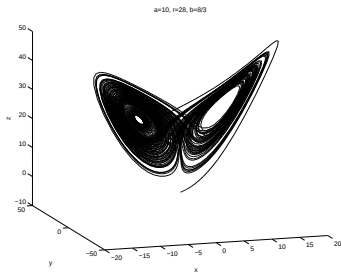


图3 混沌吸引子。

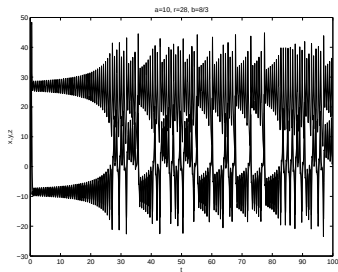


图4 状态 $x(t), y(t), z(t)$

混沌系统的特性

- 内在随机性。混沌区的行为表现出随机不确定性，这种不确定性不是来源于外部环境的随机因素对系统的影响，而是系统自发产生的。
- 初值敏感性。对于没有内在随机性的系统，初值靠近，轨线靠近。但对混沌系统，从两个非常靠近的初值出发的两条轨线在经过长时间演化后，可能变得足够远，即所谓“失之毫厘，谬之千里”。

混沌系统的特性

- 遍历性、有界性。混沌运动在其混沌吸引域内是各态历经的。系统可以到达混沌吸引子内部的任何不稳定的周期轨道及邻域内的每个点，即在有限时间内混沌轨道经过混沌区域内的每一个状态，但混沌是有界的，表现为整体稳定。
- 分维性。混沌运动在相空间中的运动轨线在某个有限区域内经过无限次折叠，分数维可表示这种无限次的折叠，具有多叶，多层次结构。
- 统计性。既有正的Lyapunov指数和连续的功率谱特性。

混沌系统的特性

- 混沌在实际工程中表现为系统的失稳，如混沌运动会使机电系统或电路系统产生不规则的震荡，造成安全问题，此时需要抑制和回避。
- 混沌有用：保密通讯，混合物的充分融合等。

Chua氏回路系统

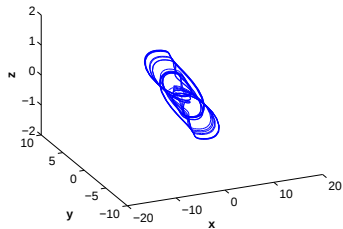
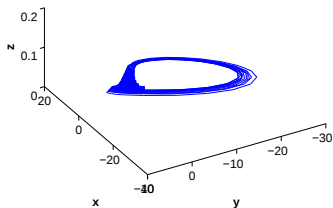
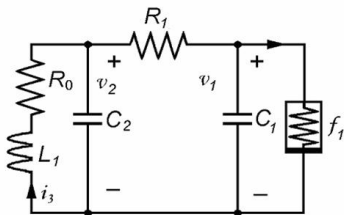
- Chua氏回路系统:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 &= \frac{1}{C_1} \left[\frac{v_2 - v_1}{R} - g(v_1) \right], \\ \dot{v}_2 &= \frac{1}{C_2} \left[\frac{v_1 - v_2}{R} + i_3 \right], \\ \dot{i}_3 &= \frac{1}{L} [-v_2 - R_0 i_3], \end{cases} \quad (1)$$

v_1, v_2 : 电容器 C_1, C_2 两端的电压, i_3 : 通过电感 L 的电流, R, R_0 : 电阻, $g(v_1)$: 通过非线性阻抗的电流。其定义如下:

$$g(v_1) = G_b v_1 + \frac{1}{2} (G_a - G_b) (|v_1 + B_p| - |v_1 - B_p|) \quad (2)$$

混沌吸引子



混沌吸引子

