

电源系统的控制器设计

王涵

数学科学学院
Peking University

December 13, 2005

问题描述

在设计一个输出功率为 P 的发电厂励磁控制系统时，通常采用一个单机无穷母线系统^{图1}。目标是设计一个反馈控制器，利用它的输出 $u(t)$ 调节励磁电压，使发电机的端电压 V_{term} 保持期望值 V_{ref} 。在本问题中，电机模型包含了亚暂态效应，场电压调节器则是一个固体整流器。描述电机状态的参量包括其转角 δ ，转速 ω 及电机直轴磁通和交轴磁通 E'_q 、 Ψ_{ld} 、 E'_d 、 Ψ_{lq} 。转角 δ 用弧度表示，电机速度和磁通分别用相对于同步速度和额定电压的标准百分书表示，调节器选取状态变量 V_R 进行建模。

数学模型

在特定的工作条件下，线性化的系统模型由下式给出：

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$y = Cx \quad (2)$$

其中，

$$x = (\delta, \omega, E'_q, \psi_{ld}, E'_d, \psi_{lq}, V_R)^T$$

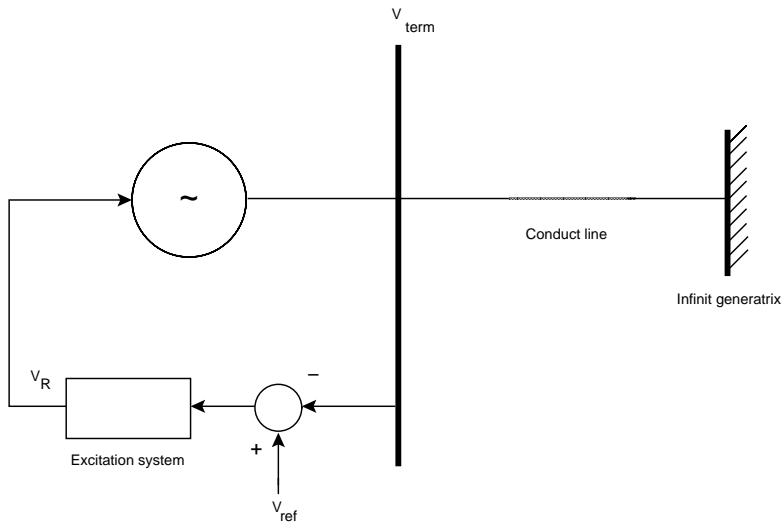
$$y = (V_{\text{term}}, \omega, P)^T$$

$A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 377 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.246 & -1.56 & -0.137 & -0.123 & -0.124 & -0.0546 & 0 \\ 0.109 & 0.262 & -2.17 & 2.30 & -0.0171 & -0.0753 & 1.270 \\ -4.58 & 0 & 30.0 & -34.3 & 0 & 0 & 0 \\ -0.161 & 0 & 0 & 0 & -8.44 & 6.33 & 0 \\ -1.70 & 0 & 0 & 0 & 15.2 & -21.5 & 0 \\ -33.9 & -23.1 & 6.86 & -59.5 & 1.50 & 6.63 & -114 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17.6 \end{pmatrix}^T$$

$$C = \begin{pmatrix} -0.123 & 1.05 & 0.230 & 0.207 & -0.105 & -0.460 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.42 & 0.90 & 0.787 & 0.708 & 0.0713 & 0.314 & 0 \end{pmatrix}$$



将状态空间模型转化为传递函数模型

上一节中，问题是用状态空间模型来描述的。为了便于推导，我们将状态空间模型转化为传递函数模型，如图。我们的目标是设计控制器 $G_c(s)$ ，使得端电压 V_{term} 满足一定的性能指标。

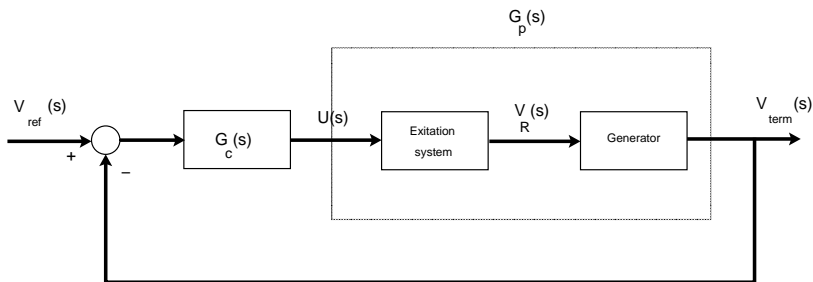


Figure: 励磁控制系统

由状态空间模型：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

我们不难得到传递函数具有如下形式：

$$\begin{aligned}G_p(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \frac{\alpha_5 s^5 + \alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^7 + \beta_6 s^6 + \beta_5 s^5 + \beta_4 s^4 + \beta_3 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}\end{aligned}$$

其中 $\alpha_5 \neq 0$, α_i, β_i 的具体值我们可以不关心。 $G_p(s)$ 是一个次数较高的有理多项式。

控制器设计目标

设计一个 PI 控制器，满足性能指标：

控制器设计目标

设计一个 PI 控制器，满足性能指标：

- ▶ 超调量不应超过 15%

控制器设计目标

设计一个 PI 控制器，满足性能指标：

- ▶ 超调量不应超过 15%
- ▶ 上升时间不应超过 0.5s

控制器设计目标

设计一个 PI 控制器，满足性能指标：

- ▶ 超调量不应超过 15%
- ▶ 上升时间不应超过 0.5s
- ▶ 2% 调节时间不应超过 5s

设计实施

我们设 PID 控制器为

$$G_c(s) = P \left[\frac{Ds^2 + s + I}{s} \right]$$

那么反馈系统就有传递函数

$$G(s) = \frac{V_{\text{term}}(s)}{V_{\text{ref}}(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

对于阶跃输入 $1/s$ 就有

$$V_{\text{term}}(s) = \frac{G(s)}{s}$$

那么如何确定 PI 控制器中的参数 P , I 使得 $V_{\text{term}}(s)$ 满足设计性能指标呢？可以考虑如下两条思路。

那么如何确定 PI 控制器中的参数 P , I 使得 $V_{\text{term}}(s)$ 满足设计性能指标呢？可以考虑如下两条思路。

1. 对 $V_{\text{term}}(s)$ 进行 Laplace 反变换，得到 $V_{\text{term}}(t)$ 的精确表达式，再根据性能指标确定参数。

那么如何确定 PI 控制器中的参数 P , I 使得 $V_{\text{term}}(s)$ 满足设计性能指标呢？可以考虑如下两条思路。

1. 对 $V_{\text{term}}(s)$ 进行 Laplace 反变换，得到 $V_{\text{term}}(t)$ 的精确表达式，再根据性能指标确定参数。
2. 使用 Matlab 工具进行经验设计。

思路1—Laplace 反变换

由于 $V_{\text{term}}(s)$ 是系数为实数的分式，根据实系数分式的准素分式分解理论（见文献[4]），

$$V_{\text{term}}(s) = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{b_{ij}}{(s - a_i)^j} + \sum_{i=1}^{r_2} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{c_{ij}s + d_{ij}}{(s^2 + p_i s + q_i)^j}$$

其中， r_1 是实极点的个数， m_i 是第 i 个实极点的阶数。 r_2 是共轭复极点对的个数， n_i 是第 i 个共轭复极点对的阶数。显然，查表可得

$$\frac{b_{ij}}{(s - a_i)^j}, \quad \frac{c_{ij}s + d_{ij}}{(s^2 + p_i s + q_i)^j}$$

的 Laplace 反变换。

思路1的缺点

要想得到准素分式分解就需要求 $V_{\text{term}}(s)$ 的所有实复极点。对于本问题，由于分母的多项式阶数过高，是不现实的。但是这启示我们，对于分母阶数小于等于4的传递函数，（由于4阶多项式能用公式求零点）就能用这个思路解决。

思路2—基于Matlab的经验设计

我们可以事先估计参数 P , I 的取值范围, 然后对 P , I 进行穷举, 选取符合要求的参数。以下是一段Matlab程序:

```
DD=0; pi=[]; count=0;
for P=20:0.2:40
    for I=0:0.2:2
        Gc=tf(P*[DD 1 I],[1 0]);
        T=feedback(Gc*G,1);
        t=[0:0.01:10];
        y=step(T,t);
        [maxi,time,raisetime]=statustf(t,y,1);
        if maxi < 1.15 & raisetime < 0.5 & time < 5
            count=count+1;
            pi(count,:)= [P I];
        end
    end
end
end
```

对于 P , I 的取值范围, 可以按照这样的思路来调整。

对于 P , I 的取值范围, 可以按照这样的思路来调整。

1. 先确定一个粗糙的范围, 进行穷举。

对于 P, I 的取值范围, 可以按照这样的思路来调整。

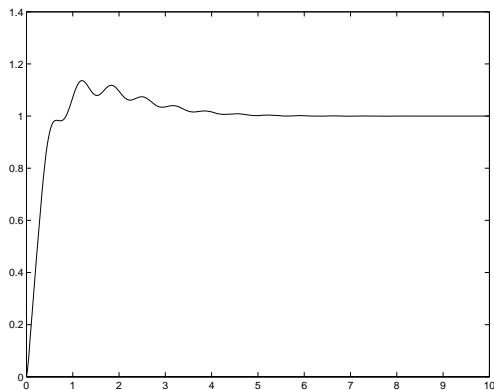
1. 先确定一个粗糙的范围，进行穷举。
2. 如果按粗糙的范围穷举没有结果，则放宽性能指标，直到穷举能产生结果。
3. 按第 2 步产生的结果调整参数取值范围。

对于 P , I 的取值范围, 可以按照这样的思路来调整。

1. 先确定一个粗糙的范围, 进行穷举。
2. 如果按粗糙的范围穷举没有结果, 则放宽性能指标, 直到穷举能产生结果。
3. 按第 2 步产生的结果调整参数取值范围。
4. 转第 1 步, 以此不断重复, 直至取得符合性能指标的结果。

结果

我们共通过前面的程序，我们总共找到了 134 组符合性能指标要求的 P , I 值。其中，我们考察 $P = 35$, $I = 0.8$ 。



$P = 35$, $I = 0.8$ 控制器的性能指标

性能指标为：

- ▶ 超调量： 13.6%
- ▶ 上升时间： 0.401s
- ▶ 2% 调节时间： 3.48s

我们设计的控制器完全符合要求。

思路2的缺点

思路2的缺点

- ▶ 完全基于设计者的经验，对于不同的问题，这种方法缺乏通用性。

思路2的缺点

- ▶ 完全基于设计者的经验，对于不同的问题，这种方法缺乏通用性。
- ▶ 无法求得“最优”的解，比如我们要求超调量和调节时间的积达到极小，应该怎么求？

一组新的性能指标

$$I_1 = \int_0^T |V_{\text{term}}(t) - V_{\text{ref}}(t)| dt$$

$$I_2 = \int_0^T [V_{\text{term}}(t) - V_{\text{ref}}(t)]^2 dt$$

$$I_3 = \int_0^T t |V_{\text{term}}(t) - V_{\text{ref}}(t)| dt$$

$$I_4 = \int_0^T t [V_{\text{term}}(t) - V_{\text{ref}}(t)]^2 dt$$

这些性能指标反映了 $V_{\text{term}}(t)$ 和 $V_{\text{ref}}(t)$ 的某种逼近程度。可以通过求这些性能指标的极小值来得到某种意义下的“最优”解。

设计实施

同样我们认为设计的控制器是一个 PID 控制器：

$$G_c(s, P, I, D) = P \left[\frac{Ds^2 + s + I}{s} \right]$$

这里我们把 P , I , D 看作变量。

$$G(s, P, I, D) = \frac{G_c(s, P, I, D)G_p(s)}{1 + G_c(s, P, I, D)G_p(s)}$$

对于阶跃输入 $1/s$ 就有

$$V_{\text{term}}(s, P, I, D) = \frac{G(s, P, I, D)}{s}$$

- 与传递函数 $G(s, P, I, D)$ 相应的状态空间模型为：

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{dt} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}\tilde{u}\end{aligned}$$

此常微分方程组可以数值求解。

- ▶ 与传递函数 $G(s, P, I, D)$ 相应的状态空间模型为：

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{dt} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}\tilde{u}\end{aligned}$$

此常微分方程组可以数值求解。

- ▶ 另外，我们可以使用 Matlab 函数 `step()` 来获得 $G(s, P, I, D)$ 对阶跃输入的一组离散响应，效果和数值求解常微分方程组是一样的。

设得到一组离散输出为 $\{V_{\text{term}}(t_i, P, I, D) | i = 0, \dots, n\}$ 。考虑性能指标

$$I_2(P, I, D) = \int_0^T [V_{\text{term}}(t, P, I, D) - V_{\text{ref}}(t)]^2 dt$$

$e(t) = [V_{\text{term}}(t, P, I, D) - V_{\text{ref}}(t)]^2$ 可以用数值积分公式 Simpson 数值计算 $I_2(P, I, D)$:

$$\hat{I}_2(P, I, D) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t_{i+1} - t_i}{6} [e(t_i) + 4e(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}) + e(t_{i+1})]$$

其中 $t_0 = 0, t_n = T$

我们求

$$\min \hat{l}_2(P, I, D)$$

来代替

$$\min l_2(P, I, D)$$

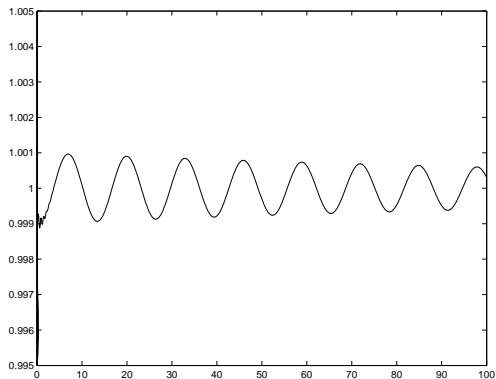
这是一个无约束优化问题，我采用信赖域型方法 **Levenberg-Marquardt** 进行数值求解（程序自己编制）。

- ▶ 终止条件为 $\|\nabla \hat{l}_2\|_2 < 10^{-6}$ 。
- ▶ 初始点为 $(P_0, I_0, D_0)^T = (29.2, 0.8, 1)^T$ 。

数值结果

$$(P^*, I^*, D^*)^T = (133.9870, 22.7463, 97.0977)^T$$

$$\hat{l}_2(P^*, I^*, D^*) = 5.0280e - 005$$



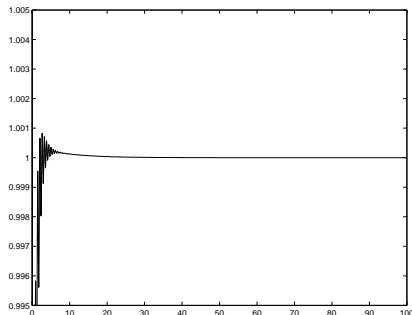
考虑问题

$$\min \hat{l}_4(P, I, D)$$

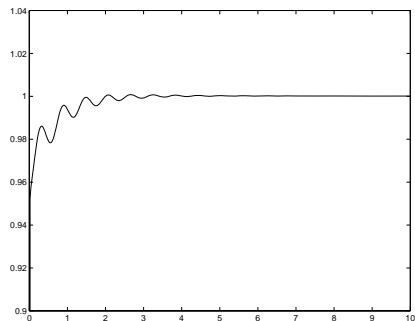
解得：

$$(P^*, I^*, D^*)^T = (564.4554, 0.1126, 0.5239)^T$$

$$\hat{l}_4(P^*, I^*, D^*) = 1.4920e - 004$$



局部放大:



约束问题

如果由于实际问题的需要，参数 P, I, D 需要控制在某个范围之内，这时问题为：

$$\begin{aligned} & \min l_2(P, I, D) \\ \text{s.t. } & \begin{cases} P_1 \leq P \leq P_2 \\ I_1 \leq I \leq I_2 \\ D_1 \leq D \leq D_2 \end{cases} \end{aligned}$$

这是一个约束优化问题，Matlab 中也有现成的程序求解。

参考文献

1. Dean K. Frderick and Joe H. Chow, Feedback Control Problems: Using MATLAB and the Control System Toolbox, 张彦斌 译, 西安交通大学出版社, 2001
2. Modern Control System, Richard C. Dorf and Robert H. Bishop, 谢卫红等 译, 邹逢兴 审校, 高等教育出版社, 2001
3. 丁同仁 李承治, 常微分方程教程, 高等教育出版社, 2003
4. 蓝以中, 高等代数简明教程, 北京大学出版社, 2002
5. 方水良, 现代控制理论及其 MATLAB 实践, 浙江大学出版社, 2005