§2 求非齐次常系数线性方程特解的待定系数法

November 10, 2016

§2　求非齐次常系数线性方程特解的待定系数法

- n阶常系数方程

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t). \tag{1}$$

(I) $f(t) = P_m(t)e^{\mu t}$，其中$P_m(t)$是t的m次多项式。

(II) $f(t) = [A_m(t)\cos\beta t + B_\ell(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$.

其中$A_m(t), B_\ell(t)$分别是t的m次和ℓ次多项式。

情形（I）

情形（I）：$f(t)=P_m(t)e^{\mu t}$，其中$P_m(t)$是t的m次多项式。

(i) 若μ不是特征方程的根时，有特解

$$x_0(t)=Q_m(t)e^{\mu t},$$

其中$Q_m(t)$是待定的m次多项式。

(ii) 若μ是特征方程的k重根时，有特解

$$x_0(t)=t^kQ_m(t)e^{\mu t},$$

其中$Q_m(t)$是待定的m次多项式。

情形（I）

原因：分两种情况讨论。（一）$\mu = 0$.

(i) 若$\mu = 0$不是特征根，则$a_n \neq 0$。令

$$x_0(t) = Q_m(t) = c_0 t^m + c_1 t^{m-1} + \cdots + c_m.$$

代入方程比较系数，确定c_i。

(ii) 若$\mu = 0$是k重特征根，则方程化为

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-k} x^{(k)} = f(t).$$

令$x^{(k)} = z$，则$z^{(n-k)} + a_1 z^{(n-k-1)} + \cdots + a_{n-k} z = f(t)$,

且$a_{n-k} \neq 0$。由（i）知上述方程有特解$z(t) = \overline{Q_m}(t)$。

利用$x^{(k)}(t) = z(t)$可推出原方程有一特解$x(t) = t^k Q_m(t)$。

情形（I）

（二）$\mu \neq 0$. 令$x = ye^{\mu t}$.

(i) $D^m(e^{\mu t}y) = e^{\mu t}(D+\mu)^m y$.

(ii) $P(D)x = P(D)(ye^{\mu t}) = e^{\mu t}P(D+\mu)y$.

(iii) 方程$P(D)x = e^{\mu t}P_m(t)$化为$P(D+\mu)y = P_m(t)$.

(iv) 方程$P(D+\mu)y = 0$对应的特征方程为

$$P(\lambda+\mu) = 0.$$

情形（I）

(v) 若$\lambda=\mu$不是原方程对应的特征方程的根，即$P(\mu)\neq 0$，

则$\lambda=0$不是方程$P(\lambda+\mu)=0$的根.

由（一）$\Rightarrow$ $P(D+\mu)y=P_m(t)$有特解：$y_0(t)=Q_m(t)$

故原方程有特解：$x_0(t)=e^{\mu t}y_0(t)=e^{\mu t}Q_m(t)$

其中$Q_m(t)$是m次待定多项式。

(vi) 若$\lambda=\mu$是原方程对应的特征方程的k重根，则$\lambda=0$是方程$P(\lambda+\mu)=0$的k重根。

由（一）知$P(D+\mu)y=P_m(t)$有特解：$y_0(t)=t^kQ_m(t)$，

故原方程有特解：$x_0(t)=t^ke^{\mu t}y_0(t)=t^ke^{\mu t}Q_m(t)$

其中$Q_m(t)$是m次待定多项式。

情形（II）

情形（**II**）：$f(t) = [A_m(t)\cos\beta t + B_\ell(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$，

其中$A_m(t), B_\ell(t)$分别是t的m次和ℓ次多项式。

(i) 若$\alpha + i\beta$不是特征方程的根时，有特解

$$x_0(t) = [C_p(t)\cos\beta t + D_p(t)\sin\beta t]e^{\alpha t},$$

其中$C_p(t), D_p(t)$是待定的p次多项式，$p = \max\{m, \ell\}$。

(ii) 若$\alpha + i\beta$是特征方程的k重根时，有特解

$$x_0(t) = t^k[C_p(t)\cos\beta t + D_p(t)\sin\beta t]e^{\alpha t},$$

其中$C_p(t), D_p(t)$是待定的p次多项式，$p = \max\{m, \ell\}$。

例子

- **例1　求解方程**

$$x''' + 3x'' + 3x' + x = e^{-t}(t-5).$$

通解为

$$x = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + c_3t^2e^{-t} - \frac{5}{6}t^3e^{-t} + \frac{1}{24}t^4e^{-t}.$$

- **例2　用两种方法求解方程: $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$.**

通解为

$$y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + \frac{1}{8}\sin 2x.$$

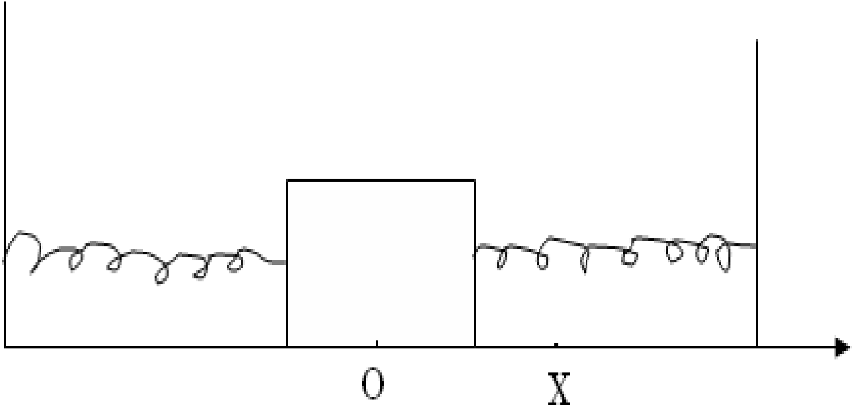
例子

- **例3　求解常系数线性方程组**

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

振动系统

质量为m的质点沿水平轴运动于有阻力的介质中。



振动系统

- 质点在x处所受到的弹性力：$-bx\,(b>0)$
  阻力：$-a\dfrac{dx}{dt}\,(a>0)$.
  质点的运动方程：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=0.$$

- 若还受到外力的作用，则运动方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=f(t).$$

  初始条件为: $x(t_0)=x_0,\ x'(t_0)=x_1$.

没有外力时质点的运动规律

（I）没有外力时：$m\dfrac{d^2x}{dt^2}+a\dfrac{dx}{dt}+bx=0.$

(1) 无阻力，即$a=0$.

通解为：$x(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$. $(\omega^2=\dfrac{b}{m})$.

初值问题的解为：$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$.

其中：$A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{x_1^2}{\omega^2}}, \quad \varphi=arctg\left(-\dfrac{x_1}{x_0\omega}\right).$

ω：系统的固有频率，它只依赖于系统的参数，不依赖于初始条件。

A：振幅，φ：相位。它们不仅依赖于系统本身的参数，还依赖于初始条件。（谐振动）

- 性质：振动是周期的，周期为：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

没有外力时质点的运动规律

(2) 有阻力，即$a > 0$.

特征方程：$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$，$\delta = \dfrac{a}{2m}$, $\omega^2 = \dfrac{b}{m}$.

$$\lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}, \quad Re(\lambda) < 0.$$

- 性质：对方程的任意解$x(t)$有$\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$。
  质点的运动随时间的增加而逐渐减弱，最终趋于平衡位置。

有外力时质点的运动规律

（II）有周期外力$f(t) = mF_0 \cos pt$**.**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = mF_0 \cos pt.$$

(1) **无阻力，即**$a = 0$**.**

(a) **固有频率与外力频率不相同时，即**$p \neq \omega$**.**

有一特解（待定系数法）：$x_0(t) = \dfrac{F_0}{\omega^2 - p^2} \cos pt$**.**

通解：$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \dfrac{F_0}{\omega^2 - p^2} \cos pt.$

振动分为固有振动和强迫振动两部分。

有外力时质点的运动规律

(b) 固有频率与外力频率相同时，即$p=\omega$.

有一特解（待定系数法）：$x_0(t)=\dfrac{F_0}{2\omega}t\sin\omega t.$

通解：$x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t+\dfrac{F_0}{2\omega}t\sin\omega t.$

强迫振动的振幅随时间的增加而无限增加—发生共振现象。

有外力时质点的运动规律

(2) 有阻力，即$a > 0$.

- 固有振动随时间的增加而逐渐减弱，最终消失。只需考虑强迫振动。
- 考虑强迫振动，特解为（待定系数法）：

$$x_0(t) = A\cos(pt + \varphi).$$

其中$A = \dfrac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}, \quad \varphi = arctg\left(\dfrac{2\delta p}{p^2 - \omega^2}\right)$.

- 假定$\omega^2 > 2\delta^2$，则当外力的频率$p = \sqrt{\omega^2 - 2\delta^2}$时振幅最大—发生共振。

作业：

求解下列方程：

（1）$x'' + 2x' = 3 + 4\sin 2x$。

（2）$x'' - 2x' + 2x = 4e^t \cos t$.

（3）$x'' + x = t^2 + 2$.

（4）$x''' - 3x'' + 4x = te^{2t}$.