§2 典型方程的解法

September 19, 2016

典型方程

- 变量可分离方程
- 齐次方程
- 可化为齐次方程的方程

- **方程形式：**

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y) \tag{2.1}$$

其中$h(x), g(x)$为相应区间上的连续函数。

- **1.** 若$g(y_0) = 0$，则$y = y_0$是常数解。
- **2.** 若$g(y) \neq 0$，作变换$z = \int \frac{1}{g(y)} dy$，则

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(y)} \cdot h(x)g(y) = h(x).$$

$$z = \int h(x)dx + C,$$

其中C为任意常数。

2.1 变量可分离方程

原方程的隐式通解：

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int h(x)dx + C.$$

求解步骤：

(i) **求常数解，解**$g(y_0) = 0$.

(ii) **分离变量：** $\dfrac{1}{g(y)}dy = h(x)dx.$

通解： $\int \dfrac{1}{g(y)}dy = \int h(x)dx + C$，$C$**为任意常数。**

(iii) **写出方程的所有解。**

- **注：** **不定积分**$\int f(x)$**的意义；常数**C.

2.1 变量可分离方程

例2.1 解方程$\dfrac{dy}{dx} = 3x^2y$.

解: $y = 0$是常数解。

分离变量:

$$\frac{1}{y}dy = 3x^2dx.$$

积分: $\ell n|y| = x^3 + C_1$, 其中C_1为任意常数。

方程的通解为:

$$y = Ce^{x^3},$$

其中C为任意常数。

例2.2 解方程：$\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$，并求方程分别满足初始条件$y(0) = -2$和$y(0) = 0$的解。

解 $y = \pm 2$为常数解。

$$\frac{1}{y^2-4}dy = dx, \quad \frac{1}{4}\left[\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\right]dy = dx,$$

$$\ell n\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 4x + C_1, \quad y = 2 \cdot \frac{1+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}.$$

方程的所有解为：$y = \pm 2$及$y = 2 \cdot \dfrac{1+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}$.

- 满足$y(0)=-2$解为：$y=-2$.
- 将$y(0)=0$代入通解表达式，求得$C=-1$。

  故满足$y(0)=0$解为：

$$y=2\cdot\frac{1-e^{4x}}{1+e^{4x}}.$$

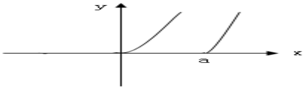
- 画图（$C=-1, C=1$）

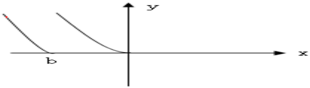
例2.3 （**1**）**求解初值问题：** $\dfrac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}, \quad y(0) = 0$.
（**2**）**求上述方程满足**$y(a) = 0, a > 0$**的解，其中**a**是一常数。**

- $y = 0$是解。
- $y^{-\frac{1}{2}}dy = xdx, \quad y = (\frac{1}{4}x^2 + C)^2$，其中$C$为任意常数。
  （$\frac{1}{4}x^2 + C \geq 0$）
- $y = 0, \quad y = \frac{1}{16}x^4$是满足条件的两个解。
- 是否还有其它解满足条件？

$$y = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{(x^2 - a^2)^2}{16}, & x \geq a. \end{cases}, \quad \forall a > 0$$

$$y = \begin{cases} \dfrac{(x^2 - b^2)^2}{16}, & x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}, \quad \forall b < 0.$$





注：初值问题的解可能不唯一。

2.2 齐次方程

- 例：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.
- 齐次方程的形式：

$$\frac{dy}{dx} = g(\frac{y}{x}). \tag{2.2}$$

- 解法：令$u = \dfrac{y}{x}$，则

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}.$$

方程化为变量可分离方程：

$$u + x\frac{du}{dx} = g(u).$$

2.2 齐次方程

两种齐次方程的类型：

类型I：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

其中$M(x,y)$和$N(x,y)$都是x和y的同次（m次）齐次函数，即

$$M(tx,ty) = t^m M(x,y), \quad N(tx,ty) = t^m N(x,y), \quad \forall t > 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, x\cdot \frac{y}{x})}{N(x, x\cdot \frac{y}{x}))} = \frac{M(1, \frac{y}{x})}{N(1, \frac{y}{x})}.$$

类型II：

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

其中$f(x,y)$**是**x**和**y**的零次齐次函数，即**

$$f(tx, ty) = f(x, y), \forall t > 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = f(x, x \cdot \frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x}).$$

例2.4 解方程：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sigma\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$$

$$\sigma=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

通解：$y=\dfrac{C}{2}x^2-\dfrac{1}{2C}$， C为任意不为零的常数。

2.3 可化为齐次方程的方程

- 方程形式： $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$
  其中a, b, c, a_1, b_1, c_1都是常数。
- 情形1. $c = c_1 = 0$，齐次方程。
- 情形2. $c^2 + c_1^2 \neq 0$，且$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$.
  作变量替换：$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta$.
  方程化为齐次方程：$\dfrac{d\eta}{d\xi} = f\left(\dfrac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}\right)$.
  α, β满足方程组
  $$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases}$$

- **情形2在几何上相当于将坐标原点平移到两条相交直线的交点上。**
- **情形3.** $c^2+c_1^2\neq 0$，且$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$.

$$\exists\lambda\in\mathbb{R},\quad a_1=\lambda a,\quad b_1=\lambda b.$$

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\right).$$

作变换： $z=ax+by$，**则方程化为变量可分离的形式**

$$\frac{dz}{dx}=a+bf\left(\frac{z+c}{\lambda z+c_1}\right).$$

- **情形4.** $\dfrac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$.
  作变换：$z = ax+by+c$，则化为

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z).$$

例2.5 解方程: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x+y+2}{x+y-4}$.

通解: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = Ce^{-2\arctan\frac{y-1}{x-3}}$,

C为任意常数.

2.3 可化为齐次方程的方程

例2.6 解方程: $\dfrac{dy}{dx} = \sin^2(x-y)$.

作变换: $z = x - y$，则

$$\frac{dz}{dx} = \cos^2 z.$$

通解：$\tan(x-y) = x + c, \quad y = x + k\pi + \dfrac{1}{2}\pi$.

作业: **P11: 1(1); P13: 1(2), 1(3); P15: 1(2), 1(4).**