

§3 常系数齐次线性方程组基本解矩阵的结构

November 14, 2016

常系数齐次线性方程组的解法

- 方程组: $\frac{dx}{dt} = Ax$.
- 化为高阶方程求解。
- 基本解矩阵能否用矩阵 A 解析地表示?
- 利用 A 的约当标准型求基本解矩阵。

矩阵指数函数

- 命题1 矩阵 A 的幂级数

$$I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

绝对收敛。定义 $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$.

- $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n.$

矩阵指数函数

- 矩阵指数函数 e^{At} 有下列性质:

(i) $Ae^{At} = e^{At}A$

(ii) 若 $AB = BA$, 则 $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt} = e^{Bt} \cdot e^{At}$.

(iii) e^{At} 可逆, 且 $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.

(iv) 若 P 可逆, 则 $e^{PAP^{-1}t} = Pe^{At}P^{-1}$.

常系数齐次线性方程组的基本解矩阵

- **定理2.1** 矩阵指数函数 $\Phi(t) = e^{At}$ 是常系数齐次线性微分方程组的一个基本解矩阵, 且 $\Phi(0) = I$. (称为标准基本解矩阵)

原因: $I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots$ 在任何有限区间上一致收敛到 e^{At} , 即

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots$$

逐项微分, 则有

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = Ae^{At} = A\Phi(t).$$

常系数非齐次线性方程组通解

- 设 $f(t)$ 在区间 I 上连续，常系数非齐次线性方程组通解：

$$x = e^{At}C + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f(s) ds.$$

其中 C 为任意常数向量， $t_0 \in I$.

常系数非齐次线性方程组通解

问题： e^{At} 能否用初等函数的有限形式表示？

例2.1

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, \quad e^{At} = \begin{pmatrix} e^{a_1 t} & & & \\ & e^{a_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_n t} \end{pmatrix}.$$

常系数非齐次线性方程组通解

例2.2 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 e^{At} .

(i) $A = I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I + B, \quad B^2 = 0.$

(ii) $e^{At} = e^{It} \cdot e^{Bt}.$

(iii) $e^{It} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}, \quad e^{Bt} = I + tB = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(iv) $e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$

利用约当标准型求 e^{At}

(i) 存在可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT = J$, 其中

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_s \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$$

$$(ii) \quad e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & e^{J_2 t} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{J_s t} \end{pmatrix} T^{-1}.$$

利用约当标准型求 e^{At}

(iii) 求 $e^{J_i t}$.

$$J_i = \lambda_i I + N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N^{n_i} = 0$$

利用约当标准型求 e^{At}

$$\begin{aligned} e^{J_i t} &= e^{\lambda_i t} \cdot \left(I + tN + \cdots + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} N^{n_i-1} \right) \\ &= e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$e^{J_i t}$ 为上三角矩阵。

利用约当标准型求 e^{At}

- (1) $e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$ 是基本解矩阵。
- (2) T 可逆, $e^{At}T = Te^{Jt}$ 也是基本解矩阵。
- (3) 上述方法的优缺点。

待定系数法解方程组 $\dot{x} = Ax$

(一) A 只有单根的情形。

(二) A 有重根的情形。

(一) A 只有单根的情形

设 A 有 n 个不同的特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 。

- 存在可逆矩阵 T 使 $A = TJT^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1}$.
- 基本解矩阵 $\Phi(t) = Te^{Jt}$.

待定系数法解方程组 $\dot{x} = Ax$



$$\begin{aligned}\Phi(t) &= Te^{Jt} = (r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_n) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \\ &= (e^{\lambda_1 t} r_1 \quad e^{\lambda_2 t} r_2 \quad \cdots \quad e^{\lambda_n t} r_n).\end{aligned}$$

即 $e^{\lambda_1 t} r_1 \quad e^{\lambda_2 t} r_2 \quad \cdots \quad e^{\lambda_n t} r_n$ 是微分方程的 n 个线性无关解。

- 将 $x = e^{\lambda_i t} r_i$ 代入方程 $\dot{x} = Ax$, 则有 $(A - \lambda_i I)r_i = 0$. 即 r_i 是 λ_i 对应的特征向量。

待定系数法解方程组 $\dot{x} = Ax$

定理2.2 设 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则

$$\Phi(t) = (e^{\lambda_1 t} r_1 \quad e^{\lambda_2 t} r_2 \quad \dots \quad e^{\lambda_n t} r_n)$$

是方程的一个基本解矩阵, 其中 r_i 为 A 的对应于 λ_i 的特征向量。

- 注 (i) : $\Phi(0) = (r_1, \dots, r_n)$, $\det \Phi(0) \neq 0$.

属于不同特征根的特征向量是线性无关的。

- 注 (ii) : 定理2.2能否推广, 如何推广? (A 可对角化的情形)

待定系数法解方程组 $\dot{x} = Ax$

例2.3 求方程组

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -28 & -18 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -16 & -10 \end{pmatrix} x$$

的通解。

特征根: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$

$\lambda = 0$ 对应的特征向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

待定系数法解方程组 $\dot{x} = Ax$

- 复值解转化为实值解。

例2.4 求方程组 $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x$ 的通解。

$$\left(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right)$$

- 化为高阶方程

待定系数法解方程组 $\dot{x} = Ax$

作业:

(1) 解方程: $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \end{pmatrix}.$

(2) 解方程: $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -20 \\ 5 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} x.$