4.2 高阶方程的几种可积类型
4.3 里卡蒂(Riccati)方程

October 11, 2016

4.2 高阶方程的几种可积类型

- **类型I** $F(x, y^{(n)}) = 0$.

  若解出$y^{(n)} = f(x)$**，积分**n**次.**

  否则，考虑参数方程形式:

$$x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t).$$

降阶，把$y^{(n-1)}$**用参数**t**表示:**

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)\varphi'(t)dt$$

$$\Rightarrow y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

4.2 高阶方程的几种可积类型

- 降阶，把$y^{(n-2)}$用参数t表示:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \psi_1(t, C_1)\varphi'(t)dt$$

$$\Rightarrow y^{(n-2)} = \int \psi_1(t, C_1)\varphi'(t)dt + C_2 = \psi_2(t, C_1, C_2).$$

$$\cdots$$

$$y = \psi_n(t, C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

- 通解: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi_n(t, C_1, C_2, \cdots, C_n). \end{cases}$

类型II

- **类型II：** $F(x, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$.

  令$z = y^{(n-2)}$**，化为二阶方程：**

$$F(x, z, z', z'') = 0 \tag{1}$$

1. **方程(1)不显含自变量**x**：** $F(z, z', z'') = 0$.

   令$z' = u$**，把方程化为含有变量**z, u**的一阶方程。由于**

$$z'' = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = u\frac{du}{dz}.$$

   方程化为含有变量z**和**u**的隐式形式：** $F(z, u, u\dfrac{du}{dz}) = 0$.

类型II

例4.2-1 解方程：$z''=f(z)$.

- 方法一：令$z'=u$，则

$$z''=\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=u\frac{du}{dz}.$$

方程化为：$u\dfrac{du}{dz}=f(z)$.

- 方程两端乘$2z'$，则有$2z'z''=2f(z)z'$.

$$\frac{dz'^2}{dx}=2f(z)z'.$$

$$dz'^2=2f(z)dz\Rightarrow z'^2=\int 2f(z)dz+C_1.$$

此方程为一阶变量可分离方程.

类型II

- **例4.2-2** 解方程：$a^2y^{(4)} = y''$.

2. 方程**(1)**不显含变量z：$F(x, z', z'') = 0$.

   令$z' = u$，则方程化为一阶方程：$F(x, u, u') = 0$.

类型II

3. 方程(1)中F关于变量z, z', z''是m次齐次函数，即

$$F(x, tz, tz', tz'') = t^m F(x, z, z', z'').$$

令$z' = uz$，则

$$z'' = u'z + uz' = (u' + u^2)z.$$

$$F(x, z, z', z'') = F(x, z, uz, (u' + u^2)z) = z^m F(x, 1, u, u' + u^2).$$

方程化为一阶方程：

$$F(x, 1, u, u' + u^2) = 0$$

类型II

4. **方程(1)中F关于其变量是广义齐次函数，即**

$$F(\lambda x, \lambda^m z, \lambda^{m-1} z', \lambda^{m-2} z'') = \lambda^k F(x, z, z', z'').$$

令$x = e^t$, $z = ue^{mt}$，其中t是新的自变量，$u = u(t)$是新的未知函数，则有

$$z' = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{(m-1)t}(u' + mu),$$

$$z'' = \frac{dz'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{(m-2)t}(u'' + (2m-1)u' + m(m-1)u).$$

方程化为不显含自变量的二阶方程：

$$F(1, u, u' + mu, u'' + (2m-1)u' + m(m-1)u) = 0.$$

类型II

- **例4.2-3**　解方程：$xyy'' - yy' - xy'^2 = 0$.

  左端关于$y, y, , y''$是二次齐次函数，令$y' = yu$. 则$y = 0$, $xu' = u$.

  通解：$y = c_2 e^{c_1 x^2}$.

- **例4.2-4**　解方程：$2x^2yy'' - 6xyy' + 8y^2 - x^4 = 0$.

$$F(tx, t^m y, t^{m-1}y', t^{m-2}y'') = t^{2m}(2x^2yy'' - 6xyy' + 8y^2) - t^4x^4.$$

$$m = 2,\ k = 4.$$

令$x = e^t, \quad y = ue^{2t}$.

方程化为：$2uu'' = 1$.

Riccati方程

- 方程形式：$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$，　$p(x) \neq 0, r(x) \neq 0$.
- 二阶齐次线性方程：$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$.

  令$y' = -uy$，则方程化为Riccati 方程：

$$u' = u^2 - a(x)u + b(x).$$

- 设$x = \varphi(t)$是Riccati方程的一个解，令$y = u + \varphi(x)$.

  则方程化为伯努利方程：

$$u' = p(x)u^2 + (2p(x)\varphi(x) + q(x))u.$$

Riccati方程

- **特殊的Riccati方程：**$y' = y^2 + rx^\alpha$**,** r, α**是实数，**$r \neq 0$**.**
- **伯努利(Daniel Bernoulli, 1700-1782)在1724年证明了：当**

$$\frac{\alpha}{2\alpha+4}$$

是整数或无穷时，可通过有限次变换化为变量可分离方程.

- **刘维尔(Liouville, 1809-1882)在1841年证明了：当**

$$\frac{\alpha}{2\alpha+4}$$

不是整数或无穷时，方程不能用初等方法求解.

- **方程**$y' = y^2 + x$**不能用初等方法求解.**

作业

作业：

P39: 1((1), (5), (6), (9)).

P41: 1((1), (2)).

习题

- **1. P17: 2.　　2. P19: 3.**
- **3. P30: 2.　　4. P30: 3.**
- **5. 解方程:** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos y} + xtgy$.
- **6. 解方程:** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4}{2xy + 2x - 2y - 2}$.
- **7. 解方程:** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^3 + 3xy^2 - 7x}{3x^2y + 2y^3 - 8y}$.
- **8. 解方程:** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x} + \dfrac{1}{2y}tg\dfrac{y^2}{x}$.
- **9. 解方程:** $(5xy - 3y^3)dx + (3x^2 - 7xy^2)dy = 0$.

练习题

1. 设方程$xy' + ay = f(x)$中常数$a > 0$，且$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = b$。证明：方程只有一个解当$x \to 0$时保持有界，并求出这个解的极限。（$a < 0$时如何？）
2. 设$y = \varphi(x)$满足微分不等式
$$y' + a(x)y \leq 0, \quad (x \geq 0).$$
证明：$\varphi(x) \leq \varphi(0)e^{-\int_0^x a(s)ds}$.
3. 解方程：$x^2 + (y')^2 = 1$.
4. 解方程：$xy^2(y')^2 - 2y^3y' + 2xy^2 - x^3 = 0$.