§7 线性微分方程的一些求解方法

October 27, 2016

§7.1适当的变换

线性方程：

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = 0 \tag{1}$$

- **降阶法：已知方程(1)对应的齐次方程的一个特解，可降阶。**
- **利用刘维尔公式求解。**
- **欧拉（Euler）方程：化为常系数方程。**

降阶法

情形I：若可求出方程(1)的一个非平凡解$x=\varphi(t)$**，则可通过变换**$x=\varphi(t)y$**将它降成**$n-1$**阶方程。**

(i.) 令$x=\varphi(t)y$，则方程化为

$$\varphi(t)\frac{d^n y}{dt^n}+b_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_n(t)y=0. \tag{2}$$

(ii.) $x=\varphi(t)$是方程**(1)**的解$\Leftrightarrow$ $y=1$是方程**(2)**的解$\Rightarrow$ $b_n(t)=0$**.**

(iii.) 令$z=\dfrac{dy}{dt}$，则方程化为$n-1$阶方程

$$\frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}}+C_1(t)\frac{d^{n-2}z}{dt^{n-2}}+\cdots+c_{n-1}(t)z=0$$

其中$C_i(t)=\dfrac{b_i(t)}{\varphi(t)}$**.**

降阶法

- **例7.1** 求二阶方程$\frac{d^2x}{dt^2}+a(t)\frac{dx}{dt}+b(t)x=f(t)$的通解，已知对应的齐次方程的一个非零解$x=\varphi(t)$.

$$\varphi(t)y''+(2\varphi'(t)+a(t)\varphi(t))y'=f(t)$$

- **例7.2** 求方程$t\frac{d^3x}{dt^3}+3\frac{d^2x}{dt^2}-t\frac{dx}{dt}-x=0$的通解，已知$x=\frac{1}{t}$是其特解。

$$x=\frac{1}{t}y,\qquad y'''-y'=0$$

$$x=C_1\frac{1}{t}e^t-C_2\frac{1}{t}e^{-t}+C_3\frac{1}{t}.$$

降阶法

- **注7.1**　有时经变换$x=\varphi(t)y$，可使其它某项系数为零，有些情况下可化为可求解的方程。
- 考虑二阶方程$\dfrac{d^2x}{dt^2}+a(t)\dfrac{dx}{dt}+b(t)x=f(t)$，令$x=\varphi(t)y$，选取$\varphi(t)$，使得$\dfrac{dy}{dt}$的系数为零：

$$2\varphi'(t)+a(t)\varphi(t)=0,\ \varphi(t)=e^{-\frac{1}{2}\int a(t)dt}.$$

- **例7.3**

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\sin t\frac{dx}{dt}+\frac{1}{4}(\sin^2 t+2\cos t+4)x=0.$$

选取$\varphi(t)=e^{\frac{1}{2}\cos t}$，则$\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=0$.

利用刘维尔公式求解

情形II：若已求出方程(1)的$n-1$个线性无关解

$\varphi_1(t),\cdots,\varphi_{n-1}(t)$，利用刘维尔公式可求出另一特解，使它们一起构成方程的一个基本解组。

考虑$n-1$阶线性方程：

$$\begin{vmatrix} x & \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_{n-1}(t) \\ x' & \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_{n-1}'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{(n-1)} & \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_{n-1}^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} = Ce^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds} \tag{3}$$

则有

利用刘维尔公式求解

(i) 方程**(3)**的解一定是方程**(1)**的解（证明见下一页）。

(ii) 求出**(3)**的一个解$\varphi_n(t)$，使其与$\varphi_1(t), \cdots, \varphi_{n-1}(t)$一起构成方程**(1)**的一个基本解组。

取定常数$C \neq 0 (C = 1)$，求解$n-1$阶线性方程**(3)**，设$\varphi_n(t)$是其一个解，则$\varphi_1(t), \cdots, \varphi_{n-1}(t), \varphi_n(t)$构成了方程**(1)**的一个基本解组。

利用刘维尔公式求解

下面证明（i）成立，思路如下：

写出（3）的通解表达式，说明其也为（1）的解。

(1) $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_{n-1}(t)$是方程**(3)**对应的齐次方程的一个基本解组。

利用刘维尔公式求解

(2) 存在$\varphi_0(t)$使其与$\varphi_1(t),\cdots,\varphi_{n-1}(t)$构成方程**(1)**的一个基本解组。则

$$W[\varphi_0(t),\varphi_1(t),\cdots,\varphi_{n-1}(t)]=C_0e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}$$

其中$W[\varphi_0(t),\varphi_1(t),\cdots,\varphi_{n-1}(t)]$表示由$\varphi_0(t),\varphi_1(t),\cdots,\varphi_{n-1}(t)$构成的**Wronski**行列式，$W[\varphi_0(t_0),\varphi_1(t_0),\cdots,\varphi_{n-1}(t_0)]=C_0$.

于是

$$W[C_0^{-1}C\varphi_0(t),\varphi_1(t),\cdots,\varphi_{n-1}(t)]=Ce^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}.$$

即$C_0^{-1}C\varphi_0(t)$是方程**(3)**的解。

利用刘维尔公式求解

(3) 因$C_0^{-1}C\varphi_0(t)$是方程**(3)**的一个特解，于是

$$x = C_1\varphi_1(t) + \cdots + C_{n-1}\varphi_{n-1}(t) + C_0^{-1}C\varphi_0(t)$$

是方程**(3)**的通解。

(4) 对任意C_i，上述函数x一定是方程**(1)**的解，从而说明了**(3)**的解一定是方程**(1)**的解。

利用刘维尔公式求解

例（例7.1） 二阶方程$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$，已知一解$\varphi_1(t) \neq 0$，求与它线性无关的另一解。

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{\varphi_1^2(t)} dt.$$

欧拉方程

- **欧拉方程：**

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} t x' + a_n x = 0.$$

- 令

$$t = \begin{cases} e^s, & t > 0 \\ -e^s, & t < 0 \end{cases}$$

- 当$t > 0$时，有

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = e^{-s}\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(e^{-s}\frac{dx}{ds})}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = e^{-2s}\left(\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\right),$$

欧拉方程

$$\frac{d^3x}{dt^3} = e^{-3s}\left(\frac{d^3x}{ds^3} - 3\frac{d^2x}{ds^2} + 2\frac{dx}{ds}\right).$$

归纳法，假设

$$\frac{d^m x}{dt^m} = e^{-ms}\left(\frac{d^m x}{ds^m} + b_1\frac{d^{m-1}x}{ds^{m-1}} + \cdots + b_{m-1}\frac{dx}{ds}\right)$$

成立，则

$$\frac{d^{m+1}x}{dt^{m+1}} = \frac{d(\frac{d^m x}{dt^m})}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = e^{-(m+1)s}\left(\frac{d^{m+1}x}{ds^{m+1}} + c_1\frac{d^m x}{ds^m} + \cdots + b_m\frac{dx}{ds}\right).$$

将各阶导数代入原方程，最终化为以s为自变量的常系数线性方程（下一章）。

欧拉方程

例7.4 解方程：$t^2x'' - 4tx' + 6x = t + t^2 \ln t$.

（限于求$t > 0$时方程的解）

令$t = e^s$，则有

$$\frac{d^2x}{ds^2} - 5\frac{dx}{ds} + 6x = e^s + se^{2s}$$

第二宇宙速度的计算

第二宇宙速度：发射人造卫星的最小速度。

设M：地球的质量，m：卫星的质量，r：地球的地心与卫星重心之间的距离，k：引力常数。

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2r}{dt^2} = -k\dfrac{mM}{r^2} \\ r(0) = R,\ \dfrac{dr}{dt}|_{t=0} = v_0 \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = -k\frac{M}{r^2},\ v\frac{dv}{dr} = -k\frac{M}{r^2}$$

第二宇宙速度的计算

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{kM}{r} + C.$$

利用$r = R$时$v = v_0$，则

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{kM}{r} + \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{kM}{R}.$$

因为$v > 0$，而随r的不断增大$\dfrac{kM}{r}$变得任意小，因此

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{kM}{R} \geq 0, \quad v_0 \geq \sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

利用$r = R$时，重力加速度为g，则有$g = \dfrac{kM}{R^2}$，即$kM = gR^2$，故 $v_0 \geq \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.3 \times 10^5} = 11.2 \times 10^3$（米/秒）。

作业

作业：

P67: 2(1), 2(3).