生物医学信号处理的目的和任务

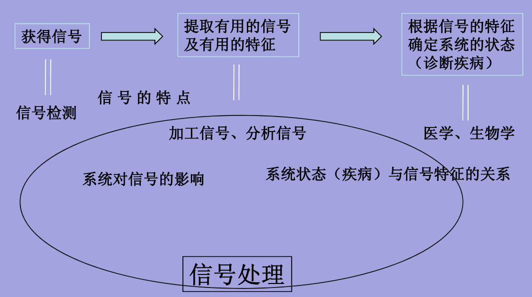
生物医学信号处理的目的在于，

- 有效地分析来自系统的信号，正确地提取信号特征，
- 寻求信号特征与系统状态的关系，
- 从分析信号的特征确定系统的状态（正常、病理），

以达到作出准确的医学决策的目的。

因此医学信号处理的重点不在于实时传输，而在于时、频域特征提取，以便作出正确的状态辨识（正常、大致正常、异常、严重异常等）。

来整理一下，要达到上述目的我们需要了解、学习掌握哪些东西？



第二讲　信号与系统的描述

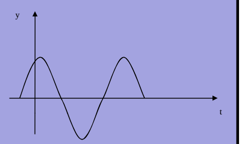
要对信号进行处理，必须先要搞清楚信号和系统怎样描述

信号的描述

一、描述

1、数学表达式 y=x(t)，　y=sint

2、波形



二、分类（不同角度）

1、确定性信号与随机信号

确定性信号：预先知道它的变化规律，是时间t的确定函数。如正弦信号、方波、三角波。

随机信号：不能预知它随时间变化的规律，不能用确切的时间函数来表达。如噪声、分子运动。

BACK

*说明：

(1) 在实际传输的信号都是随机信号。

- 在信号传输过程中，受到干扰噪声影响；
- 若信号是一确定性信号，失去传输意义。

(2) 对随机信号的研究比较复杂，但对其中一些能够知道它的统计特性。在一些特定的条件下，随机信号会表现出某种确定性，近似为确定性信号来处理。

(3) 确定性信号：理论上的抽样。本课程研究确定性信号。

2、周期信号与非周期信号

- 周期信号：依一定时间间隔周而复始，无始无终信号。
  f(t)=f(t + nT)　　n=0, ±1,　±2 (任意整数)
  T：满足此关系时的最小T值。
- 非周期信号：波形不重复，不具有周而复始的特性。
  T→∞　变成非周期信号

例：判断下列信号是否周期函数，是周期函数，确定周期。

1、　$x(t)=2\cos(3t+\frac{\pi}{4})$

注：所求信号为不同周期信号的叠加，取其最小公倍数。若有一个为非周期则为非周期。

$$T=\frac{2}{3}\pi$$

2、 $x(n)=e^{j(\frac{n}{8}-\pi)}$

解:

$$e^{j(\frac{1}{8}n-\pi)}=e^{j[\frac{1}{8}(n+N)-\pi]}$$

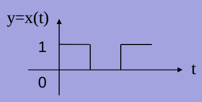
$$\frac{N}{8}=2\pi k$$

由于π为无理数。任何整数k都不能满足上式。
所以x(n)为非周期函数。

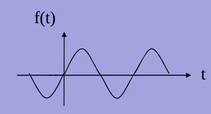
3、连续时间信号与离散时间信号

- 连续时间信号：自变量连续可变，除若干个不连续点外，在任何时刻均有定义。
- 离散信号：在时间上是离散的，只在某些不连续的规定瞬间时给出函数值。在其它时间无定义。

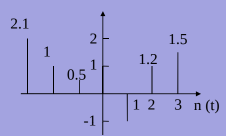
说明：①连续信号与离散信号是按时间t来区别与幅值无关。



时间连续，幅值离散0. 1

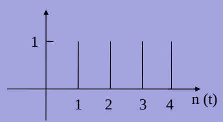


时间连续，幅值连续[−1 1]任意数值



时间离散，幅值连续

（抽样信号）



时间离散，幅值离散 0.1

（数字信号）

②连续信号经过抽样变成抽样信号，再经过量化、编码转化为数字信号。

③离散信号函数表达形式

时间间隔可以均匀，也可不均匀。一般采用均匀间隔。自变量t可用整数序号n表示。离散时间信号是一组序列值的集合。

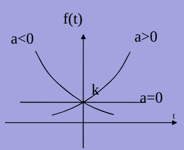
$$x(n)=\begin{cases}2.1 & n=-3\\ 1 & n=-2\\ 0.5 & n=-1\\ 1 & n=0\\ -1 & n=1\\ 1.2 & n=2\\ 1.5 & n=3\end{cases}$$

$$x(n)=\{2.1\ \ 1\ \ 0.5\ \ \underset{\uparrow}{1}\ \ -1\ \ 1.2\ \ 1.5\}$$

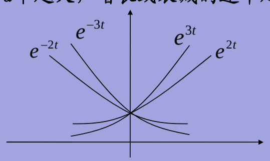
三、典型信号

1、指数信号

- 表达式： $f(t)=ke^{at}$



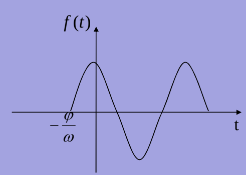
- 特点：指数a的绝对值大小反映了信号增长或衰减的速率｜a｜越大，增长或衰减的速率越快。



2、正弦信号

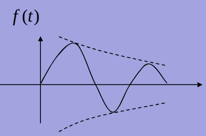
- 表达式：

$$f(t)=k\sin(\omega t+\phi)$$



- 衰减的正弦信号：

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ ke^{-at}\sin(wt) & t\ge 0\end{cases}\qquad a>0$$



幅值按指数规律变化，无初相位

☆欧拉公式

$e^{jwt} = \cos wt + j\sin wt$　　　$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{jwt} - e^{-jwt})$

$e^{-jwt} = \cos wt + j\sin wt$　　　$\cos \omega t = \frac{1}{2j}(e^{jwt} + e^{-jwt})$

正余弦信号和复指数信号经常互相转换

3、复指数信号

* 表达式：　$f(t) = ke^{st}$　　　$s = \sigma + jw$

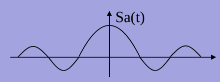
$$= ke^{(\sigma + jw)t} = ke^{\sigma t}\cos \omega t + ke^{\sigma t}\sin \omega t$$

注：实际上不能产生复指数信号。但复指数信号可用来描述各种基本信号。

σ= 0 w=0 直流信号

4、抽样函数

* 表达式：　$Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$



* 性质：①偶函数

②衰减函数　$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{\sin t}{t} = 0$

③ t ＝ 0　$Sa(0) = \frac{\sin t'}{t'}\Big|_{t=0} = 1$

④ $\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t)dt = \pi$　　$\int_{0}^{\infty} Sa(t)dt = \frac{\pi}{2}$

⑤ t=kπ　(k=±1，±2…)　时　f　(t)=0

⑥ $\lim_{t \to \infty} \frac{\sin t}{t} = 0$

阶跃信号与冲激信号

奇异信号：函数本身有不连续(跳变点)，或其导数与积分有不连续点；

◆四种奇异信号：斜变、阶跃、冲激、冲激偶；

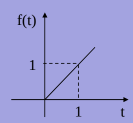
◆阶跃信号、冲激信号是最重要的两种理想信号模型。

BACK

一、斜变信号

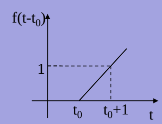
1、单位斜变信号（斜率=1）

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \ge 0 \end{cases}$$



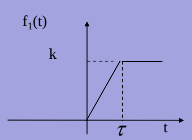
2、延迟的斜变信号　$(t_0 > 0)$

$$f(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ t - t_0 & t \ge t_0 \end{cases}$$



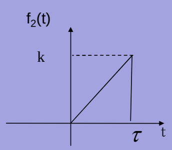
3、截平的斜变信号

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{k}{\tau} f(t) & t < \tau \\ k & t \ge \tau \end{cases}$$



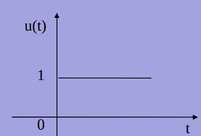
4、三角形脉冲用斜变信号来表达

$$f_2(t) = \begin{cases} \frac{k}{\tau} f(t) & t \ge \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$



二、单位阶跃信号 u(t)

1、定义：　$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$



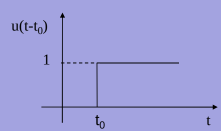
t=0处函数未定义

2、物理意义：

在t=0时刻对某一电路接入单位电源，且无限持续下去。

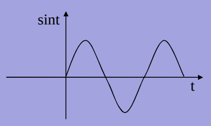
3、延迟的单位阶跃信号

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$



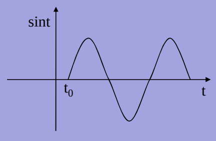
4、单位阶跃信号应用

（1）表示信号的接入特性:



$$f_1(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \sin t & t\geq 0\end{cases}$$

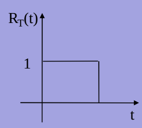
$$f_1(t)=\sin t\,u(t)$$



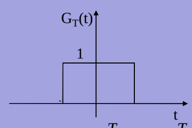
$$f_2(t)=\sin(t-t_0)u(t-t_0)$$

（2）用阶跃信号表示其它信号

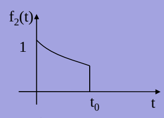
例:



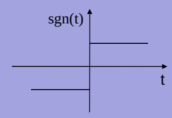
$$R_T(t)=u(t)-u(t-T)$$



$$G_T(t)=u(t+\frac{T}{2})-u(t-\frac{T}{2})$$



$$f_2(t)=e^{-t}[u(t)-u(t-t_0)]$$



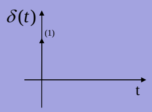
$$\operatorname{sgn}(t)=2u(t)-1$$

三、单位冲激函数 $\delta(t)$

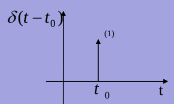
1、定义:

1）狄拉克定义

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)=1\\ \delta(t)=0 \quad \text{当}t\neq 0\end{cases}$$



$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)=1\\ \delta(t-t_0)=0 \quad \text{当}t\neq t_0\end{cases}$$



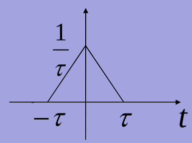
2）矩形脉冲演变冲激函数

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})\right]$$

3) 其它定义方式

* 三角形脉冲

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)\left[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})\right]$$



$$\begin{cases}f_1(t)=\frac{\frac{1}{\tau}}{\tau}t+\frac{1}{\tau}=\frac{1}{\tau}(1+\frac{t}{\tau}) & t<0\\ f_2(t)=-\frac{\frac{1}{\tau}}{\tau}t+\frac{1}{\tau}=\frac{1}{\tau}(1-\frac{t}{\tau}) & t>0\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{\tau}(1-\frac{|t|}{\tau})$$

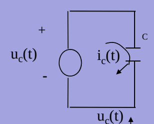
* 双边指数函数 $\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}[\frac{1}{2\tau}e^{-\frac{|t|}{2}}]$

* 钟形脉冲 $\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}[\frac{1}{\tau}e^{-\pi(\frac{|t|}{\tau})^2}]$

* 抽样函数 $\delta(t)=\lim_{\tau\to\infty}\frac{k}{\pi}Sa(kt)$

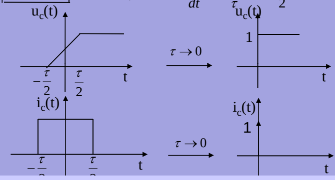
曲线下净面积: $s=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k}{\pi}Sa(kt)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}Sa(kt)d(kt)=1$

2、从物理角度来理解δ(t)的意义



$$u_c(t)=\begin{cases}0 & t<-\frac{\tau}{2}\\ \frac{1}{\tau}(t+\frac{\tau}{2}) & -\frac{\tau}{2}<t<\frac{\tau}{2}\\ 1 & t>\frac{\tau}{2}\end{cases}$$

$$i_c(t)=C\frac{du_c(t)}{dt}=\frac{C}{\tau}[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]$$



结论：跳变点处的导数为冲激函数。
若存在冲激电流，电容两端电压可以跳变。
若存在冲激电压，电感电流可以跳变。

3、性质

① 偶函数 $\delta(t)=\delta(-t)$ $\quad \delta(t-t_0)=\delta[-(t-t_0)]$

② $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ f(t)在t=0点连续，且处处有界

$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$

③抽样（筛选）特性 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt=f(0)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$

④尺度 $\delta(at)=\frac{1}{a}\delta(t)$ $\quad \delta(at-t_0)=\frac{1}{a}\delta(t-\frac{t_0}{a})$

⑤ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at)dt=\frac{1}{a}f(0)$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at-t_0)dt=f(\frac{t_0}{a})$

⑥ $\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$

⑦ $\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$ $\quad \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)d\tau=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}=u(t-t_0)$

•例：已知 $f(t)=2\delta(t-3)$ 求 $\int_{0^-}^{\infty} f(5-2t)dt$

解：$f(t)\xrightarrow{\text{尺度}}f(2t)=2\delta(2t-3)\xrightarrow{\text{反褶}}f(-2t)=2\delta(-2t-3)=2\delta(2t+3)$

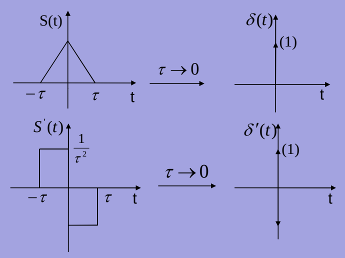
$=\delta(t+\frac{3}{2})\xrightarrow{\text{移位}}f(5-2t)=\delta(t+\frac{3}{2}-\frac{5}{2})=\delta(t-1)$

$\int_{0^-}^{\infty}\delta(t-1)dt=1$

4、冲激偶函数 $\delta'(t)$

◆定义：$\delta'(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}=\frac{d^2u(t)}{dt^2}$

理解：



◆ 性质：

1) $\delta'(t)=-\delta'(-t)$ $\quad \delta'(t-t_0)=-\delta'(-(t-t_0))$

2) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)dt=0$

3) $\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)d\tau=\delta(t)$

4) $f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(-t)-f'(0)\delta(-t)$

5) $f(t)\delta'(t-t_0)=f(t_0)\delta'(t-t_0)-f'(t_0)\delta(t-t_0)$

6) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt=-f'(0)$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-t_0)dt=-f'(t_0)$

•例：求 $f'(t), f''(t)$ 波形。

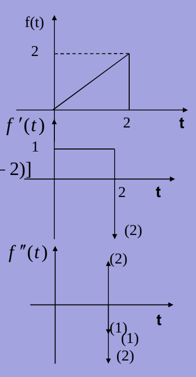
解：

$f(t)=t[u(t)-u(t-2)]$

$f'(t)=u(t)-u(t-2)+t[\delta(t)-\delta(t-2)]$

$=u(t)-u(t-2)+0-2\delta(t-2)$

$f''(t)=\delta(t)-\delta(t-2)-2\delta'(t-2)$

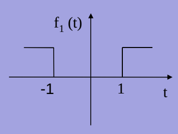


•例：画出下列函数图形

$f_1(t)=u(t^2-1)$

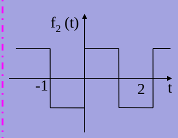
$\begin{cases}t^2-1>0 & u(t^2-1)=1\\ t^2-1<0 & u(t^2-1)=0\end{cases}$

$\begin{cases}t<-1\quad t>1 & u(t^2-1)=1\\ -1<t<1 & u(t^2-1)=0\end{cases}$



$f_2(t)=\mathrm{sgn}(\sin\pi t)$

$\begin{cases}\sin\pi t>0 & \mathrm{sgn}(\sin\pi t)=1\\ \sin\pi t<0 & f_2(t)=-1\end{cases}$



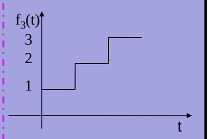
$f_3(t)=\int_{0^-}^{t}\delta[\sin(\pi\tau)]d\tau$

$\sin\pi\tau=0 \qquad \tau=0,1,2....$

$\int_{0^-}^{t}\delta(\sin\pi\tau)d\tau$

$=\int_{0^-}^{t}[\delta(\tau)+\delta(\tau-1)+.....]d\tau$

$=u(t)+u(t-1)+u(t-2)+\cdots$



信号的一些基本处理方法

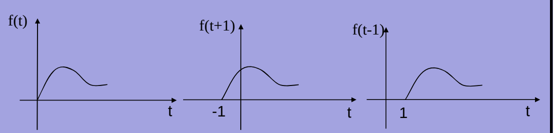
§1.3 信号的运算

一、移位 （自变量t更换为$t+t_0$）

$f(t+t_0)$相当于$f(t)$波形在t轴上整体移动。

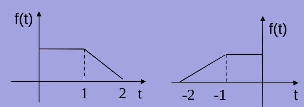
$t_0>0$ 波形左移

$t_0<0$ 波形右移



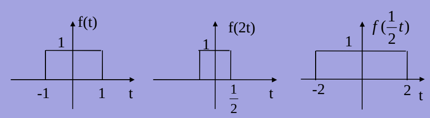
二、反褶（自变量t更换为−t ）

$f(-t)$相当于将$f(t)$以t=0为轴反褶。



三、尺度变换（自变量t乘以正实系数a）

$f(at)$ a>1将$f(t)$波形压缩， 0<a<1将$f(t)$波形扩展。



例：已知信号$f(t)$的波形，试画出$f(-3t-2)$的波形。

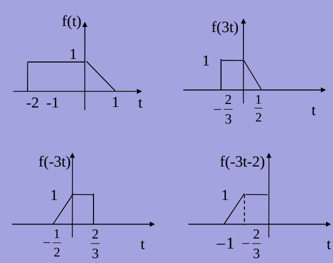
$$f(-3t-2)=f[-3(t+\frac{2}{3})]$$

$$(1)\quad f(t)\xrightarrow{\text{移位}}f(t-2)\xrightarrow{\text{尺度倍乘}}f(3t-2)\xrightarrow{\text{反褶}}f(-3t-2)$$

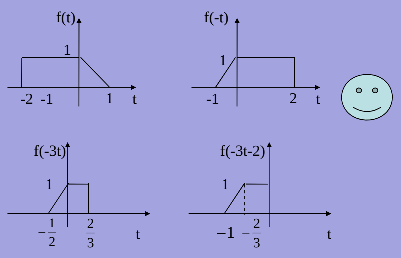
例：已知信号$f(t)$的波形，试画出$f(-3t-2)$的波形。

$$f(-3t-2)=f[-3(t+\frac{2}{3})]$$

$$(2)\quad f(t)\xrightarrow{\text{尺度倍乘}}f(3t)\xrightarrow{\text{反褶}}f(-3t)\xrightarrow{\text{移位}}f[-3(t+\frac{2}{3})]$$



(3) $f(t)\xrightarrow{反褶} f(-2)\xrightarrow{尺度倍乘} f(-3t)\xrightarrow{移位} f[-3(t+\frac{2}{3})]$

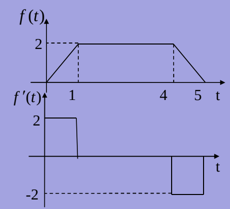


4、微分运算（自变量t取导数）

$$f'(t)=\frac{df(t)}{dt}$$

例：已知 $f(t)=\begin{cases}2t & 0<t\le 1\\ 2 & 1<t<2\\ -2t & t>2\end{cases}$ 求 $f'(t)$ 波形

解：

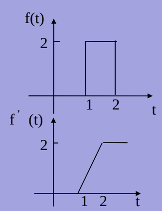


特点：信号经微分后突出显示了它的变化部分。

5、积分运算 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$

例：已知 $f(t)=\begin{cases}0 & 0<t<1\\ 2 & 1<t<2\\ 0 & t>2\end{cases}$ 求 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ 波形。

解：



特点：使信号的突变部分变得平滑，可削弱信号中的噪声。

6、两信号相加相乘：

$x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ （变频）

$x(t)=x_1(t)\cdot x_2(t)$ （用于信号调制、解调）

§1.5 信号的分解

一、直流分量与交流分量

$$f(t)=f_D+f_A(t)$$

说明：

1、直流 $f_D=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$ 信号的平均值。

2、交流f_A是f(t)中去掉f_D后，随时间变化部分。

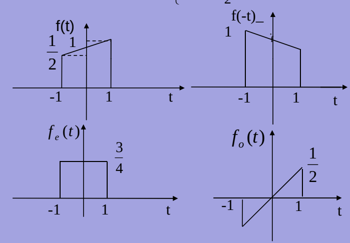
3、信号的平均功率=直流功率+交流功率

二、偶分量与奇分量

$$f(t)=f_e(t)+f_o(t)$$

其中 $\begin{cases}f_e(t)=f_e(-t)\\ f_o(t)=-f_o(-t)\end{cases}$ $\begin{cases}f_e(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]\\ f_o(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]\end{cases}$

•例：



三、脉冲分量

1、冲激信号的叠加：

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)\delta(t-t_1)dt_1=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=f(t)*\delta(t)$$

2、阶跃信号的叠加：

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)U(t-\tau)d\tau$$

一个信号可近似分解为许多脉冲分量之和：

1)分解为矩形窄脉冲分量→极限情况就是冲激函数信号的叠加。

2)分解为阶跃信号分量之叠加。

证明信号分解为冲激信号的叠加

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=f(t)*\delta(t)$$

证：设在 t_1 时刻被分解之矩形脉冲高度为 $f(t_1)$ 宽度为 Δt_1

窄脉冲表示式： $f(t_1)[u(t-t_1)u(t-t_1-\Delta t_1)]$

$t_1=-\infty$ 到 ∞ 将许多这样的矩形脉冲单元叠加。

$$f(t)\approx\sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f(t_1)[u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta t_1)]$$

$$=\lim_{\Delta t_1\to 0}\sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f(t_1)\Delta t_1\delta(t-t_1)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)\delta(t-t_1)dt_1$$

四、实部分量与虚部分量

若f(t)为复信号，则 $f(t)=f_r(t)+jf_i(t)$

$$f^*(t)=f_r(t)-jf_i(t)$$

$$|f(t)|^2=f_r^2(t)+f_i^2(t)=f(t)f^*(t)$$

实际产生的为实信号，但复信号的应用日益广泛。

五、正交函数分量

信号分解为正交函数分量的叠加。

1、正交函数：两实函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间 $(t_1\quad t_2)$

内满足正交条件 $\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt=0$

则 $f_1(t)$ $f_2(t)$ 称为正交。

两复函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间 $(t_1\quad t_2)$ 内满足正交条件。

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f^*{}_2(t)dt=\int_{t_1}^{t_2} f^*{}_1(t)f_2(t)dt=0$$

2、正交函数集：

n个函数 $g_1(t)$ $g_2(t)\cdots$ $g_n(t)$ 构成的一个函数集

这些函数在区间 $(t_1\quad t_2)$ 内满足如下的正交特性.

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t)g_j(t)dt=0 \qquad (i\neq j)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g^2{}_i(t)dt=K$$

上一讲到此结束

作业：举例实际应用中的正交函数集

前面我们讲了，

- 信号与系统的概念、特点及分类。

  --及生物医学信号及系统的特点

- 信号的描述、一些基本信号的描述
- 一些基本的信号处理方法

  --信号的运算、分解

两复函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间 $(t_1 \quad t_2)$ 内满足正交条件。

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f^{*}{}_2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} f^{*}{}_1(t) f_2(t)dt = 0$$

2、正交函数集:

n个函数 $g_1(t)$ $g_2(t)\cdot$ $g_n(t)$ 构成的一个函数集

这些函数在区间 $(t_1 \quad t_2)$ 内满足如下的正交特性.

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j(t)dt = 0 \qquad (i \neq j)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g^2{}_i(t)dt = K$$

3、用正交函数集表示函数f (t)

$$f(t) = \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} C_i g_i(t)$$

信号f (t) 可分解为正交函数的加权和。

4、常用正交函数集

①三角函数集 1、$\cos\omega_1 t$ $\sin\omega_1 t$ $\cos 2\omega_1 t$ $\sin 2\omega_1 t$ $\cdots$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nw_1 t + b_n \sin nw_1 t) + a_0$$ 三角傅立叶级数。

②复指数函数集 $e^{jnw_1 t}$ n=0， ±1， ±2…

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jnw_1 t}$$ 指数形式的傅立叶变换。

随机信号的描述

（Random Signal Representation
）

信号可分为确定性信号和随机信号。在数字信号处理中，随机信号的处理有重要的意义，因为随机信号的普遍存在的，如信号的任何实际测量都会带来随机干扰。在很多实际应用领域，消除随机信号的干扰，提取被掩埋于其中的确定成分是根本的任务。还因为随机信号处理技术在信号处理领域作为一种强有力的工具使用。在实际应用中要区别的是随机性与非线性，随机信号与非线性信号。应该注意的是，在信号处理中作为一种工具使用的伪随机数或伪随机信号，是由计算机用非线性算法产生的非线性信号，“伪”的真实意义即在于此(貌似随机实为确定)。

第一节 随机信号（Random Signal）

确定性信号和随机信号是信号处理技术中涉及的两大类信号。所谓确定性信号，就是其每个时间点上的值可以用某个数学表达式或图表唯一地确定的信号。所谓随机信号就是不能用一个确切的数学公式来描述，因而也不能准确地与以预测的信号。换句话来说，随机信号只能用统计的方法进行描述，只能在一定的准确性（accuracy）或可信性（confidence）范围内进行预测。

- 一、随机信号的性质
- **1. 随机信号中的任何一个点上的取值都是不能先验确定的随机变量。**
- 以最简单的抛硬币实验为例，每次抛掷结果有两种可能的状态，一是硬币的正面朝上，另一是硬币的反面朝上。如果把正面朝上用x=+1表示，反面朝上用x=-1表示，连续地抛掷，可以得到一个由+1和-1组成的一个序列x(n)，如图3-1所示。

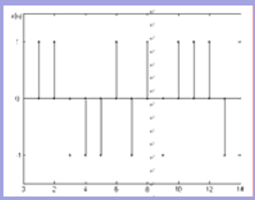


图3-1 抛硬币得到的随机样本序列

- **2.随机信号可以用它的统计平均特征来表征**
- 虽然上述抛硬币实验所得到的随机序列在任何n点上都无法事先预料确定的结果，但人们经过长期实践和深入研究之后发现，在大量重复实验或者观察下，它的结果会呈现某种规律性。表3-1是历史上几位著名学者的实验记录。

实验者	抛掷次数 n	出现正面次数 m	m/n
摩根	2048	1061	0.5181
摩根	2048	1048	0.5117
摩根	2048	1017	0.4966
摩根	2048	1039	0.5073
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

由表3-1可以看出，随着抛掷次数的增加，比值m/n在1/2附近摆动，而且总是在1/2附近摆动。这种在个别实验中其结果呈现不确定性，在大量重复实验中其结果又具有规律性的现象，称之为随机现象，大量同类随机现象所呈现的固有规律称为随机现象的统计特征。

- 二、随机过程的普遍存在性
- 随机信号或随机过程(random process)是普遍存在的。一方面，任何确定性信号经过测量后往往就会引入随机性误差而使该信号随机化；另一方面，任何信号本身都存在随机干扰，通常把对信号或系统功能起干扰作用的随机信号称之为噪声。噪声按功率谱密度划分可以分为白噪声（white noise）和色噪声（color noise），我们把均值为0的白噪声叫纯随机信号（pure random signal）。

随机信号的古典表示法

- (Classical Statistical Method)

- 对于一个随机信号，虽然我们不能确定它的每个时刻的值，但可以从统计平均的角度来认识它。我们可以知道它在每个时刻可能取哪几种值和取各种值的概率是多少，以及各个时间点上取值的关联性。因此，如果已经知道了它的概率分布，我们就认为对这个随机信号在统计意义上有了充分的了解。而随机过程的各种统计特征量分别从各个侧面间接反映了概率分布特性。

- 一、概率分布函数
- **1. 一维概率分布函数**
- 对于一个随机变量,用来表示它的概率分布函数，则有：
- $P_{x_n}(x_1,n)=概率[x_n \le x_1]$ (3-1)
- 如果的取值是离散的，则用来表示概率密度函数：
- $p_{x_n}(x_1,n)=概率[x_n = x_1]$ (3-2)
- 表示取某一值的概率。例如前面抛掷硬币的例子，只有两种可能的值：－1和＋1，如果＝＋1的概率为p，则＝－1的概率为（1－p）。两者之间的关系为：
- $P_{x_n}(x_1,n)=\int_{-\infty}^{x_1} p_{x_n}(x,n)dx$ (3-3)
- 图3-2表示了这个随机变量的概率分布函数及概率密度函数。

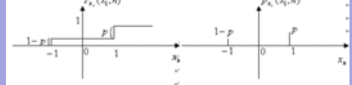


图3-2抛掷硬币的概率分布函数和概率密度函数

- **2. 二维概率分布函数**
- 如果我们要描述一个随机过程中的两个时间点（n1与n2）上的随机变量和之间的关系，可以用二维联合概率分布函数来表示：
- $P_{x_{n1},x_{n2}}(x_1,n_1;x_2,n_2)=\text{概率}(x_{n_1}\le x_1,x_{n_2}\le x_2)$ (3-4)
- 它表示同的联合概率。
- 二维联合概率分布函数的二阶偏微分对应着相应的二维联合概率密度函数：
- $p_{x_{n1},x_{n2}}(x_1,n_1;x_2,n_2)=\text{概率}(x_{n_1}=x_1,x_{n_2}=x_2)$ (3-5)
- 它代表取值同时取值的联合概率。
- 从随机变量和的二维联合概率密度可以求得和各自的一维概率密度以及条件概率密度。因此二维联合概率密度不仅蕴涵了一维概率密度，而且蕴涵了条件概率密度。
- 当随机变量和统计独立时则有：
- $p_{x_{n1},x_{n2}}(x_1,n_1;x_2,n_2)=p_{x_{n1}}(x_1,n_1)\cdot p_{x_{n2}}(x_2,n_2)$ (3-6)

- **3. 平稳随机信号**
- 如果随机信号的概率特性不随时间变化而变化，则称为平稳随机信号。完全平稳的要求是非常苛刻的。一般可使用较弱的条件：即用m阶平稳来描述一个随机过程，阶数越高，越接近平稳。
- 一阶平稳过程(first order stable process)：信号的平均值与t无关的过程叫一阶平稳过程（m=1）。二阶平稳过程：二阶（m=2）平稳过程需满足：（1）信号的平均值与t无关；（2）信号的均方值与t无关；（3）信号的协方差只是时间间隔的函数，而与时间原点的选择无关。
- 如果过程是高斯过程，则二阶平稳意味着完全平稳。因此，以后我们至少把二阶平稳过程叫准平稳过程或广义平稳过程。今后我们所提到的平稳随机过程均认为是广义平稳随机过程。

- **二、统计特征量**
- **1.数学期望（均值）**
- 随机变量的均值用表示定义为：
- $m_{x_n}=E[x_n]=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx$ (3-7)
- 如果是电压或者电流，均值可理解为第n点上电压或电流的“直流分量”。
- **2.均方值**
- 随机变量的均方值定义为：
- $E[x_n^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx$ (3-8)
- 如果是电压或者电流，均方值可理解为在第n点上电压或电流在1欧姆电阻上的“平均功率”。
- **3.方差**
- 随机变量的方差定义为：
- $\sigma_{x_n}^2=E[(x_n-m_{x_n})^2]$ (3-9)
- 如果是电压或者电流，方差可以理解为电压或者电流的起伏分量在1欧姆电阻上消耗的平均功率。
- 利用（3－6）容易得到方差、均值、均方值的关系：
- $\sigma_{x_n}^2=E[x_n^2]-m_{x_n}^2$ (3-10)
- 以上三个特征量仅与一维概率密度有关。对于平稳随机过程，方差、均值、均方值都是与时间无关的常熟，可以将时间坐标省去，今后将用和来表示均值与方差。

- **4.协方差**
- 一个平稳随机信号的自协方差定义为：
- $C_{xx}(m)=E[(x_n-m_x)(x_{n+m}-m_x)]$ (3-11)
- 对于两个平稳随机过程{xn}和{yn}的互协方差定义为：
- $C_{xy}(m)=E[(x_n-m_x)(y_{n+m}-m_y)]$ (3-12)
- **5.相关函数**
- 一个平稳随机信号中的两个时间点上的随机变量和之间的自相关函数定义为：
- $R_{xx}(m)=E[x_n\cdot x_{n+m}]$ (3-13)
- 对于两个平稳随机过程{xn}和{yn}的互相关函数定义为：
- $R_{xy}(m)=E[x_n\cdot y_{n+m}]$ (3-14)
- 自相关函数和自协方差是衡量随机过程在不同时刻上的随机变量之间的相关性的量，利用(3-11)和(3-13)可以看出两者有如下关系：
- $C_{xx}(m)=R_{xx}(m)-m_x^2$ (3-15)
- 两者只相差一个常数，它们之间没有本质上的区别。
- 互相关函数和互协方差是衡量两个随机过程{xn}和{yn}的随机变量间的相关性，利用(3-12)和(3-14)可以看出两者有如下关系：
- $C_{xy}(m)=R_{xy}(m)-m_xm_y$ (3-16)
- 相关函数或者协方差是与二维概率分布有关的统计特性，也隐含了一维特征量，因此相关函数或协方差是表征一个随机过程的最重要的统计特性。

- 三、各态遍历随机信号
- 上面我们讨论了一些统计特征量的定义与求法，都需要预先知道一维、二维概率分布，在实际上这是不现实的。虽然用无穷多个平行样本序列（集合）的平均得到的统计特性倾于统计平均，但要对一个平稳随机过程获得很多的平行样本序列在实际中也是很困难的。
- 由于平稳随机过程的概率分布不随时间的平移而变化，全体集合的平均就可以用无穷时间的平均来代替，这就是各态遍历假设。
- 各态遍历随机信号（ergodic random signal）是指所有样本函数在某给定时刻的统计特性与单一样本函数在长时间内的统计特性一致的平稳随机信号。

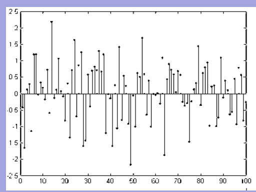
- 对于一个平稳各态遍历随机过程，如果我们测得该过程的一个样本值，就可以计算出以下的一些样本数字特征，可以用它们来估计统计特征量：
- **1.样本平均值**
- $\hat{m}_x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ (3-17)
- **2.样本均方值**
- $E[\hat{m}_x^2]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ (3-18)
- **3.样本方差**
- $\hat{\sigma}_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{m}_x)^2$ (3-19)
- **4.样本协方差**
- $\hat{C}_{xy}(m)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{m}_x)(y_{i+m}-\hat{m}_y)$ (3-20)
- 是另外一个平稳随机过程的样本，是它的样本平均值，当与相同时，上式求到的就是样本自协方差。
- **5.样本相关函数**
- $\hat{R}_{xy}(m)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_{i+m}$ (3-21)

- 【例3-1】图3-3所示是随机产生的符合高斯分布的100点样本序列，并且均值为零，方差为1。讨论该信号的样本特征量。
- 〖解〗我们用样本统计法来估计这一个样本的数字特征量，有：

$$\hat{m}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.0479 \qquad \hat{m}_x{}^2 = 0.0023$$

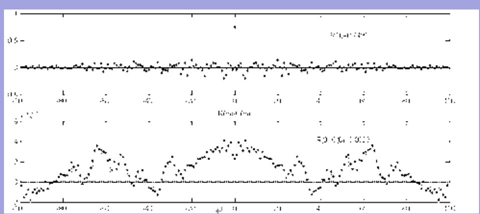
$$E[\hat{m}_x{}^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 = 0.7491 \qquad \hat{\sigma}_x{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{m}_x)^2 = 0.7468$$

$$\hat{C}_{xx}(m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{m}_x)(x_{i+m} - \hat{m}_x) \qquad \hat{R}_{xy}(m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+m}$$



- 图3-3一段100点的随机样本序列

由样本得到的统计结果和随机过程的统计特征值是不同的，因而我们能得到的只是一些估计值。平稳随机信号的相关函数和协方差应该只相差一个常数，但是用样本估计时，它们的差值是变化的量，如图3-4所示。当m＝0时，有最大的自相关和自协方差，这个很容易理解，也即当信号没有平移时相似性最大。



- 图3-4上、中、下分别是自协方差和自相关函数以及这两个信号的差

随机信号的现代建模法

- （Modern Modeling Method for Signal）

- 为随机信号建立参数模型是研究随机信号的一种基本方法，其含义是认为随机信号是由白噪激励某一确定系统的响应（如图3-5）。只要白噪的参数确定了，研究随机信号就可以转化成研究产生随机信号的系统。

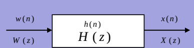


图3-5随机信号的参数模型

经典信号建模法（classical modeling method for signal）前面已经指出，医学信号处理的目的是提取包含于随机信号中的确定性成分，以便在一定的准确性（最小二乘意义）上进行预测。这就是建立各种各样的确定性数学模型，包括代数、微分、积分、差分方程模型。这是经典的信号建模方法。

信号的现代建模方法（Modern modeling method for signal）是建立在具有最大的不确定性基础上的预测。提出了众多的数学模型(mathematical models)。根据Wold的证明：任何平稳的ARMA（自回归移动平均）模型或MA模型均可用无限阶或阶数足够的AR模型去近似。因此本节着重介绍AR模型的基本原理和方法。

对平稳随机信号，三种常用的线性模型分别是AR模型（自回归模型Auto-regression model），MA模型（滑动平均模型Moving average model）和ARMA模型（自回归滑移平均模型Auto-regression-Moving average model）。

- **一、MA模型**
- 随机信号$x(n)$由当前激励$w(n)$和若干次过去激励$w(n-k)$线性组合产生：
- $x(n) = \sum_{k=0}^{q} b_k w(n-k)$ (3-22)
- 该模型的系统函数是：
- $H(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = \sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}$ (3-23)
- 表示系统阶数，系统函数只有零点，没有极点，所以该系统一定是稳定的系统，也称为全零点模型，用MA（q）来表示。
- **二、AR模型**
- 随机信号由本身的若干次过去值和当前的激励值线性组合产生：
- $x(n) = w(n) - \sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k)$ (3-24a)
- 该模型的系统函数是：
- $H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}$ (3-24b)
- p是系统阶数，系统函数中只有极点，无零点，也称为全极点模型，系统由于极点的原因，要考虑到系统的稳定性，因而要注意极点的分布位置，用AR（p）来表示。

- 三、**ARMA模型**
- ARMA是AR与MA模型的结合：
- $$x(n)=\sum_{k=0}^{q} b_k w(n-k)-\sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) \qquad (3\text{-}25)$$
- 该模型的系统函数是：
- $$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} \qquad (3\text{-}26)$$
- 它既有零点又有极点，所以也称极零点模型，要考虑极零点的分布位置，保证系统的稳定，用ARMR（p，q）表示。
- 在随机信号时域分析中，提出了许多数学模型用来由已知在最大不确定原则下预测将来值，其优点是只需要很少的已知值。但是它不能用在信号是确定性的场合，在确定信号的情况下，信号是由确定的数学方程预测的。这点要特别注意。例如，如果我们用心电的R波升支作已知数据进行随机预测，则预测值即为与R波上升支有关的数据，决不可能预测出整个P- QRS-T复合波来。
- **四、AR模型参数的估计**
- 随机信号的建模法最近在生物医学信号处理中应用相当普遍，在自发脑电、诱发脑电、肌电、心电、胃电等方面都有人尝试应用模型法进行研究。应用较多的是AR模型，因为建立这种的模型计算工作比较容易。作为数学逼近，三种模型都可以互相转换。实际中选用哪一种模型就要考虑到节约和计算量，选定模型后，剩下的任务就是用适当的算法估计模型参数（a_k、b_k、p、q），以便用模型对随机信号进行预测。

系统的的描述、性质及分类

一、系统的定义

若干相互作用、相互联系的事物按一定规律组成具有特定功能的整体称为系统。

电系统是电子元器件的集合体。电路侧重于局部，系统侧重于全部。电路、系统两词通用。

二、系统的分类及性质

可以从多种角度来观察、分析研究系统的特征，提出对系统进行分类的方法。下面讨论几种常用的分类法。

1. 连续系统与离散系统

若系统的输入信号是连续信号，系统的输出信号也是连续信号，则称该系统为连续时间系统，简称为连续系统。

若系统的输入信号和输出信号均是离散信号，则称该系统为离散时间系统，简称为离散系统。

2. 动态系统与即时系统

若系统在任一时刻的响应不仅与该时刻的激励有关，而且与它过去的历史状况有关，则称为动态系统 或记忆系统。含有记忆元件(电容、电感等)的系统是动态系统。否则称即时系统或无记忆系统。

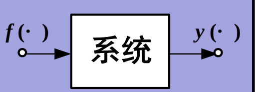
3. 单输入单输出系统与多输入多输出系统

4. 线性系统与非线性系统

满足线性性质的系统称为线性系统。

（1）线性性质

系统的激励$f(\cdot)$所引起的响应$y(\cdot)$可简记为 $y(\cdot)=T[f(\cdot)]$



线性性质包括两方面：齐次性和可加性。

若系统的激励$f(\cdot)$增大a倍时，其响应$y(\cdot)$也增大a倍，即

$$T[af(\cdot)]=aT[f(\cdot)]$$

则称该系统是齐次的。

若系统对于激励$f_1(\cdot)$与$f_2(\cdot)$之和的响应等于各个激励所引起的响应之和，即

$T[f_1(\cdot)+f_2(\cdot)]=T[f_1(\cdot)]+T[f_2(\cdot)]$ 则称该系统是可加的。

若系统既是齐次的又是可加的，则称该系统是线性的，即 $T[af_1(\cdot)+bf_2(\cdot)]=aT[f_1(\cdot)]+bT[f_2(\cdot)]$

（2）动态系统是线性系统的条件

动态系统不仅与激励$\{f(\cdot)\}$有关，而且与系统的初始状态$\{x(0)\}$有关。 初始状态也称“内部激励”。

完全响应可写为

$$y(\cdot)=T[\{f(\cdot)\},\{x(0)\}]$$

零状态响应为

$$y_f(\cdot)=T[\{f(\cdot)\},\{0\}]$$

零输入响应为

$$y_x(\cdot)=T[\{0\},\{x(0)\}]$$

当动态系统满足下列三个条件时该系统为线性系统：

①可分解性：

$y(\cdot) = y_f(\cdot) + y_x(\cdot) = T[\{ f(\cdot) \}, \{0\}]+ T[\{0\}, \{x(0)\}]$

②零状态线性：

$T[\{a f(\cdot) \}, \{0\}] = a T[\{ f(\cdot) \}, \{0\}]$

$T[\{f_1(t) + f_2(t) \}, \{0\}] = T[\{ f_1(\cdot) \}, \{0\}] + T[\{ f_2(\cdot) \}, \{0\}]$

或

$T[\{af_1(t) +bf_2(t) \}, \{0\}] = aT[\{ f_1(\cdot) \}, \{0\}] +bT[\{ f_2(\cdot) \}, \{0$

③零输入线性：

$T[\{0\},\{ax(0)\}]= aT[\{0\},\{x(0)\}]$

$T[\{0\},\{x_1(0) + x_2(0)\}]= T[\{0\},\{x_1(0)\}] + T[\{0\},\{x_2(0)\}]$

或$T[\{0\},\{ax_1(0) +bx_2(0)\}]= aT[\{0\},\{x_1(0)\}] +bT[\{0\},\{x_2(0)\}$

例1：判断下列系统是否为线性系统？

（1） $y(t) = 3\,x(0) + 2\,f(t) + x(0)\,f(t) + 1$

（2） $y(t) = 2\,x(0) + |\,f(t)|$

（3） $y(t) = x^2(0) + 2\,f(t)$

解： （1） $y_f(t) = 2\,f(t) +1$， $y_x(t) = 3\,x(0) + 1$

显然， $y(t) \neq y_f(t) + y_x(t)$ 不满足可分解性，故为非线性

（2） $y_f(t) = |\,f(t)|$， $y_x(t) = 2\,x(0)$

$y(t) = y_f(t) + y_x(t)$ 满足可分解性；

由于 $T[\{a\,f(t)\}, \{0\}] = |\,af(t)| \neq a\,y_f(t)$ 不满足零状态线性。

故为非线性系统。

（3） $y_f(t) = 2\,f(t)$，$y_x(t) = x^2(0)$， 显然满足可分解性；

由于$T[\{0\},\{a\,x(0)\}] =[a\,x(0)]^2 \neq a\,y_x(t)$不满足零输入线性。

故为非线性系统。

例2：判断下列系统是否为线性系统？

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t}\,x(0) + \int_0^t \sin(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

解： $y_x(t) = \mathrm{e}^{-t}\,x(0)$， $y_f(t) = \int_0^t \sin(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x$

$y(t) = y_f(t) + y_x(t)$ ， 满足可分解性；

$T[\{a\,f_1(t)+ b\,f_2(t) \}, \{0\}]$

$= \int_0^t \sin(x)[a\,f_1(x) + b\,f_2(x)]\,\mathrm{d}x = a\int_0^t \sin(x)\,f_1(x)\,\mathrm{d}x + b\int_0^t \sin(x)\,f_2(x)\,\mathrm{d}x$

$= aT[\{f_1(t)\}, \{0\}] +bT[\{ f_2(t) \}, \{0\}]$，满足零状态线性；

$T[\{0\},\{ax_1(0) + bx_2(0)\}]$

$= \mathrm{e}^{-t}[ax_1(0) +bx_2(0)] = a\mathrm{e}^{-t}x_1(0)+ b\mathrm{e}^{-t}x_2(0)$

$= aT[\{0\},\{x_1(0)\}] +bT[\{0\},\{x_2(0)\}]$， 满足零输入线性；

所以，该系统为线性系统。

5. 时不变系统与时变系统

满足时不变性质的系统称为时不变系统。

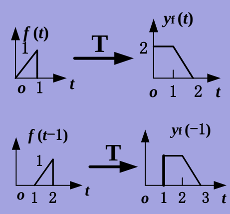
（1）时不变性质

若系统满足输入延迟多少时间，其零状态响应也延迟多少时间，即若

$T[\{0\}，f(t)] = y_f(t)$

则有

$T[\{0\}，f(t - t_d)] = y_f(t - t_d)$



系统的这种性质称为时不变性（或移位不变性）。

例：判断下列系统是否为时不变系统？

（1） $y_f(k) = f(k)\,f(k-1)$

（2） $y_f(t) = t\,f(t)$

（3） $y_f(t) = f(-t)$

解(1)令$g(k) = f(k-k_d)$

$T[\{0\}，g(k)] = g(k)\,g(k-1) = f(k-k_d)\,f(k-k_d-1)$

而 $y_f(k-k_d) = f(k-k_d)\,f(k-k_d-1)$

显然 $T[\{0\}，f(k-k_d)] = y_f(k-k_d)$ 故该系统是时不变的。

(2) 令$g(t) = f(t-t_d)$

$T[\{0\}，g(t)] = t\,g(t) = t\,f(t-t_d)$

而 $y_f(t-t_d)= (t-t_d)\,f(t-t_d)$

显然$T[\{0\}，f(t-t_d)] \neq y_f(t-t_d)$ 故该系统为时变系统。

(3) 令$g(t) = f(t-t_d)$，

$T[\{0\}，g(t)] = g(-t) = f(-t-t_d)$

而 $y_f(t-t_d) = f[-(t-t_d)]$，显然

$T[\{0\}，f(t-t_d)] \neq y_f(t-t_d)$

故该系统为时变系统。

直观判断方法：

若$f(\cdot)$前出现变系数，或有反转、展缩变换，则系统为时变系统。

本课程重点讨论线性时不变系统(Linear Time-Invariant)，简称LTI系统。

（2）LTI连续系统的微分特性和积分特性

①微分特性：

若 $f(t) \to y_f(t)$ ， 则 $f'(t) \to y'_f(t)$

②积分特性：

若 $f(t) \to y_f(t)$ ， 则 $\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \to \int_{-\infty}^{t} y_f(x)\,\mathrm{d}x$

6. 因果系统与非因果系统

零状态响应不会出现在激励之前的系统，称为因果系统。

即对因果系统，当$t < t_0$， $f(t) = 0$时，有$t < t_0$， $y_f(t) = 0$。

如下列系统均为因果系统：

$y_f(t) = 3f(t-1)$ $\qquad y_f(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$

而下列系统为非因果系统：

(1) $y_f(t) = 2f(t+1)$ 因为，令t=1时，有$y_f(1) = 2f(2)$

(2) $y_f(t) = f(2t)$

因为，若$f(t) = 0$， $t < t_0$，有$y_f(t) = f(2t)=0$, $t < 0.5\,t_0$。

例 某LTI因果连续系统，起始状态为$x(0_-)$。已知，当$x(0_-)=1$，输入因果信号$f_1(t)$时，全响应

$y_1(t) = e^{-t} + \cos(\pi t)$，$t>0$；

当$x(0_-)=2$，输入信号$f_2(t)=3f_1(t)$时，全响应

$y_2(t) = -2e^{-t} +3\cos(\pi t)$，$t>0$；

求输入$f_3(t) = \dfrac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t} +2f_1(t-1)$时，系统的零状态响应$y_{3f}(t)$。

解 设当$x(0_-)=1$，输入因果信号$f_1(t)$时，系统的零输入响应和零状态响应分别为$y_{1x}(t)$、$y_{1f}(t)$。当$x(0_-)=2$，输入信号$f_2(t)=3f_1(t)$时，系统的零输入响应和零状态响应分别为$y_{2x}(t)$、$y_{2f}(t)$。

由题中条件，有

$y_1(t) = y_{1x}(t) + y_{1f}(t) = e^{-t} + \cos(\pi t)$，$t>0$ （1）

$y_2(t) = y_{2x}(t) + y_{2f}(t) = -2e^{-t} +3\cos(\pi t)$，$t>0$ （2）

根据线性系统的齐次性，$y_{2x}(t) = 2y_{1x}(t)$，$y_{2f}(t) =3y_{1f}(t)$，代入式（2）得

$y_2(t) = 2y_{1x}(t) +3\,y_{1f}(t) = -2e^{-t} +3\cos(\pi t)$，$t>0$ （3）

式(3)– 2×式(1)，得

$y_{1f}(t) = -4e^{-t} + \cos(\pi t)$，$t>0$

由于$y_{1f}(t)$ 是因果系统对因果输入信号$f_1(t)$的零状态响应，故当$t<0$，$y_{1f}(t)=0$；因此$y_{1f}(t)$可改写成

$y_{1f}(t) = [-4e^{-t} + \cos(\pi t)]\varepsilon(t)$ (4)

$f_1(t) \to y_{1f}(t) = [-4e^{-t} + \cos(\pi t)]\varepsilon(t)$

根据LTI系统的微分特性

$\dfrac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t} \to \dfrac{\mathrm{d}y_{f1}(t)}{\mathrm{d}t} = -3\delta(t) + [4 -\pi\sin(\pi t)]\varepsilon(t)$

根据LTI系统的时不变特性

$f_1(t-1) \to y_{1f}(t-1) =\{ -4 + \cos[\pi(t-1)]\}\varepsilon(t-1)$

由线性性质，得：当输入$f_3(t) = \dfrac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t} +2f_1(t-1)$时，

$y_{3f}(t) = \dfrac{\mathrm{d}y_1(t)}{\mathrm{d}t} + 2y_1(t-1) = -3\delta(t) + [4-\pi\sin(\pi t)]\varepsilon(t) + 2\{-4 + \cos[\pi(t-1)]\}\varepsilon(t-1)$

7. 稳定系统与不稳定系统

一个系统，若对有界的激励$f(.)$所产生的零状态响应$y_f(.)$也是有界时，则称该系统为有界输入有界输出稳定，简称稳定。即 若$|f(.)|<\infty$，其$|y_f(.)|<\infty$ 则称系统是稳定的。

如$y_f(k) = f(k) + f(k-1)$是稳定系统；而

$y_f(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$ 是不稳定系统。

因为，当$f(t) =\varepsilon(t)$有界，

$\int_{-\infty}^{t} \varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = t\varepsilon(t)$ 当$t \to\infty$时，它也$\to\infty$，无界。

系统的描述

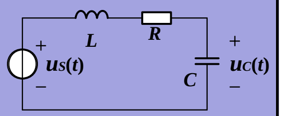
描述连续动态系统的数学模型是微分方程，描述离散动态系统的数学模型是差分方程。

一、连续系统

1. 解析描述——建立数学模型

图示RLC电路，以$u_S(t)$作激励，以$u_C(t)$作为响应，由KVL和VAR列方程，并整理得

$$\begin{cases} LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2}+RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=u_S \\ u_C(0+),\ u_C'(0_+) \end{cases}$$



二阶常系数线性微分方程。

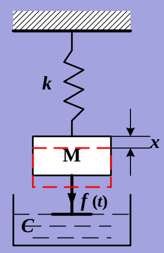
抽去具有的物理含义，微分方程写成

$$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=f(t)$$

这个方程也可以描述下面的一个二阶机械减振系统。

其中，k为弹簧常数，M为物体质量，C为减振液体的阻尼系数，x为物体偏离其平衡位置的位移，$f(t)$为初始外力。其运动方程为

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2}+C\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t)$$

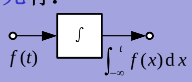


能用相同方程描述的系统称相似系统。

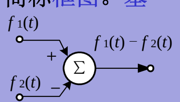
2. 系统的框图描述

上述方程从数学角度来说代表了某些运算关系：相乘、微分、相加运算。将这些基本运算用一些理想部件符号表示出来并相互联接表征上述方程的运算关系，这样画出的图称为模拟框图，简称框图。基本部件单元有：

积分器：

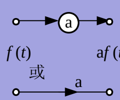


加法器：



积分器的抗干扰性比微分器好。

数乘器：



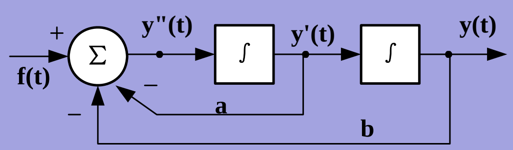
系统模拟：

实际系统→方程→模拟框图

→实验室实现（模拟系统）→指导实际系统设计

例1：已知$y''(t) + ay'(t)+ by(t) = f(t)$，画框图。

解：将方程写为 $y''(t) = f(t) - ay'(t) - by(t)$

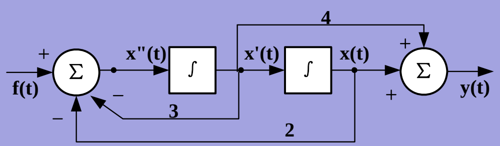


例2：已知$y''(t) + 3y'(t)+ 2y(t) = 4f'(t) + f(t)$，画框图。

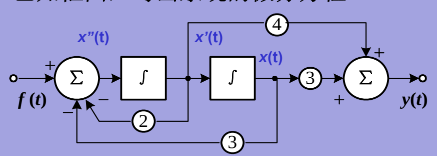
解：该方程含$f(t)$的导数，可引入辅助函数画出框图。

设辅助函数$x(t)$满足 $x''(t) + 3x'(t)+ 2x(t) = f(t)$

可推导出 $y(t) = 4x'(t) + x(t)$，它满足原方程。



例3：已知框图，写出系统的微分方程。



设辅助变量$x(t)$如图

$x''(t) = f(t) - 2x'(t) - 3x(t)$ ，即$x''(t) + 2x'(t) + 3x(t) = f(t)$

$y(t) = 4x'(t)+ 3x(t)$

根据前面，逆过程，得

$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 4f'(t)+ 3f(t)$

二、离散系统

1. 解析描述——建立差分方程

例：某人每月初在银行存入一定数量的款，月息为β元/元，求第k个月初存折上的款数。

设第k个月初的款数为y(k),这个月初的存款为f(k),上个月初的款数为y(k−1)，利息为βy(k−1),则

$$y(k)=y(k-1)+\beta y(k-1)+f(k)$$

即 $$y(k)-(1+\beta)y(k-1)=f(k)$$

若设开始存款月为k=0，则有y(0)= f(0)。

上述方程就称为y(k)与f(k)之间所满足的差分方程。所谓差分方程是指由未知输出序列项与输入序列项构成的方程。未知序列项变量最高序号与最低序号的差数，称为差分方程的阶数。上述为一阶差分方程。

由n阶差分方程描述的系统称为n阶系统。

描述LTI系统的是线性常系数差分方程。

例：下列差分方程描述的系统，是否线性？是否时不变？并写出方程的阶数。

（1）$y(k) + (k-1)y(k-1) = f(k)$ 线性、时变，一阶

（2）$y(k) + y(k+1)\, y(k-1) = f^2(k)$ 非线性、时不变，二阶

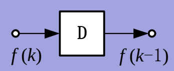
（3）$y(k) + 2\, y(k-1) = f(1-k)+1$ 非线性、时变，一阶

解：判断方法：方程中均为输出、输入序列的一次关系项，则是线性的。输入输出序列前的系数为常数，且无反转、展缩变换，则为时不变的。

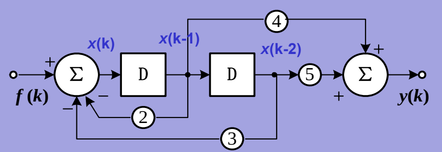
2. 差分方程的模拟框图

基本部件单元有：

数乘器，加法器，迟延单元（移位器）



例：已知框图，写出系统的差分方程。



解：设辅助变量x(k)如图 $x(k)= f(k) - 2x(k-1) - 3x(k-2)$

即 $x(k) +2x(k-1) +3x(k-2) = f(k)$

$y(k) = 4x(k-1) + 5x(k-2)$

消去x(k)，得

$$y(k) +2y(k-1) +3y(k-2) = 4f(k-1) + 5f(k-2)$$

方程←→框图用变换域方法和梅森公式简单，后面讨论。

1.7 LTI系统分析概述

系统分析研究的**主要问题**：对给定的具体系统，求出它对给定激励的响应。

具体地说：系统分析就是建立表征系统的数学方程并求出解答。

系统的分析方法：
- 输入输出法（外部法）
- 状态变量法（内部法）（chp.8）

外部法：
- 时域分析（chp.2,chp.3)
- 变换域法
  - 连续系统—频域法(4)和复频域法(5)
  - 离散系统—z域法（chp6)

系统特性：系统函数（chp.7)

求解的基本思路：

（1）把零输入响应和零状态响应分开求。

（2）把复杂信号分解为众多基本信号之和，根据线性系统的可加性：多个基本信号作用于线性系统所引起的响应等于各个基本信号所引起的响应之和。

采用的数学工具：

（1）卷积积分与卷积和

（2）傅里叶变换

（3）拉普拉斯变换

（4）Z变换

END

第一章　绪论

BACK