第二章　线性方程

October 18, 2016

§3 齐次线性方程的通解结构

齐次线性方程组：

$$\dot{x} = A(t)x. \qquad (LH)$$

- **引理3.1 （叠加原理）** 若$x = \varphi(t)$和$x = \psi(t)$是齐次方程组（**LH**）的解，则对任意常数C_1, C_2，$x = C_1\varphi(t) + C_2\psi(t)$ 都是（**LH**）的解。
- 若$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$是齐次方程组（**LH**）的解，问含有$n$个任意常数的解

$$x = C_1\varphi_1(t) + \cdots + C_n\varphi_n(t)$$

是否是其通解？

齐次线性方程的通解结构

- **向量组的线性相关性：**

  称向量函数$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_m(t)$在区间$I$上是线性相关的，如果存在不全为零的常数$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$使得

$$\alpha_1\varphi_1(t) + \cdots + \alpha_m\varphi_m(t) \equiv 0, \quad t \in I;$$

  否则，若使上式成立，除非$\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$，则称$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_m(t)$在区间$I$上是线性无关的。

齐次线性方程的通解结构

- 如何判定一组向量函数线性相关?
- 齐次线性方程组n个解线性相关、线性无关的条件?

  （能否转化为数值向量的相关问题？）

齐次线性方程的通解结构

引理3.2　设$t_0 \in I$，$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_m(t)$是区间$I$上方程（**LH**）的$m$个解，则$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_m(t)$在区间$I$上是线性相关的充要条件是向量组$\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \cdots, \varphi_m(t_0)$线性相关。

证明　必要性：显然。

充分性：若$\varphi_1(t_0),\varphi_2(t_0),\cdots,\varphi_m(t_0)$线性相关，则存在不全为零的常数$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$使得

$$\alpha_1\varphi_1(t_0)+\cdots+\alpha_m\varphi_m(t_0)\equiv 0.$$

令$x(t)=\alpha_1\varphi_1(t)+\cdots+\alpha_m\varphi_m(t)$，则$x(t)$是齐次方程的解，且满足$x(t_0)=0$，由初值问题解的唯一性可知$x(t)\equiv 0$，从而$\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_m(t)$线性相关。

通解结构定理

定理3.1 （通解结构定理）

(i) 齐次线性方程组（**LH**）在区间I上有n个线性无关解。

(ii) 如果$\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$是区间$I$的$n$个线性无关解，则含有$n$个任意常数$C_1, \cdots, C_n$的表达式

$$x = C_1\varphi_1(t) + \cdots + C_n\varphi_n(t) \tag{1}$$

是（**LH**）的通解，确切地说，是（**LH**）的全部解的共同表达式。

通解结构定理

证明思路：

(i) **存在性：任意取定一点$t_0 \in I$和n个线性无关的n个n维常向量$\xi_1, \cdots, \xi_n$. 满足$x(t_0) = \xi_i$的解存在并设为$x_i(t)$（定理3.1），$i = 1, 2, \cdots, n$. 则$x_1(t), \cdots, x_n(t)$在I上线性无关（引理3.2）。**

(ii) **需要说明两点：**

(a) 对任意常数$C_1, \cdots, C_n$，$x = C_1\varphi_1(t) + \cdots + C_n\varphi_n(t)$都是方程组（LH）的解（叠加原理）。

(b) 方程组的任意一个解$x(t)$都可以表示成(1)的形式。

通解结构定理

注意到：

(1) **引理3.2** $\Rightarrow \varphi_1(t_0),\cdots,\varphi_n(t_0)$**线性无关，可作为**$\mathbb{R}^n$**空间中的一组基，于是存在常数**$C_1,\cdots,C_n$ **使得**

$$x(t_0)=C_1\varphi_1(t_0)+\cdots+C_n\varphi_n(t_0).$$

(2) **令**$\varphi(t)=C_1\varphi_1(t)+\cdots+C_n\varphi_n(t)$**，则**$\varphi(t)$ **是方程组的解，且满足**$\varphi(t_0)=x(t_0)$**，由初值解的唯一性可推出**

$$x(t)=\varphi(t)=C_1\varphi_1(t)+\cdots+C_n\varphi_n(t).$$

结论得证。

通解结构

- 齐次线性方程组（**LH**）所有解的集合构成一个n维线性空间。
- 齐次线性方程组（**LH**）的任意n个线性无关解$\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$构成解空间的一个基本解组。称

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{pmatrix}.$$

  为方程的一个基本解矩阵。

- 通解可表示为：$x = \Phi(t)C$, C为任意的n维常向量。
- 基本解矩阵$\Phi(t)$ 满足

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t), \quad t \in I, \quad det\Phi(t) \neq 0.$$

Wronski行列式

- 设有n个定义在区间I上的向量函数：

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(t) \end{pmatrix}, \quad \cdots, \varphi_n(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1n}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

定义行列式

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

为这n个向量构成的**Wronski**行列式。

Wronski行列式

(I) n**个数值向量线性相关（无关）与它们构成的Wronski行列式之间的关系？**

线性相关$\Leftrightarrow$ **其Wronski行列式等于零。**

Wronski行列式

(II) n个向量函数线性相关（无关）与它们构成的**Wronski**行列式之间的关系？

n个向量函数线性相关$\Rightarrow$ 其**Wronski**行列式等于零。

n个向量函数构成的**Wronski**行列式等于零是否能推出它们线性相关？

例：$\varphi_1(t)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \varphi_2(t)=\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}$ 线性无关，但其**Wronski**行列式等于零。

Wronski行列式

方程组（**LH**）的n个解线性相关（无关）与它们构成的**Wronski**行列式之间的关系？

- 方程组（**LH**）的n个解线性相关$\Leftrightarrow$ 它们构成的**Wronski**行列式等于零。

  原因：$W(t)=0 \Rightarrow W(t_0)=0 \Rightarrow$ 数值向量$\varphi_1(t_0),\cdots,\varphi_n(t_0)$线性相关$\Rightarrow \varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$线性相关（引理**3.2**）。

- 判定n个解线性无关只需验证这n个解构成的**Wronski**行列式在某一点不等于零。

刘维尔公式

引理3.3 （刘维尔公式） 若$\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$ 是**(LH)**的解，则它们构成的**Wronski**行列式可表示为

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds}, \quad t \in I,$$

其中$t_0 \in I$ 可任意取定，而$trA(s) = a_{11}(s) + \cdots + a_{nn}(s)$.

刘维尔公式

证明：

$$\frac{dW(t)}{dt} = \begin{vmatrix} \varphi'_{11}(t) & \cdots & \varphi'_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi'_{n1}(t) & \cdots & \varphi'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

而

$$\begin{aligned} \varphi'_{11}(t) &= a_{11}(t)\varphi_{11}(t) + a_{12}(t)\varphi_{21}(t) + \cdots + a_{1n}(t)\varphi_{n1}(t) \\ \varphi'_{12}(t) &= a_{11}(t)\varphi_{12}(t) + a_{12}(t)\varphi_{22}(t) + \cdots + a_{1n}(t)\varphi_{n2}(t) \\ \cdots \quad & \cdots \qquad \cdots \\ \varphi'_{1n}(t) &= a_{11}(t)\varphi_{1n}(t) + a_{12}(t)\varphi_{2n}(t) + \cdots + a_{1n}(t)\varphi_{nn}(t) \end{aligned}$$

刘维尔公式

利用行列式的性质有

$$\frac{dW(t)}{dt} = a_{11}(t)W(t) + a_{22}(t)W(t) + \cdots + a_{nn}(t)W(t).$$

从而

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds}.$$

- 若$W(t_0) = 0$，则$W(t) \equiv 0$.

状态转移矩阵

- **两个基本解矩阵之间的关系：**

  设$\Phi_1(t)$和$\Phi_2(t)$是方程组（LH）在区间I上的两个基本解矩阵，则存在非奇异矩阵C，使得

$$\Phi_2(t) = \Phi_1(t)C, \quad t \in I.$$

状态转移矩阵

- 设$\tau \in I$. 若基本解矩阵$\Phi(t)$ 满足初始条件$\Phi(\tau) = E$（E代表单位矩阵），则称$\Phi(t)$为状态转移矩阵（特殊的基本解矩阵），记为$\Psi(t, \tau)$，满足$\Psi(\tau, \tau) = E$.
- 由任意基本解矩阵$\Phi(t)$可构造状态转移矩阵：

$$\Psi(t, \tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau).$$

原因：$\Psi(t, \tau) = \Phi(t)C$，确定C.

状态转移矩阵

1. 状态转移矩阵$\Psi(t,\tau)$与基本解矩阵$\Phi(t)$ 的选取无关。（初值唯一性），即对任意的基本解矩阵$\Phi_1(t)$和$\Phi_2(t)$有

$$\Phi_1(t)\Phi_1^{-1}(\tau)=\Phi_2(t)\Phi_2^{-1}(\tau).$$

2. $\Psi(t,\tau)$是矩阵方程$\dfrac{dY}{dt}=A(t)Y$满足初始条件$Y(\tau)=E$的唯一解。$\Psi(\tau,\tau)=E$.

状态转移矩阵

3. 对任意的$t, \tau \in I$，$\Psi(t,\tau) = \Psi(t,\sigma)\Psi(\sigma,\tau)$。（利用唯一性：取$t=\sigma$）
4. 对任意的$t, \tau \in I$，$\Psi(t,\tau)$是非奇异的，并且$\Psi^{-1}(t,\tau) = \Psi(\tau,t)$。
5. 初值问题:
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)x \\ x(\tau) = \xi \end{cases}$$
的解可表示为$x(t,\tau,\xi) = \Psi(t,\tau)\xi$（利用$x(t,\tau,\xi) = \Psi(t,\tau)C$，确定向量$C$）。

作业

P50：1, 2, 3, 5.