常微分方程

北京大学工学院
2016–2017年度第一学期

September 13, 2016

主讲教师：

王金枝　力学与工程科学系
电话：62754032
Email: jinzhiw@pku.edu.cn
办公室：力学楼307

助教：力学与工程科学系研究生

陈晓天　电话：13120353937
Email: xtchen@pku.edu.cn
李夏洋　电话：18811757620
Email: xiayangli@pku.edu.cn

教学参考书、作业、考勤

- 教学参考书:
  [1] 常微分方程，伍卓群，李勇，高等教育出版社，2004。
  [2] 常微分方程，王高雄，高等教育出版社，1984。
- 作业：
  每周二交作业，要求按时完成;
  作业下发之后补交作业视为无效，不予批改;
  每次作业情况助教都有记录。
- 考勤：
  不得无故缺课，不得无故迟到;
  请假需系里批准;
  不定期点名与课堂考查;
  考勤作为平时成绩的一部分。

考试

期中考试：预计11月8日左右.
期末考试：2017/1/12 下午。

成绩评定：
作业+考勤+平时考查：20%
期中：30%
期末：50%

学校规定：
优秀（成绩85分及以上）：不超过35%**；**
不及格：$1\% - 10\%$

课程简介：

课程性质：理科主干基础课。学分：3，学时：68

主要内容：

(1) 初等积分法。
(2) 线性方程组与方程（解法与结构）。
(3) 常系数线性方程组与方程的求解方法。
(4) 基本理论（存在性，唯一性，解对初值和参数的连续相依性、可微性，延展性。）
(5) 常微分方程定性理论、稳定性理论。

前言

- 微分方程模型；
- 微分方程与微积分，数学分支（定性理论、稳定性理论、泛函微分方程、边值问题）；
- 表述基本定律、各种问题的基本工具；
- 牛顿力学、天体力学、机械力学（如海王星）；
- 力学、电子技术、自动控制、航空航天等等。

- 例子与概念
- 几种类型的一阶方程的初等解法（解析法）
- 高阶方程的几种可积类型

- 代数方程，三角方程的未知量：数

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

- 微分方程：未知量为未知函数。

  定义1.1　把含有自变量、未知函数以及未知函数的某些导数的关系式称为微分方程。

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 2\cos 3x$$

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ （热传导方程），$\frac{\partial^2 u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ （波动方程）

微分方程的分类：

- 类型（常微、偏微）
- 阶数（未知函数对自变量微商的最高阶数）

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3(\frac{dy}{dx})^3 + y = \cos x$$

- 线性与非线性

线性：$\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - x^2y = \sin x.$
（未知函数以及所有出现的微商都是一次的）

$$\frac{d^ny}{dx^n} = a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_0(x)y + f(x)$$

非线性方程如：$(1+y)y' + 2y = e^x, \quad \dfrac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 0,$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0.$$

例1　放射性物质镭的裂变规律：裂变速度与存余量成正比。已知$t=t_0$时刻镭的份量为R_0，要确定镭在时刻t的份量$R(t)$。

$$\frac{dR}{dt}=-kR,\quad k>0,\quad R(t_0)=R_0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dR}=-\dfrac{1}{kR},\quad t=-\dfrac{1}{k}\ell nR+C \\ R(t)=e^{-kt+kC}=C_1e^{-kt},\quad R(t)=R_0e^{-k(t-t_0)} \end{cases}$$

- 半衰期：裂变一半所需时间. 镭的半衰期：4.5×10^9年。
- $\dfrac{1}{2}=\dfrac{R}{R_0}=e^{-4.5\times10^9k}$，可求出$k$。

例2 研究电流振荡（如图1.1）

C：电容器，L：电感，R电阻，$i(t)$：电流强度，
$Q(t)$：t时刻电容器上的电量，$v(t)$：电容器两极间的电位差.

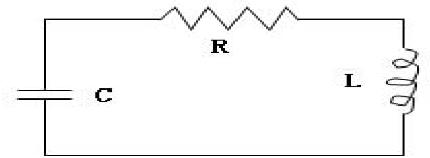

图1.1

$$\begin{cases} iR = -v - L\dfrac{di}{dt}, \\ i(t) = \dfrac{dQ}{dt},\ Q(t) = Cv(t). \end{cases}$$

$$L\frac{d^2v}{dt^2} + R\frac{dv}{dt} + \frac{1}{C}v = 0.$$

例3　　质量为m的质点在力F的作用下在x轴上运动。

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, \dfrac{dx}{dt}), \\ x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1. \end{cases}$$

例4　数学摆

质量为m的质点M，在重力作用下，它在垂直于地面的平面上沿圆周运动，确定摆的运动方程。

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi, \quad v = \ell\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi$$

当φ很小时：

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0.$$

摆在一个粘性的介质中摆动：

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0.$$

初始状态：当$t = 0$时，$\varphi = \varphi_0$, $\dfrac{d\varphi}{dt} = w_0$.

例5 力学、物理中广泛应用的哈密顿(Hamilton)系统：

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

$H = H(p_1, \cdots, p_n; q_1, \cdots, q_n, t)$是已知函数，$i = 1, \cdots, n$。
向量形式：

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$p = (p_1, \cdots, p_n)^T, \quad q = (q_1, \cdots, q_n)^T, H = H(p, q, t)$$

p：广义动量，q：广义坐标。

- 当H不含t时，即$H = H(p(t), q(t))$，保守系统，能量守恒。

$$\begin{cases} \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p}\dfrac{dp}{dt} + \dfrac{\partial H}{\partial q}\dfrac{dq}{dt} = 0, \\ H = H(p(t), q(t)) = C(constant). \end{cases}$$

- 当H只含有p时，即$H = H(p(t))$，可积系统。

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = 0 \Rightarrow p = p_0, \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial H(p(t))}{\partial p} = \omega_0 \end{cases}$$

$$p(t) = p_0, \quad q(t) = \omega_0 t + q_0.$$

其中p_0, q_0, ω_0为常向量。

- n阶方程的一般形式：

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{1.1}$$

- **定义1.2**　称函数$y=\varphi(x)$是**(1.1)**在区间I上的解，如果它在区间I上有定义，具有**(1.1)**中要求的各阶导数，并且恒成立

$$F(x,\varphi(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0,\quad x\in I.$$

- 例　方程：$y''=x$，$y=\frac{1}{6}x^3$是其解，$y=\frac{1}{6}x^3+c_1x+c_2$也是解，其中$c_1,c_2$为任意常数，前者称为特解，后者称为通解。
- 例　方程：$t\frac{dx}{dt}+x=0$，$x=\frac{1}{t}$是此方程在$(-\infty,0)$，$(0,\infty)$上的解。

- **定义1.3** 把n阶方程**(1.1)**的含有彼此独立的n个任意常数$c_1,\cdots,c_n$的解族$y=\varphi(x,c_1,\cdots,c_n)$称为**(1.1)**的通解。任何单个的解称为特解。
- 通解不等价于方程所有解的集合。
  （1）判断一个表达式包含了方程的所有解是困难的。
  （2）包含所有解的表达式是否存在？
- 例：$\dfrac{dy}{dx}=2x(1-y^2)^{\frac{1}{2}}$
  $y=\sin(x^2+C)$是通解，其中C为任意常数；$y=\pm1$是特解，不包含在通解里。
- 形如$y=\varphi(x,c_1,\cdots,c_n)$的解称为通解，如果在一定范围内对任一给定的初始条件，都能确定一组常数$c_1,\cdots,c_n$，使对应的解满足此条件。

- **定义1.4** 如果函数方程
$$\psi(x,y)=0 \tag{1.2}$$
确定的隐函数$y=y(x)$是**(1.1)**的解，则**(1.2)**就称为**(1.1)**的隐式解。
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},\qquad x^2+y^2=C(C>0).$$
- **定义1.5** 如果由含有n个任意常数$c_1,\cdots,c_n$的函数方程
$$\Phi(x,y,c_1,\cdots,c_n)=0 \tag{1.3}$$
确定的函数族$y=\varphi(x,c_1,\cdots,c_n)$是**(1.1)**的通解，则**(1.3)**就称为**(1.1)**的隐式通解。

- 定解条件：一个或一组特定的条件。
- 定解问题：求满足某种定解条件的解的问题。
- 初始条件：对方程**(1.1)**，初始条件是

$$y(x_0)=\alpha_0,\ y'(x_0)=\alpha_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=\alpha_{n-1},$$

  其中$x_0\in I$是自变量的某个给定值，α_i，$i=0,1,\cdots,n-1$是未知函数的i阶微商的给定值。
- 初值问题：求微分方程满足初始条件解的问题（**Cauchy**问题）。（如牛顿第二定律，初始时刻、初始位移、初始速度）
- 一阶方程的初值问题：$F(x,y,y')=0$, $y(x_0)=y_0$；几何意义；解曲线；积分曲线。

边界条件，边值问题

二阶方程$F(x, y, y', y'') = 0$：

(I) 狄利克雷(Dirichlet, 1805-1895)问题：

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0.$$

如悬连线问题。

(II) 周期边值问题：

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b).$$

一阶方程组的一般形式：

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \cdots, y_n), \\ \qquad \cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \cdots, y_n). \end{cases} \tag{1.4}$$

函数$y_1 = \varphi_1(x), \cdots, y_n = \varphi_n(x)$称为方程组**(1.4)**在区间$I$上的解，如果它们在$I$上可微，并且把它们代入**(1.4)**后成为恒等式。

- **把方程组(1.4)的含有n个彼此独立的任意常数的解族:**

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, c_1 \cdots, c_n) \\ \vdots \\ y_n = \varphi_n(x, c_1 \cdots, c_n) \end{cases}$$

称为方程组(1.4)的通解。

- **初始条件:**

$$y_1(x_0) = \alpha_1, \cdots, y_n(x_0) = \alpha_n$$

其中$x_0 \in I$和$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$分别是自变量和未知函数的某一给定值。

- n阶方程的正规形式：

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}). \tag{1.5}$$

- 可化为方程组，设

$$y_1 = y,\ y_2 = \frac{dy}{dx}, \cdots, y_n = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \cdots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, \cdots, y_n). \end{cases} \tag{1.6}$$

- $y=\varphi(x)$是**(1.5)**的解 $\Rightarrow$
  $y_1=\varphi(x), y_2=\varphi'(x), \cdots, y_n=\varphi^{(n-1)}(x)$是**(1.6)**的解。
- $y=\varphi(x)$是**(1.5)**满足初始条件

$$y(x_0)=\alpha_0,\ y'(x_0)=\alpha_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=\alpha_{n-1}$$

  的解 $\Rightarrow$
  $y_1=\varphi(x), y_2=\varphi'(x), \cdots, y_n=\varphi^{(n-1)}(x)$是**(1.6)**满足初始条件

$$y_1(x_0)=\alpha_0,\ y_2(x_0)=\alpha_1, \cdots, y_n(x_0)=\alpha_{n-1}$$

  的解。
- 反之，如何描述？

- 方向场的概念

  考虑方程：$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$，假设$f(x,y)$在区域G内有定义。

  (i) 过G内每一点，方程解曲线的切线斜率等于$f(x,y)$在这点的函数值。
  (ii) 对G内每一点，画一个有向线段，斜率等于$f(x,y)$在这点的函数值，方向为x增加的方向，形成方向场。
  (iii) 解曲线始终顺着方向场的方向行进。
  (iv) 过(x_o,y_0)的积分曲线。

- 例：$\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$.
- 作业：**P9: 2（1），2（4），3（2），4**