§2 典型方程的解法

September 26, 2016

2.6 恰当方程和积分因子

- **例：** $xydx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}\right) dy = 0.$
- **定义：方程**

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

称为恰当方程或全微分方程，如果存在可微函数$U(x,y)$，使得

$$dU(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

- $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$.
- **通解：** $U(x,y) \equiv C$，C**为任意常数。**

2.6 恰当方程和积分因子

- 如何根据$M(x,y)$和$N(x,y)$来判断一个方程是或者不是恰当方程？
- 如果是恰当方程，如何求出$U(x,y)$？
- 如果不是恰当方程，能否转化为恰当方程?

恰当方程的判定及求解

定理2.3 设函数$M(x,y)$和$N(x,y)$在区域$G: a<x<b, \alpha<y<\beta$上连续，且有连续的一阶偏导数$M_y=\dfrac{\partial M}{\partial y}$和$N_x=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，则方程(1)是恰当方程的充要条件为

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}, \quad (x,y)\in G. \tag{2}$$

当(2)成立时有

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy. \tag{3}$$

或

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} N(x,y)dy, \tag{4}$$

其中$(x_0,y_0)\in G$是任意取定的点。

恰当方程的判定及求解

分析:

(I)：若方程是恰当方程，则

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{5}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

(II): 在假定$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$下构造$U(x,y)$，使得**(5)**成立。

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow$$

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \psi(y). \tag{6}$$

恰当方程的判定及求解

于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dx + \psi'(y) \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} dx + \psi'(y) \\ &= N(x,y) - N(x_0,y) + \psi'(y) \end{aligned}$$

利用

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\Rightarrow \psi'(y) = N(x_0,y) \Rightarrow \psi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y) dy.$$

由**(6)**，则有

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy.$$

恰当方程的判定及求解

- 定理2.3的证明：直接验证。
- 在单连通区域G上，条件$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$保证了曲线积分

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} [M(x,y)dx + N(x,y)dy]$$

与积分路径无关。可取特殊的路径如图：

$$(x_0, y_0) \to (x, y_0) \to (x, y).$$

恰当方程的判定及求解

解方程： $xydx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}\right) dy = 0.$

通解： $\frac{x^2}{2}y + \ell n|y| = C$.

（利用定理2.3及分组凑全微分两种方法）

积分因子方法

- 如果存在函数$\mu(x,y)\neq 0$使得方程

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

为恰当方程，则称$\mu(x,y)$为方程$Mdx+Ndy=0$的积分因子。

- 原方程的解为：$U(x,y)=C$，其中

$$dU=\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy.$$

积分因子方法

- $\mu(x,y)$为一积分因子$\Leftrightarrow \dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$。即

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x}-M\frac{\partial \mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu. \tag{7}$$

- 方程(7)是以$\mu(x,y)$为未知函数的一阶偏微分方程，解存在但一般情况下不易求解。
- 积分因子一定存在。

方程有只与x有关的积分因子

(I) 方程有只与x有关的积分因子$\mu=\mu(x)$:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}dx.$$

结论：方程有只与x有关的积分因子$\mu=\mu(x)$当且仅当

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

只是x的函数，设其为$\psi(x)$，则

$$\frac{d\mu}{\mu}=\psi(x)dx,\quad \mu(x)=e^{\int\psi(x)dx}.$$

方程有只与y有关的积分因子

(II) 方程有只与y有关的积分因子$\mu = \mu(y)$:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} dy.$$

结论：方程有只与y有关的积分因子$\mu = \mu(y)$当且仅当

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}$$

只是y的函数，设其为$\phi(y)$，则

$$\frac{d\mu}{\mu} = \phi(y)dy, \quad \mu(y) = e^{\int \phi(y)dy}.$$

方程有形如$\mu=\mu(\varphi(x,y))$的积分因子

(III) 方程有形如$\mu=\mu(\varphi(x,y))$的积分因子:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}-M\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}d\varphi.$$

结论：方程有形如$\mu=\mu(\varphi(x,y))$的积分因子当且仅当

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}-M\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

只是$\varphi(x,y)$的函数，设其为$g(\varphi(x,y))$，则

$$\frac{d\mu}{\mu}=g(\varphi)d\varphi,\quad \mu(\varphi(x,y))=e^{\int g(u)du}\Big|_{u=\varphi(x,y)}.$$

积分因子方法

- $\mu(x^\alpha y^\beta), \quad \mu(x \pm y), \quad \mu(xy), \quad \mu(\frac{y}{x}), \quad \mu x^2 \pm y^2).$

- **例2.6-1** 解方程：$(y^2 - 3xy + 1)dx + (xy - x^2)dy = 0$.
  （$\mu = x, \quad U = \frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y + \frac{1}{2}x^2$.）

- **例2.6-2** 解方程：$(xy + y^2)dx + (xy + y + 1)dy = 0$.
  （$\mu = \frac{1}{y}, \quad U = \frac{1}{2}x^2 + xy + y + \ell n|y|$，常数解$y = 0$.）

积分因子方法

- **例2.6-3**　求方程的积分因子：$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$.
- **例2.6-4**　求方程的积分因子：

$$M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0.$$

其中M_1, M_2, N_1, N_2均为连续函数。

积分因子的唯一性

积分因子的唯一性：

引理: 如果μ是方程$Mdx + Ndy = 0$的积分因子，且

$$dU = \mu Mdx + \mu Ndy.$$

则$\mu\varphi(U)$也是方程的积分因子，其中$\varphi(U)$是U的任一连续函数。

（原因：$\mu\varphi(U)Mdx + \mu\varphi(U)Ndy = \varphi(U)dU = d\phi(U)$）

求积分因子的分组方法

(i) 方程分组：$(M_1dx + N_1dy) + (M_2dx + N_2dy) = 0$.

(ii) 设方程$M_1dx + N_1dy = 0$有积分因子μ_1，即存在U_1使得

$$dU_1 = \mu_1 M_1 dx + \mu_1 N_1 dy.$$

则$\mu_1\varphi(U_1)$是第一组方程的积分因子，其中$\varphi(\cdot)$是任意连续函数。

(iii) 设方程$M_2dx + N_2dy = 0$有积分因子μ_2，即存在U_2使得

$$dU_2 = \mu_2 M_2 dx + \mu_2 N_2 dy.$$

则$\mu_2\psi(U_2)$是第二组方程的积分因子，其中$\psi(\cdot)$是任意连续函数。

(iv) 选择函数φ和ψ使得$\mu_1\varphi(U_1) = \mu_2\psi(U_2) = \mu$, 则$\mu$为原方程的一个积分因子。

求积分因子的分组方法

例2.6-5 **解方程：**$(y^2+2x^2y)dx+(xy+x^3)dy=0$.

分组：$(y^2dx+xydy)+(2x^2ydx+x^3dy)=0$.

$$\mu_1=\frac{1}{y},\quad U_1=xy,\quad \mu_2=\frac{1}{x},\quad U_2=x^2y.$$

$$\mu=\frac{1}{y}\varphi(xy)=\frac{1}{x}\psi(x^2y).$$

设$\varphi(u)=u^\alpha,\quad \psi(u)=u^\beta$**，确定**$\alpha,\beta$.

求积分因子的分组方法

例2.6-6 **解方程：**$(\frac{y}{x}+3x^2)dx+(1+\frac{1}{y}x^3)dy=0$.

通解： $\frac{(xy)^3}{3}+\frac{(x^3y)^2}{2}=C$

作业

$$\mu_1 = x, \quad U_1 = xy, \quad \mu_2 = y, \quad U_2 = x^3 y.$$

思考题：几种方法（齐次方程、线性方程、恰当方程）的比较及其联系。

作业：

P21: 1(1), 1(4).

P30: 1(1), 1(5), 1(6), 1(7), 2, 3.