§5　边值问题和周期解
§6　高阶方程

October 24, 2016

§5　线性方程边值问题和周期解

- $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$.
- 周期边值条件：$x(a) = x(b)$.
- 两点边值条件：$Lx(a) + Nx(b) = 0$，

  其中$a, b \in I, L, N$为$n \times n$常矩阵。
- 边值问题不一定有解，即使有也不一定唯一。
- 边值问题有解的条件？

边值问题和周期解

分析方程组（**NH**）的边值问题有解的条件：

(1) 周期边值条件：$x(a)=x(b)$。

思路：

（**i**）设$\Phi(t)$是（**LH**）的基本解矩阵，则（**NH**）的解可表示为：

$$x(t)=\Phi(t)\left(C+\int_a^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds\right).$$

（**ii**）若有解满足周期边值条件$x(a)=x(b)$，代入方程则有

$$(\Phi(a)-\Phi(b))C=\Phi(b)\int_a^b \Phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

（**iii**）周期边值问题有唯一解的条件：$\Phi(a)-\Phi(b)$可逆。

边值问题和周期解

（**iv**）若齐次方程组的解满足周期边值条件$x(a)=x(b)$，则

$$(\Phi(a)-\Phi(b))C=0.$$

$\Rightarrow$齐次方程组只有平凡解$x=0$满足周期边值条件$x(a)=x(b)$当且仅当$\Phi(a)-\Phi(b)$可逆。

（存在$\Phi(t)$还是对所有的基本解矩阵？）

定理5.1 若方程组（**LH**）的周期边值问题仅有平凡解$x=0$，则对任何$f(t)$，方程组（**NH**）的周期边值问题恒有解。

- 同理可考虑两点边值条件：

$$Lx(a)+Nx(b)=0$$

思考题

- 对给定的$f(t)$，（**NH**）存在满足周期边值条件$x(a) = x(b)$的解的充要条件？
- 对给定的$f(t)$，（**NH**）存在唯一一个满足周期边值条件$x(a) = x(b)$的解的充要条件？
- $\Phi_1(t)$和$\Phi_2(t)$都是基本解矩阵，$\Phi_1(a) - \Phi_1(b)$可逆是否$\Phi_2(a) - \Phi_2(b)$可逆？

边值问题和周期解

问题：若$A(t)$和$f(t)$都是以常数$\omega > 0$为周期的周期函数，问方程组（**NH**）是否存在ω-周期解？若存在条件如何？

定理5.2 若$A(t)$和$f(t)$在$\mathbb{R}$上有定义，且是以$\omega > 0$为周期的周期函数，则方程组（**NH**）存在ω-周期解的充要条件是（**NH**）有一个在$\mathbb{R}$上有界的解。

证明思路：必要性显然，只需证明充分性。

边值问题和周期解

(i) 设$\Phi(t)$是状态转移矩阵，满足$\Phi(0)=E$，E为单位矩阵。

令$x_0(t)$是（**NH**）的有界解。

$A(t)=A(t+\omega), f(t)=f(t+\omega) \Rightarrow x_0(t+(k-1)\omega)$是解，且

$$x_0(t+(k-1)\omega)=\Phi(t)\left(x_0((k-1)\omega)+\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds\right).$$

特别地取$t=\omega$，则有

$$x_0(k\omega)=\Phi(\omega)x_0((k-1)\omega)+v, \quad k=1,2,\cdots, \tag{1}$$

其中$v=\Phi(\omega)\int_0^\omega \Phi^{-1}(s)f(s)ds$.

边值问题和周期解

(ii) （**NH**）存在ω-周期解$x(t)$当且仅当$x(0)=x(\omega)$，即存在常数向量C，使得

$$\Phi(0)C=\Phi(\omega)\left(C+\int_0^\omega \Phi^{-1}(s)f(s)ds\right)$$

即

$$(\Phi(\omega)-E)C=-v. \tag{2}$$

（反证）假如（N H）没有ω-周期解，则上述关于C的代数方程组必无解。从而

rank$(\Phi(\omega)-E)<n$，**rank**$[\Phi(\omega)-E,-v]\neq rank$**[**$\Phi(\omega)-E]$**.**

边值问题和周期解

由代数方程组理论知必存在非零向量u，使得

$$u^T(\Phi(\omega) - E) = 0 \tag{3}$$

$$u^T v \neq 0. \tag{4}$$

事实上，若对所有满足**(3)**的u 都有$u^T v = 0$，则

$$u^T[\Phi(\omega) - E, -v] = 0,$$

从而**rank**$[\Phi(\omega) - E, -v] = rank[\Phi(\omega) - E]$, 矛盾。

边值问题和周期解

(iii) 下式成立（将在（iv）中证明）：

$$u^T x_0(k\omega) = u^T x_0(0) + k u^T v, \quad k = 1, 2, \cdots . \tag{5}$$

令$k \to \infty$，由$x_0(t)$有界，左端有界，右端无穷，矛盾。

(iv) 下面利用归纳法及**(1)**，**(3)**证明**(5)**成立。

（**1**）$k=1$时，利用**(1)**，**(3)**易推出**(5)**成立。

（**2**）假设当$k=m$时**(5)**成立，即

$$u^T x_0(m\omega) = u^T x_0(0) + m u^T v.$$

(1)$\Rightarrow$ $u^T x_0((m+1)\omega) = u^T \Phi(\omega) x_0(m\omega) + u^T v.$

利用**(3)**，将$u^T\Phi(\omega)=u^T$代入，并利用归纳假设，则有

$$u^T x_0((m+1)\omega) = u^T x_0(0) + (m+1) u^T v$$

即当$k=m+1$时**(5)**成立。

§6　高阶线性方程

- n阶线性方程：

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = f(t) \tag{6}$$

其中$a_1(t), \cdots, a_n(t), f(t)$在区间$I$上连续。

- n阶齐次线性方程：

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = 0. \tag{7}$$

化成等价的方程组

令$x_1 = x$, $x_2 = \dfrac{dx}{dt}, \cdots, x_n = \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$，则化为方程组

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}.$$

存在唯一性定理

定理6.1 设$a_1(t),\cdots,a_n(t),f(t)$在区间$I$上连续，则对任一$t_0\in I$和任意的$n$个常数$\xi_0,\cdots,\xi_{n-1}$，方程**(6)**恒有定义在整个区间$I$上且满足初始条件

$$x(t_0)=\xi_0,\ x'(t_0)=\xi_1,\ \cdots,\ x^{n-1}(t_0)=\xi_{n-1}$$

的解，并且方程**(6)**也只有一个解满足此初始条件。

推论6.1 齐次线性方程**(7)**的解，若于区间I的某点处它本身及其直到$n-1$阶导数均为零，则它必于区间I上恒等于零。

（利用零解的唯一性）

线性方程的性质

(1.) （叠加原理）若$\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$是齐次线性方程的解，则对任意常数$C_1,\cdots,C_n$，函数$C_1\varphi_1(t)+\cdots+C_n\varphi_n(t)$都是齐次线性方程的解。

(2.) 非齐次线性方程的一个解与对应齐次线性方程的一个解之和为非齐次线性方程的一个解。

(3.) 非齐次线性方程的任意两个解之差一定是对应齐次线性方程的解。

齐次线性方程的通解结构定理

定理6.2

(i) 齐次线性方程**(7)**于区间I上一定存在n个线性无关解。

(ii) 若$\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$是齐次线性方程**(7)**于区间$I$上的$n$个线性无关解，则含有任意常数$C_1, \cdots, C_n$的表达式

$$x = C_1\varphi_1(t) + \cdots + C_n\varphi_n(t)$$

是齐次线性方程**(7)**的通解，确切地说，是方程**(7)**的全部解的共同表达式。

非齐次线性方程的通解结构定理

- 齐次线性方程**(7)**解的全体构成了一个n维线性空间。
- 齐次线性方程**(7)**的任意n个线性无关解称为方程的一个基本解组。

定理6.3 设$\psi(t)$是非齐次线性方程**(6)**的一个解，$\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$是对应齐次线性方程**(7)**的一个基本解组，则含有任意常数$C_1,\cdots,C_n$的表达式

$$x=C_1\varphi_1(t)+\cdots+C_n\varphi_n(t)+\psi(t)$$

是非齐次线性方程**(6)**的通解，确切地说，是方程**(6)**的全部解的共同表达式。

判定n个解线性无关

引理6.1 设$t_0 \in I$，$\varphi_1(t), \cdots, \varphi_m(t)$是齐次线性方程(7)于区间$I$上的$m$个解，则$\varphi_1(t), \cdots, \varphi_m(t)$于区间$I$上线性相关的充要条件是向量组

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \begin{pmatrix} \varphi_m(t_0) \\ \varphi_m'(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_m^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$$

线性相关。

（证明：利用定义及等价的方程组的结果）

n个函数构成的Wronski行列式

n个函数构成的Wronski行列式：

设有n个定义在区间I上且$n-1$次可微的函数$\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$，称行列式

$$W(t)=\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

为由这n个函数构成的Wronski行列式。

刘维尔公式

引理6.2 (刘维尔公式)　若$\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$是齐次方程**(7)**的解，则由它们构成的**Wronski**行列式$W(t)$可表示为

$$W(t)=W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds},\quad t\in I,$$

其中$t_0\in I$可任意取定。

（利用等价的方程组的刘维尔公式：**trace** $A(t)=-a_1(t)$）

- 齐次方程**(7)**的n个解$\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$线性无关当且仅当存在一点$t_0\in I$使得$W(t_0)\neq 0$.

  （利用引理**6.1**）

问题：已知齐次方程(7)的n个线性无关解$\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$，求非齐次方程(6)的一个特解。

求解步骤（转化为等价的方程组）：

(i) $\psi_1(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_1'(t)\\ \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \psi_n(t)=\begin{pmatrix}\varphi_n(t)\\ \varphi_n'(t)\\ \vdots\\ \varphi_n^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}$是方程组(8)对应的齐次方程组的一个基本解组。

常数变异公式

(ii) **设方程组(8)有特解：**$\overline{x}_0(t)=C_1(t)\psi_1(t)+\cdots+C_n(t)\psi_n(t)$**，则**

$$\Phi(t)\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ \vdots \\ C_n'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

其中

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

常数变异公式

(iii) **求出**$C_i(t)$**，则**$\overline{x}_0(t)$**的第一个分量**$x_0(t)$**，即**

$$x_0(t) = C_1(t)\varphi_1(t) + \cdots + C_n(t)\varphi_n(t)$$

是方程(6)的解。

下面求$C_i(t)$, 利用$\Phi^{-1}(t) = \dfrac{\Phi^*(t)}{W(t)}$，则有

$$\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ \vdots \\ C_{n-1}'(t) \\ C_n'(t) \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} = \frac{f(t)}{W(t)} \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \vdots \\ \phi_{n-1}(t) \\ \phi_n(t) \end{pmatrix}$$

其中$\phi_i(t)$是$W(t)$中第n行第i列元素的代数余子式。

常数变异公式

(iv)

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t \frac{\phi_1(s)}{W(s)} f(s)ds \\ \vdots \\ \int_{t_0}^t \frac{\phi_n(s)}{W(s)} f(s)ds \end{pmatrix}.$$

方程(6)的特解：

$$x_0(t) = \int_{t_0}^t \frac{\sum\limits_{i=1}^n \varphi_i(t)\phi_i(s)}{W(s)} f(s)ds = \int_{t_0}^t \frac{\Delta(t,s)}{W(s)} f(s)ds.$$

其中$\Delta(t,s)$是这样一个行列式：前$n-1$行是$W(s)$的前$n-1$行相应的元素，第n行是$W(t)$第一行的相应元素。

常数变异公式

即

$$\Delta(t,s)=\begin{vmatrix}\varphi_1(s) & \cdots & \varphi_n(s)\\ \varphi_1'(s) & \cdots & \varphi_n'(s)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(s)\\ \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t)\end{vmatrix}$$

(v) **方程(6)的通解为**

$$x=C_1\varphi_1(t)+\cdots+C_n\varphi_n(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\Delta(t,s)}{W(s)}f(s)ds.$$

其中$C_1,\cdots,C_n$是任意常数，$t_0\in I$可任意取定。

常数变异公式

定理6.4 （常数变异公式） 设$\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$是与方程**(6)**对应的齐次方程**(7)**的一个基本解组，则**(6)**的全部解的共同表达式可写为

$$x = C_1\varphi_1(t) + \cdots + C_n\varphi_n(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\Delta(t,s)}{W(s)} f(s)ds.$$

其中$C_1, \cdots, C_n$是任意常数，$t_0 \in I$可任意取定，$W(t)$是由$\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$构成的**Wronski**行列式，$\Delta(t,s)$是这样一个行列式：前$n-1$行是$W(s)$的前$n-1$行相应的元素，第$n$行是$W(t)$第一行的相应元素。

例6.1 写出二阶方程$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = f(t)$的通解表达式。

作业

- **P55: 1, 3.**
- **P58: 1, 3, 4, 5.**