从牛顿力学推导开普勒三定律

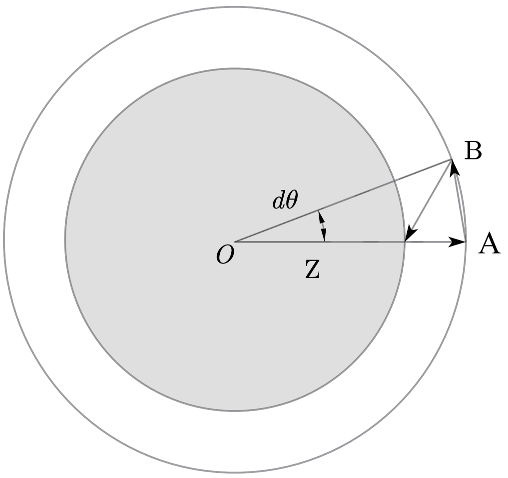
李嘉

2022年11月2日

开普勒第一定律: 每一行星沿一个椭圆轨道环绕太阳, 而太阳则处在椭圆的一个焦点上
开普勒第二定律: 从太阳到行星所连接的直线在相等时间内扫过同等的面积
开普勒第三定律: 所有行星的椭圆轨道的半长轴的三次方跟公转周期的二次方的比值都相等

首先, 可以建立以质量为M的质点为原点的极坐标系, 由牛顿万有引力定律知该系中质量为m, M至m径矢为$\mathbf{r}$的质点受引力

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} \tag{1}$$



由 $\mathrm{dW_{ZA}} + \mathrm{dW_{AB}} + \mathrm{dW_{BZ}} = 0$ 可知有心力万有引力是保守力, 因此可以得到相应势能的概念:

$$E_{\text{引力势能}} = \int_r^{+\infty} -\frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r = -\frac{GMm}{r} \tag{2}$$

不难发现, 每一个$\mathrm{d}t$时间内, 质点M与m的径矢$\mathbf{r}$扫过的面积为

$$\mathrm{dS} = |\mathrm{d}\mathbf{S}| = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\mathrm{d}t| \tag{3}$$

故单位时间内扫过的面积定义为面积速度

$$\kappa=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}|\mathbf{r}\times\mathbf{v}| \tag{4}$$

或

$$\boldsymbol{\kappa}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{S}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{v} \tag{5}$$

类比p与v的关系，引入动力学量角动量

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}=\mathbf{r}\times\mathbf{p} \tag{6}$$

则κ与质点m在惯性系中相对M的角动量L的关系为

$$\kappa=\frac{|\mathbf{L}|}{2m}=\frac{|L|}{2m} \tag{7}$$

将牛顿第二定律

$$\mathbf{F}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}+m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \tag{8}$$

（因$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0$）代入$L$关于$t$的导数中

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{p}+\mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{v}\times m\mathbf{v}+\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{r}\times\mathbf{F} \tag{9}$$

质点m相对于M的力矩

$$\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} \tag{10}$$

即为角动量定理.

再回到问题本身，质量分别为m和M的行星与恒星，可以忽略自转将参考系变为恒星质心参考系，并且视为系统合外力

$$F_{外}=0 \tag{11}$$

而

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=|\mathbf{M}_{内}+\mathbf{M}_{外}|=|\mathbf{r}\times\mathbf{F}|=rF\sin\pi=0 \tag{12}$$

故z方向(垂直于纸面射出)系统角动量守恒

$$mv_\theta r=mv_{近}r_{近}=L(常量) \tag{13}$$

由于行星不受非保守力的作用，因此机械能守恒

$$\frac{1}{2}m\left(v_\theta^2+v_r^2\right)-\frac{GMm}{r}=E\ (常量) \tag{14}$$

$E_\mathrm{k}=\frac{1}{2}mv^2$由牛顿第二定律导出，此处不再证明. $v^2=v_\theta^2+v_r^2$，v_r是速度径向分量，v_θ是速度横向分量.

$$v_\theta=r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r\frac{v_r}{v_\theta} \tag{15}$$

将(13)代入(14)解出

$$v_\theta = \frac{L}{mr}$$

$$v_r = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2}} \tag{16}$$

为求出行星在恒星质心参考系下的运动轨道方程（极坐标方程）, 亦$r-\theta$函数, 则需对下式积分

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{mr^2}{L}\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2}}$$

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2Em}{L^2} + \frac{2GMm^2}{L^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}}} = -\frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2\left(\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}+1\right) - \left(\frac{1}{\mathrm{r}} - \frac{GMm^2}{L^2}\right)^2}}$$

令

$$f = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{GMm^2}{L^2}$$

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}$$

$$\mathrm{d}\theta = -\frac{\mathrm{d}f}{\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)^2 - f^2}} \Rightarrow \theta - 0 = \arccos\left(\frac{p}{\varepsilon}f\right) \Rightarrow r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta} \tag{17}$$

此式便是行星m极坐标形式的轨道方程.

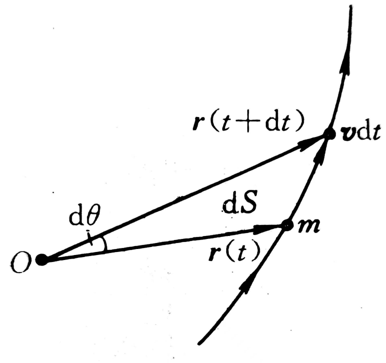
由解析几何知识可知, $\varepsilon = e = \frac{c}{a}$ 是离心率, 而$p = \frac{b^2}{a}, a, b, c$分别是半长轴、半短轴和半焦距.

- 当$\varepsilon > 1$时, 轨道曲线为焦点在恒星质心处, $E_{\text{机械能}} > 0$的双曲线的一支;
- 当$\varepsilon = 1$时, 为焦点在恒星质心处, $E_{\text{机械能}} = 0$ (恰能到无限远)的抛物线;
- 当$\varepsilon \in (0,1)$ 时, 为焦点在恒星质心处, $E_{\text{机械能}} < 0$ 的椭圆;
- 当$\varepsilon = 0$时, 是围绕恒星质心的圆轨道.

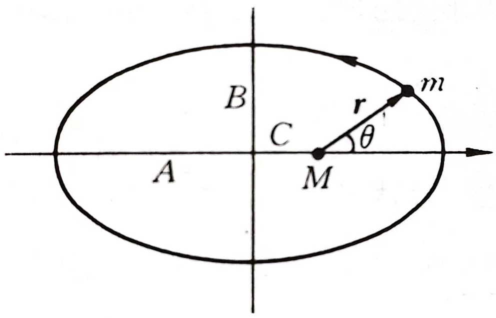
开普勒第一定律以及行星运行的椭圆轨道是牛顿力学体系下的一个特例得证.

接下来证明开普勒第二定律,

由(7)知, $\kappa \propto L$, 因此 "$\kappa = \mathrm{Const}$" $\Leftrightarrow$ "$L = \mathrm{Const}$", 而(12)证明该系统角动量守恒, 故开普勒第二定律得证.



关于开普勒第三定律的证明, 我想到两种证明方法. 一种是接上述证明, 利用轨道方程的数学特征和面积速度κ与角动量L的关系式配合第二定律的结论, 另一种是列出机械能守恒式和角动量守恒式求得顶点处速度（垂直于径矢）, 再配合第二定律结论.



方法一：

轨道方程(17)中参量

$$p=\frac{B^2}{A}=\frac{L^2}{GMm^2} \tag{18}$$

椭圆面积

$$\mathrm{S}=\pi AB$$

行星公转周期

$$T=\frac{\pi \mathrm{AB}}{\kappa} \tag{19}$$

代入(7)得

$$L=\frac{2m\pi \mathrm{AB}}{T} \tag{20}$$

(18)与(20)联立得

$$\frac{A^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2} \tag{21}$$

方法二：

角动量守恒

$$mv_{近}(A-C)=mv_{远}(A+C) \tag{22}$$

机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_{近}^2-\frac{GMm}{A-C}=\frac{1}{2}mv_{远}^2-\frac{GMm}{A+C} \tag{23}$$

(22)与(23)代入

$$T=\frac{\pi \mathrm{AB}}{\kappa}$$

得

$$\frac{A^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}$$

上述两种证明第三定律的方法本质上并无不同, 都是利用“椭圆面积/面积速度=周期”的思路, 但在消去L时所用式子中, 前者利用了轨道方程的数学特点, 后者运用机械能守恒计算而得, 但为了证明的简洁性, 后者选择机械能守恒消去L, 也就意味着必须利用椭圆轨道的几何性质选择特殊点（顶点）求解.

至此“开普勒三大定律”以及“开普勒第一定律中关于行星运行的椭圆轨道是牛顿力学体系下的一个特例”的问题已经全部基于牛顿第二定律和牛顿万有引力定律证完.

关于本文

本文系学生原创, 并在原先纸质版证明的基础上，有所删减和增补。为了使阅读更方便特意将重点加粗，重要概念上色，尽可能体现出层次感和逻辑感，并添加了本人的一些见解。文中如有不恰当或错误之处，恳请莫教授指出，非常感谢莫教授。

在此学生很希望能与莫教授交流，向您学习；并希望能和北大保持联系，期望在未来两年中可以获得北大认可，有一天也能成为一名优秀、渊博、坦荡的科学工作者。

望您身体健康，工作顺利，万事顺遂。

李嘉

天津一中

2022年11月2日夜