高等数学公式

目录

1 公式大全

1.1 极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & n=m\\ 0 & n<m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\\
&\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\\
&\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}(a>0)=1\\
&\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\\
&\lim_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}\\
&\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}\\
&\lim_{x\to\infty}\operatorname{arccot} x=0\\
&\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi\\
&\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0\\
&\lim_{x\to+\infty}e^{x}=\infty\\
&\lim_{x\to 0^{+}}x^{x}=1
\end{aligned}
$$

1.2 常用等价无穷小关系

$$
\begin{aligned}
&\sin x\sim x\tan x\sim x\arcsin x\sim x\arctan x\sim x1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}\\
&\ln(1+x)\sim xe^{x}-1\sim xa^{x}-1\sim x\ln a(1+x)^{\partial}-1\sim\partial x
\end{aligned}
$$

1.3 导数的四则运算

$$
\begin{aligned}
&(u\pm v)'=u'\pm v'\\
&(uv)'=u'v+uv'\\
&\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^{2}}
\end{aligned}
$$

1.4 基本导数公式

$$
\begin{aligned}
&y = c \quad y' = 0 \\
&y = x \quad y' = 1 \\
&y = x^{\mu} \quad y' = \mu x^{\mu-1} \\
&y = \frac{1}{x} \quad y' = -\frac{1}{x^2} \\
&y = \sqrt{x} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&y = a^x \quad y' = a^x \cdot \ln a \\
&y = e^x \quad y' = e^x \\
&y = \log_a x \quad y' = \frac{\log_a e}{x} \\
&y = \ln x \quad y' = \frac{1}{x} \\
&y = \sin x \quad y' = \cos x \\
&y = \cos x \quad y' = -\sin x \\
&y = \operatorname{tg} x \quad y' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\
&y = \operatorname{ctg} x \quad y' = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x} \\
&y = \arcsin x \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&y = \arccos x \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&y = \operatorname{arctg} x \quad y' = \frac{1}{1+x^2} \\
&y = \operatorname{arcctg} x \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

1.5 积分

1.5.1 含有$a + bx$的积分公式

$$\int \frac{1}{a+bx} dx = \frac{1}{b} \ln |a+bx| + C$$

$$\int \frac{x}{a+bx} dx = \frac{1}{b^2}(a + bx - a \ln |a+bx|) + C$$

$$\int \frac{x^2}{a+bx}dx = \frac{1}{2b^3}\left((a+bx)^2 - 4a(a+bx) + 2a^2\ln|a+bx|\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x(a+bx)}dx = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2(a+bx)}dx = \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| - \frac{1}{ax} + C$$

1.5.2 含有$\sqrt{a+bx}$的积分公式

$$\int x\sqrt{a+bx}dx = \frac{2}{15b^2}(3bx-2a)(a+bx)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx}dx = \frac{2}{105b^3}\left(15b^2x^2 - 12abx + 8a^2\right)(a+bx)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int x^n\sqrt{a+bx}dx = \frac{2}{b(2n+3)}x^n(a+bx)^{\frac{3}{2}} - \frac{2na}{b(2n+3)}\int x^{n-1}\sqrt{a+bx}dx$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}dx = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}dx$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^n}dx = -\frac{1}{a(n-1)}\frac{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{x^{n-1}} - \frac{(2n-5)b}{2a(n-1)}\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^{n-1}}dx, n \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right| + C, a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}}\arctan\sqrt{-\frac{a+bx}{a}} + C, a < 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^n\sqrt{a+bx}}dx = \frac{-1}{a(n-1)}\frac{\sqrt{a+bx}}{x^{n-1}} - \frac{(2n-3)b}{2a(n-1)}\int \frac{1}{x^{n-1}}\sqrt{a+bx}dx, n \neq 1$$

1.5.3 含有$x^2 \pm a^2$的积分

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\arctan\frac{x}{a}}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\pm x^2 \mp a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln\left|\frac{x\mp a}{\pm x+a}\right|}{2a} + C$$

1.5.4 含有$ax^2+b(a>0)$的积分

$$\int \frac{1}{ax^2+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{b}} + C$$

1.5.5 含有三角函数的积分

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int -\sin x \, \mathrm{d}x = \cos x + C$$

$$\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int -\csc^2 x \, \mathrm{d}x = \cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$\int -\csc x \cot x \, \mathrm{d}x = \csc x + C$$

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x \, \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x \, \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x \, \mathrm{d}x = -\ln|\csc x + \cot x| + C = \ln\left|\frac{\tan x - \sin x}{\sin x \tan x}\right| + C$$

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx + C \quad \forall n \geq 2$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx + C \quad \forall n \geq 2$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx + C \quad \forall n \geq 2$$

$$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$$

$$\int \cot^n x dx = \frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx + C \quad \forall n \geq 2$$

$$\int \cot^n x dx = \frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx + C \quad \forall n \geq 2$$

$$\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C$$

$$\int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x dx + C \quad \forall n \geq 2$$
$$\int \csc^n x dx = -\frac{1}{n-1}\csc^{n-2} x \cot x + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x dx + C \quad \forall n \geq 2$$

2 二阶常系数线性齐次微分方程

二阶常系数齐次微分方程形式如下

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$

注意到指数函数 $y = \mathrm{e}^{rx}$ 第 n 阶导数为 $r^n\mathrm{e}^{rx}$，不妨尝试把指数函数代入方程，得

$$(ar^2 + br + c)\mathrm{e}^{rx} = 0 \tag{2}$$

由于 $\mathrm{e}^{rx} \neq 0$，必有 $ar^2 + br + c = 0$．把这个二次函数叫做特征方程，解特征方程，就可以得到方程的解．根据根的分布，有如下四种情况

有两个不同的实根 r_1 和 $r_2(b^2 - 4ac > 0)$，方程的通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^{r_1x} + C_2\mathrm{e}^{r_2x} \tag{3}$$

有一个重根 $r(b^2 - 4ac = 0)$，方程的通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^{rx} + C_2x\mathrm{e}^{rx} \tag{4}$$

有两个纯虚数根 $\pm\mathrm{i}\omega_0 \quad (b = 0, b^2 - 4ac < 0)$

$$y = C_1\cos(\omega_0x) + C_2\sin(\omega_0x) \tag{5}$$

或

$$y = C_1\cos(\omega_0x + C_2) \tag{6}$$

其中 $\omega_0 = \sqrt{c/a}$.

有两个复数根 $r \pm \mathrm{i}\omega$ $b \neq 0$, $b^2 - 4ac$

$$y = \mathrm{e}^{rx}[C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)] \tag{7}$$

或

$$y = C_1 \mathrm{e}^{rx} \cos(\omega x + C_2) \tag{8}$$

其中

$$r = -\frac{b}{2a} \qquad \omega = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2} \tag{9}$$

应用常微分方程解的存在唯一性定理，即皮卡-林德勒夫定理, 我们可以确认：方程 (1) 的通解一定是上面四种情况之一.

1. 详细推导

情况 1 的结论是显然的，我们先来看情况 3．根据 $y = C\mathrm{e}^{rx}$ 的假设，通解应该是

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} \tag{10}$$

如果这里的 C_1 和 C_2 取任意复数，那么上式就是方程在复数域的通解，其中包含了实数域的通解．这个通解还有另一种等效的形式，令

$$C_1 = \frac{C_3}{2} + \frac{C_4}{2\mathrm{i}} \qquad C_2 = \frac{C_3}{2} - \frac{C_4}{2\mathrm{i}} \tag{11}$$

代入上式得

$$\begin{aligned} y &= C_3 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2} + C_4 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2\mathrm{i}} \\ &= C_3 \cos(\omega x) + C_4 \sin(\omega x) \end{aligned} \tag{12}$$

注意如果 C_3, C_4 取任意复数，该式仍然是复数域的通解(因为任何 C_1, C_2 都可以找到对应的 C_3, C_4)，但只要把 C_3, C_4 限制在实数域中，该式就是实数域的通解.

情况 4 的结论可以类比情况 3 得出，最后我们来看情况 2．我们可以把情况 2 看做情况 4 的一个极限，即 $\omega \to 0$ 时的情况．如果式 7 中的 C_1, C_2 都是普通常数，则取该极限时可以得到式 4 的第一项 $C_1\mathrm{e}^{rx}$．那如何得到第二项呢？我们不妨令式 7 中的 $C_1 = 0$，$C_2 = C_3/\omega$，再来取极限，得

$$\lim_{\omega \to 0} C_3 \mathrm{e}^{rx} \frac{\sin(\omega x)}{\omega x} x = C_3 x \mathrm{e}^{rx} \tag{13}$$

这里用到了“小角正弦值极限” 中的结论.

编辑整理：mfy

2022年6月25日