§3　解题的灵活性
§4　一阶隐方程

September 29, 2016

类型I: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x} + f(xy)$.

方程化为：$xf(xy)dx = xdy + ydx = d(xy)$.

令$u = xy$，则$\dfrac{du}{dx} = xf(u)$.

例3.1-1 解方程：$\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} + 4x^2y^2 + 1 = 0$.

通解：$y = -\dfrac{1}{2x}tg(x^2 + C)$，$C$为任意常数。

3.1 变量替换

类型II： $\dfrac{dy}{dx} = p(x) + q(x)e^{ay}, a \neq 0$.

令$u = e^{ay}$，则

$$\frac{du}{dx} = ap(x)u + aq(x)u^2.$$

为伯努利方程。

例3.1-2 解方程：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}(x^2 e^y - 1)$.

通解：$y = -\ell n(Cx - x^2)$，C为任意常数。

类型III： $\dfrac{dy}{dx} = xf(ax + b\dfrac{y}{x}) + \dfrac{y}{x}$，其中$a, b$为常数。
（右端函数是x及$\dfrac{y}{x}$的函数。）

令$u = \dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{du}{dx} = f(ax + bu)$.

例3.1-3 解方程：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x^2 + y)^2 + y}{x}$.
方程化为：$\dfrac{dy}{dx} = x(x + \dfrac{y}{x})^2 + \dfrac{y}{x}$.
通解：$y = xtg(x + C) - x^2$，C为任意常数。

3.1 变量替换

类型IV： $\dfrac{dy}{dx} = \ell x\sqrt{ax^4+bx^2+cy}$，其中$a,b,c,\ell$ 都是常数。

方程化为：

$$2\frac{dy}{dx^2} = \ell\sqrt{ax^4+bx^2+cy}$$

令$t=x^2$，则$2\dfrac{dy}{dt} = \ell\sqrt{at^2+bt+cy}$.

再令$u=\sqrt{at^2+bt+cy}$，则有$2u\dfrac{du}{dt} = 2at + \dfrac{c\ell}{2}u + b$.

即$\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2at+\dfrac{c\ell}{2}u+b}{2u}$. （可化为齐次方程）

例3.1-4 解方程：$\dfrac{dy}{dx} = 6x\sqrt{x^4+y}$.

通解：$(\sqrt{x^4+y}-2x^2)^4\cdot(2\sqrt{x^4+y}+x^2) = C$，$C$为任意常数。

3.1 变量替换

类型V： $\dfrac{dy}{dx} = ay^{\ell} + bx^{\frac{\ell}{1-\ell}}$, $\left(\dfrac{dy}{dx} = ay^{\beta} + bx^{\gamma}\right)$

其中a, b, ℓ 都是常数，$ab\ell \neq 0, \ell \neq 1$. $\left(\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\gamma} = 1\right)$

两边除y^{ℓ}，则

$$(1-\ell)\frac{dy^{1-\ell}}{dx} = a + b\frac{x^{\frac{\ell}{1-\ell}}}{y^{\ell}}.$$

令$u = y^{1-\ell}$，则$y = u^{\frac{1}{1-\ell}}$.

方程化为齐次方程：

$$\frac{du}{dx} = \frac{a}{1-\ell} + \frac{b}{1-\ell}\left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{\ell}{\ell-1}}.$$

例3.1-5 解方程：$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}$.

方法一：除y^2，然后令$u = \frac{1}{y}$.

化为齐次方程：$\frac{du}{dx} = 2(\frac{u}{x})^2 - 1$.

方法二（**Riccati**方程）：方程有特解$y = \frac{1}{x}$，作变换$y = u + \frac{1}{x}$.

原方程化为伯努利方程：$\frac{du}{dx} = u^2 + \frac{2}{x}u$.

- **交换x和y的位置:**

例3.2-1 **解方程：** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x + y^2}$.

通解： $x = cy + y^2$.

3.3　改变方程的形式

- **改变方程的形式:**

例3.3-1　　**解方程：** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y + 2}{x + y^2 + 4}$.

方程等价于： $(x - y + 2)dx - (x + y^2 + 4)dy = 0.$**，恰当方程。**

例3.3-2　　**解方程：** $(\ell n x + xy^2)dx + 2x^2 y dy = 0$.

方程化为： $\dfrac{dy^2}{dx} = -\dfrac{\ell n x + xy^2}{x^2} = -\dfrac{1}{x}y^2 - \dfrac{\ell n x}{x^2}.$

§4 一阶隐方程

形式：$F(x,y,y')=0$. 求解思路：化为显式方程

类型I. 解出y：$y=f(x,y')$.

求解步骤：

(i) 令$y'=p$，则$y=f(x,p)$.

(ii) 两边对x求导：$p=f'_x(x,p)+f'_p(x,p)\dfrac{dp}{dx}$.

此为显式方程，若通解为$p=W(x,C)$($x=V(p,C)$)，

或$\phi(x,p,C)=0$，则原方程的解为

$$y=f(x,W(x,C))$$

或参数形式：$y=f(x,t)$, $\phi(x,t,C)=0$，t为参数。

- 求出$p = W(x,C)$，不要代入$y' = p$中以免产生增解，一定要代回到关系式$y = f(x,p)$中。

- **例4-1** 解方程：$(y')^2 - xy' + \frac{1}{2}x^2 - y = 0$.
  通解：$y = \frac{1}{2}x^2 + Cx + C^2, \quad y = \frac{1}{4}x^2$.

§4 一阶隐方程

类型II. 解出x：$x = f(y, y')$.

求解步骤：

(i) 令$y' = p$，则$x = f(y, p)$.

(ii) 两边对x求导：

$$1 = pf'_y(y,p) + f'_p(y,p)\frac{dp}{dx} = pf'_y(y,p) + pf'_p(y,p)\frac{dp}{dy}.$$

化为以y, p为变量的显式方程。

- 或者于$x = f(y, p)$两边直接对y求导，同样有

$$\frac{1}{p} = f'_y(y,p) + f'_p(y,p)\frac{dp}{dy}.$$

例4-2 **解方程：**$(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.

通解：$y = C(x-C)^2, \quad y = \dfrac{4}{27}x^3$.

类型III. 方程不显含y，$F(x, y') = 0$.

可看成x, y'平面的一条曲线，设其有参数表示：

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t).$$

将y用参数t表示：

$$dy = y'dx = \psi(t)\varphi'(t)dt, \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

参数解为：

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C \end{cases}.$$

类型**IV**. 方程不显含x，$F(y,y')=0$.

可看成y,y'平面的一条曲线，设其有参数表示：

$$y=\varphi(t),\quad y'=\psi(t).$$

将x用参数t表示：

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt,\quad x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C.$$

参数解为：

$$\begin{cases} x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C \\ y=\varphi(t) \end{cases}$$

例4-3 **解方程：**$x^3+(y')^3-3xy'=0$.

令$y'=tx$.

通解：
$$\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3}{2}\dfrac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} \end{cases}$$

例4-4 **解方程：**$y^2(y'-1)=(2-y')^2$.

令$2-y'=yt$.

通解：$y=x-\dfrac{1}{x-C}-C.$

类型**V.** $F(x,y,y')=0$.

设曲面有参数方程：

$$x=\varphi(s,t),\quad y=\psi(s,t),\quad y'=k(s,t).$$

$$dx=\frac{\partial\varphi}{\partial s}ds+\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt,\quad dy=\frac{\partial\psi}{\partial s}ds+\frac{\partial\psi}{\partial t}dt.$$

利用关系式：$dy=y'dx$ 可得：

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}-\frac{\partial\varphi}{\partial s}k\right)ds+\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}k\right)dt=0.$$

这是一个关于变量s,t的显式方程。

作业：

P24: 1((1),(5),(8),(9),(12));

P25: 1((2),(5));

P26: 1((3),(7));

P35: 1((1),(8),(9))