第三章　常系数线性方程

November 3, 2016

§1 常系数线性方程的解法

- n阶方程

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \tag{1}$$

- 引入微分算子：

$$D = \frac{d}{dt},\ D^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \cdots, D^n = \frac{d^n}{dt^n}.$$

$$D^k f(t) = \frac{d^k f(t)}{dt^k} = f^{(k)}(t).$$

- 方程化为：$D^n x + a_1 D^{n-1} x + \cdots + a_n x = 0$，即

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)x = 0.$$

令$P(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n$，则方程可表示为$P(D)x = 0$.

常系数线性方程的解法

- $P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$，**称**$P(\lambda)=0$**为(1)的特征方程。**
- **性质1　若**$P(\lambda_0)=0$，**则**$x=e^{\lambda_0 t}$**是方程的解。**

  原因：$P(D)e^{\lambda_0 t}=e^{\lambda_0 t}P(\lambda_0)=0 \Leftrightarrow P(\lambda_0)=0.$

定理1.1 若方程(1)的特征方程有n个不同的根$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，则$e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$是方程(1)的一个基本解组。

原因：$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_1 t} \end{vmatrix}$

故由$\lambda_i \neq \lambda_j$知$W(0) \neq 0$，从而$e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$线性无关。

常系数线性方程的解法

例1.1 解方程$x'' - x = 0$.

- **性质2** 若λ_0是特征方程$P(\lambda) = 0$的k重根，则

$$e^{\lambda_0 t}, \quad te^{\lambda_0 t}, \quad t^2 e^{\lambda_0 t}, \quad \cdots, \quad t^{k-1} e^{\lambda_0 t}$$

是方程(1)的k个线性无关解。

证明思路：

(i)

$$P(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^k,$$
$$P(D)x = Q(D)(D - \lambda_0)^k x = 0.$$

从而方程$(D - \lambda_0)^k x = 0$的解必是$P(D)x = 0$的解。

常系数线性方程的解法

(ii) 对任何复数δ及任意正整数m，用归纳法可证明

$$D^m(e^{\delta t}x(t)) = e^{\delta t}(D+\delta)^m x(t). \tag{2}$$

从而　$D^k(e^{-\lambda_0 t}x(t)) = e^{-\lambda_0 t}(D-\lambda_0)^k x(t).$

因此方程$(D-\lambda_0)^k x = 0$有解

$$x = (c_1 + c_2 t + \cdots + c_k t^{k-1})e^{\lambda_0 t}.$$

于是得到方程$(D-\lambda_0)^k x = 0$的一个基本解组

$$e^{\lambda_0 t}, \quad te^{\lambda_0 t}, \quad ,\cdots, \quad t^{k-1}e^{\lambda_0 t}.$$

由（**i**）知它们是方程**(1)**的k个线性无关解。

下面用归纳法证明(2)式成立。

(1) $m=1$时显然成立。

(2) 假设$m=k$时(2)成立，即

$$D^k(e^{\delta t}x(t)) = e^{\delta t}(D+\delta)^k x(t).$$

于是

$$\begin{aligned} D^{k+1}(e^{\delta t}x(t)) &= D(D^k(e^{\delta t}x(t))) = D(e^{\delta t}(D+\delta)^k x(t)) \\ &= \delta e^{\delta t}(D+\delta)^k x(t) + e^{\delta t}D(D+\delta)^k x(t) \\ &= e^{\delta t}(D+\delta)^{k+1}x(t). \end{aligned}$$

即$m=k+1$时(2)亦成立。

定理1.2 若方程**(1)**的特征方程有r个根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$，它们的重数分别为$n_1, n_2, \cdots, n_r$，其中$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n, \lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$，则

$$
\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & , \cdots, & t^{n_1 - 1} e^{\lambda_1 t}; \\
e^{\lambda_2 t}, & te^{\lambda_2 t}, & , \cdots, & t^{n_2 - 1} e^{\lambda_2 t}; \\
 & & \cdots & \\
e^{\lambda_r t}, & te^{\lambda_r t}, & , \cdots, & t^{n_r - 1} e^{\lambda_r t}
\end{array}
$$

是方程**(1)**的一个基本解组。

常系数线性方程的解法

证明思路　用反证法证明上述函数组线性无关。

(i) 若线性相关，则存在不全为零的多项式$p_1(t), \cdots, p_r(t)$，使得

$$e^{\lambda_1 t} p_1(t) + e^{\lambda_2 t} p_2(t) + \cdots + e^{\lambda_r t} p_r(t) = 0. \quad (3)$$

(ii) 不妨设$p_1(t)$为非零多项式，且其次数为m_1，除$e^{\lambda_1 t}$，则有

$$p_1(t) + e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} p_2(t) + \cdots + e^{(\lambda_r - \lambda_1)t} p_r(t) = 0.$$

且$p_2(t), \cdots, p_r(t)$是不全为零多项式，微分上式有

$$p_1'(t) + e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} [p_2'(t) + (\lambda_2 - \lambda_1) p_2(t)] + \cdots = 0.$$

再微分m_1次，则有

$$e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}q_2(t)+\cdots+e^{(\lambda_r-\lambda_1)t}q_r(t)=0. \tag{4}$$

注意到$q_2(t),\ldots,q_r(t)$的次数分别与$p_2(t),\cdots,p_r(t)$的次数相同，并且不全为零。

(iii) **(4)式的形式与(3)式形式相同，但项数少一，重复上述过程有限次将得到**

$$e^{\mu t}\pi(t)=0,$$

其中μ为一常数，多项式$\pi(t)\neq 0$，矛盾。

常系数线性方程的解法

- **例1.1**　解方程$x^{(5)} - 3x^{(4)} + 2x'' = 0.$
- **例1.2**　解方程$x''' + x'' - 2x = 0.$

  通解：$x = c_1 e^t + c_2 e^{(-1+i)t} + c_2 e^{(-1-i)t}$

  实值解：$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}\cos t + c_3 e^{-t}\sin t.$

注1.1　实值解的求法：

若$\lambda=\alpha\pm i\beta$是特征方程的k 重根，则

$$e^{\lambda t},\, te^{\lambda t},\, \cdots,\, t^{k-1}e^{\lambda t}$$

是方程的解（$2k$个）。对应$2k$个实值解

$$\begin{array}{cccc} e^{\alpha t}\cos\beta t, & te^{\alpha t}\cos\beta t, & ,\cdots, & t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, \\ e^{\alpha t}\sin\beta t, & te^{\alpha t}\sin\beta t, & ,\cdots, & t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t. \end{array}$$

- **例1.3** 求解方程$x'' + \beta^2 x = f(t)$，其中$\beta > 0$是常数，而$f(t)$是$a < t < b$上的连续函数。

  通解： $x = c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t + \dfrac{1}{\beta} \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s) \sin \beta(t-s) ds.$

作业

- **P 76: 1(1), 1(3), 1(4).**
- **P 77: 2.**