第一章　初等积分法

September 22, 2016

2.4 一阶线性方程

- **方程形式：** $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$.

  $p(x), q(x)$**在区间**I**上连续。**

- **一阶齐次线性方程：**

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{1}$$

- **一阶非齐次线性方程：**

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad q(x) \not\equiv 0 \tag{2}$$

非齐次线性方程(2)的解法一

解法一：方程(2)两端乘$e^{\int p(x)dx}$

$$\frac{dy}{dx}e^{\int p(x)dx}+p(x)ye^{\int p(x)dx}=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int p(x)dx})=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$ye^{\int p(x)dx}=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$$

通解： $y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$

非齐次线性方程通解的定积分形式

问题：线性方程满足初始条件$y(x_0) = y_0$的解析表达式？初值问题的解是否唯一？

- **非齐次线性方程通解的定积分形式：**

方程(2)两端乘$e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$：

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}) = q(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

通解： $y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left(\int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)dt}ds + C\right)$

非齐次线性方程初值问题的解

- 满足初始条件$y(x_0) = y_0$的解:

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \left(\int_{x_0}^{x} q(s) e^{\int_{x_0}^{s} p(t)dt} ds + y_0 \right)$$

- 对任意$x_0 \in I$和y_0，初值问题的解存在且唯一。

非齐次线性方程(2)的解法二

解法二：常数变异法

(i) 齐次方程通解：$y = C_1 e^{-\int p(x)dx}$，C_1为常数。（包含了所有解）

(ii) 设非齐次方程的通解具有形式：

$$y = C_1(x) e^{-\int p(x)dx}.$$

代入方程，则有

$$\frac{dC_1(x)}{dx} = q(x) e^{\int p(x)dx}.$$

$$C_1(x) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

通解：$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C\right).$

齐次线性方程的性质：

(i) **齐次方程满足初始条件**$y(x_0) = y_0$**的解为**

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

(ii) **若**$y_1(t), y_2(t)$ **是齐次方程(1)的解，则对**$\forall C_1 \in \mathbb{R}, \forall C_2 \in \mathbb{R}$，$C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$**也是其解。**

(iii) **(定理2.1)　设**$\varphi(x)$**是(1)在区间**I**上的解，若对某点**$x_0 \in I$，**有**$\varphi(x_0) \neq 0$，**则**$\varphi(x) \neq 0, \forall x \in I$.

齐次线性方程的性质

- **原因：** $\varphi(x) = \varphi(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$.
- **性质（iii）表明：齐次方程(1)的解或者恒为零或者恒不为零。**

齐次线性方程的性质

(iv) （作业）

若$y=\varphi(x)$是(1)的非零解，则$y=C\varphi(x)$为(1)的所有解的共同表达式（这里等同于通解），其中C为任意常数。

- **与通解:**

$$y=Ce^{-\int p(x)dx},$$

$$y=Ce^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$$

作比较。

非齐次线性方程解的性质

非齐次线性方程解的性质：

(i) 齐次线性方程的一个解与非齐次线性方程的解之和是非齐次线性方程的解。

(ii) 非齐次线性方程的任意两个解之差一定是齐次线性方程的解。

非齐次线性方程的通解结构

分析通解的表达式：

- $y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$
- $y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \cdot \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)dt}ds.$
- **非齐次线性方程的通解=齐次线性方程的通解+非齐次线性方程的一个特解。**

非齐次线性方程的通解结构定理

定理2.1 设$\varphi(x)$是齐次方程于区间I上的一非零解，$y=\psi(x)$是非齐次线性方程于区间I上的任一解，则含有任意常数C的表达式

$$y = C\varphi(x) + \psi(x) \tag{3}$$

是非齐次线性方程于区间I上的全部解的共同表达式。

非齐次线性方程的通解结构定理

证明思路：

(I) **(3)确定的函数都是非齐次方程的解。**

(II) **非齐次方程的任意一个解都可以表示成(3)的形式。**

非齐次线性方程的通解结构定理

证明 利用非齐次线性方程的性质可知**(I)**显然成立。

设$y_0(x)$是非齐次线性方程的任意一个解，则$y_0(x)-\psi(x)$是齐次方程的解。令

$$C_1=\varphi^{-1}(x_0)(y_0(x_0)-\psi(x_0)),$$

则齐次方程$y_0(x)-\psi(x)$和$C_1\varphi(x)$在x_0点满足相同的初始条件，由唯一性可得

$$y_0(x)=C_1\varphi(x)+\psi(x),$$

即（**II**）成立，从而证明了定理的结论成立。 □

例题

例2.7　解方程：$\dfrac{dy}{dx} + py = q$，$p \neq 0$, q都是常数。

通解：$y = Ce^{-px} + \dfrac{q}{p}$.

（常数变异法；通解结构，观察）

例2.8　解方程：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + x$.

通解：$y = cx + x^2$.

伯努利方程

- 形式：$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$。
  其中n是实数，$n\neq 0,1$，$p(x),q(x)$在区间I上连续，$q(x)\not\equiv 0$。

(I) 若$y\neq 0$，除y^n：

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x).$$

令$z=y^{1-n}$，则 $\dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$.

化为线性方程：

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x).$$

(II) 当$n>0$时，$y=0$ 也是解。

例题

例2.9 解方程：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{x}y + x\sqrt{y}$.

通解：$y = x^4(C + \dfrac{1}{2}\ell n|x|)^2$.

例2.10 **P17, 3**

小结

- 齐次线性方程解的性质。
- 非齐次线性方程解的性质。
- 非齐次线性方程通解的求解方法（两种方法）。
- 非齐次线性方程通解的不定积分和定积分表示。
- 线性方程初值问题解的表示，初值问题解是唯一的。
- 齐次、非齐次线性方程通解结构。
- 伯努利方程。

思考题

思考的问题（结合作业）：

什么时候采用非齐次线性方程通解的不定积分形式？

什么时候采用非齐次线性方程通解的定积分形式？

作业：**P17, 1(1); 1(4); 1(7); 1(8); 2;**

P18, 1(1); 2(2).

思考题：**P19,3; P18, 4.**