区间系统的鲁棒严格正实综合

Robust Strictly Positive Real Synthesis for Interval Systems

传递函数的严格正实性(Strictly Positive Realness, SPR)是系统的一种重要性能，在绝对稳定性与超稳定性理论[1][2]、无源性分析[3]、二次优化控制[4]及自适应系统理论[5]等领域中起着十分重要的作用。因实际系统中总存在有不确定性，研究系统的鲁棒严格正实性尤为有意义。二十世纪九十年代以来，受鲁棒稳定性分析中参数化方法的刺激 [6]-[8]，系统鲁棒严格正实性的研究得到了广泛的关注和发展[9]-[25]。

早期得到的多数结果是属于鲁棒严格正实分析的，针对鲁棒严格正实综合的有价值的结果较少。系统鲁棒严格正实分析方面的最好结果是由文[11]及[17]几乎同时独立得到的“八顶点检验定理”。

对鲁棒严格正实综合问题，通过正实引理[1]-[5][26]，可以给出传递函数的基于矩阵方程或矩阵不等式的正实性条件[20][26]，但用该方法进行鲁棒严格正实综合时，须引进较多的变元，得到的矩阵方程或矩阵不等式的阶次较高，并且所得条件是用矩阵方程或矩阵不等式的可解性来表述的，而这一点在理论上未有完整的结果[26]。

综合性问题较分析性问题一般在数学上要更为困难些，综合性问题往往要解决存在性问题与构造性问题，而分析性问题则可在已经假设存在性的前提下展开。就工程应用来说，综合性问题则更具有实际意义。

首先给出相关的定义、记号及基本问题的描述。由于严格正实性源于控制理论的多个领域，不同的文献采用了稍有不同的定义[20]。为明确起见，采用如下的定义：

R 表示实数域，记 P^n 为 n 阶实系数多项式集合， $H^n \subset P^n$ 是 n 阶实系数 Hurwitz 稳定多项式(仅具负实部的根)集合。在下述定义中， $b(s) \in P^m, a(s) \in P^n, p(s) = b(s)/a(s)$ 是有理函数。

定义 1　$p(s)$ 称为是严格正实(SPR) 的，记为 $p(s) \in \mathrm{SPR}$ ，是指 $b(s) \in P^n, a(s) \in H^n$ 且对 $\forall \omega \in R,\ \mathrm{Re}\left[p(j\omega)\right] > 0$ 。

定义 2　一个多项式集合 F 称为是鲁棒稳定的，是指集合 F 中的每一个元均是 Hurwitz 稳定多项式。

鲁棒严格正实综合问题的基本提法如下：

鲁棒严格正实综合基本问题　给定一个 n 阶多项式集 F，是否存在、如何找出一个(固定的)多项式 $b(s)$ 使对 $\forall a(s) \in F$ 有 $b(s)/a(s)$ 是严格正实的？

从严格正实性的定义容易知道，多项式集 F 的鲁棒稳定性，是存在一个(固定的)多项式 $b(s)$ 使对 $\forall a(s) \in F, b(s)/a(s)$ 严格正实的必要条件。另外，考虑如下的问题：

鲁棒严格正实域刻画问题　给定 $a(s) \in H^n$，如何找出所有的 $b(s)$ 使 $p(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)} \in \mathrm{SPR}$ ？

该问题对鲁棒严格正实的分析与综合是有意义的。特别，给出 $b(s)$ 的基于 $a(s)$ 的系数的显式表达条件是[14]提出的一个问题。

传递函数SPR性的判定，本质上可以化为多项式实根的判定问题。古典Sturm组方法虽然也可用于判定多项式实根的分布，但其对文字（符号）系数的多项式建立判别系统是没有效率的[27][28]。

1996 年，由杨路等人建立的多项式完全判别系统[27][28]，可以给出一组由多项式系数构成的显式表达式来判定多项式根的状况。文[18]借此给出了传递函数鲁棒SPR域的描述，

从而理论上完整解决了上面的鲁棒严格正实域刻画问题。

对于鲁棒严格正实综合问题，当所给定的多项式集合是稳定的多项式线段集、或稳定的区间多项式集、或稳定的凸多面体多项式集时，由于这些集合在鲁棒稳定性理论[6]-[8]中具有的特殊重要性以及严格正实性本身的特点，受到了研究者的充分重视。这方面已有结果总结如下：

当F的元具有相同的的偶次(或奇次)项时，这样的多项式$b(s)$是存在的[13][14][16]，这一结果最先由Hollot等人[13]于 1989 年针对区间多项式集而得到，1990 年Huang等人[16]又推广至更为一般的结果，与文[13]完全相同的结果 1997 年又被Patel and Datta重新得到[16][19]。

当F为低阶的$(n \le 3)$稳定的多项式线段集[20][21]时，这样的多项式$b(s)$也总是存在的；文[25]全面推广[20][21]的结果，证明了当F为任意阶的稳定的多项式线段集时，这样的多项式$b(s)$也总是存在的。这样，稳定多项式线段的鲁棒严格正实综合问题已获完整解答。

当F为低阶的$(n \le 3)$稳定的区间多项式集[9][10] [13]-[15] [20][21]时，这样的多项式$b(s)$是存在的。应该提到的是，Anderson等人[9]1990 年利用线性规划的方法，还给出了使上述问题存在解的一组条件(即文[9]中的(58)-(60)式)，并认为，对任给的四次区间多项式集，该组条件总是可以满足的，因而认为，上述问题对四次区间多项式集也就完全解决了。但是，1993 年Betser and Zeheb在文[10]中举出反例说明，文[9]中给出的仅是一个充分性的条件。当时，即使对于四次稳定的区间多项式集，究竟是否存在一个多项式，使其与该多项式集合配置成严格正实的有理函数族？一方面，理论上不能正面证明这一结论，另一方面，也从未发现有反例说明结论不成立，因而成为鲁棒严格正实综合领域著名的公开问题[9][10][13]-[15][20] [21]。后来，文[23]充分利用针对稳定多项式线段鲁棒严格正实综合的技巧，给出了四次区间稳定多项式集鲁棒严格正实综合正面肯定的答案。

另外，文[9][10][12]等还给出了上述问题的一些充分性的条件。但是，这些充分性的条件对于高阶多项式集的情形来讲，是十分没有效率的。当时文献中鲜见有高于 4 阶情形的例子。1998 年，文[15]曾给出一个 6 阶区间多项式集的例子，但后来文[18]指出该例子是错误的。特别地，用文 [18]提供的设计方法，对高阶的多项式线段或区间多项式数值计算上是有效的，所得到的条件对任意阶的多项式线段[25]或低阶的$(n \le 4)$区间多项式[23]情形是充分必要的。

上述结果表明，任意阶多项式线段或低阶$(n \le 4)$区间多项式的鲁棒稳定性，是实现其鲁棒严格正实综合的充分必要条件，换句话说，鲁棒稳定性与鲁棒严格正实可综合性，在某些情况下是等价的，这是具有深刻科学内涵的结论。

上述所有这些结果均是针对连续时间系统而言的，这些结果可以直接推广到离散时间系统、甚至D-SPR的情形[20]。上述结果的一个较为全面的综述可见[24]。

此外，文[22]与[24]中还构造了一个简单的例子，说明多项式线段和区间多项式鲁棒严格正实综合的技巧，对一般凸多面体多项式集可能[22][24]不适用。这表明多项式线段和区间多项式鲁棒严格正实综合与凸多面体多项式集的鲁棒严格正实综合具有内在的本质不同。因此，对高阶区间多项式集的鲁棒严格正实综合就尤为重要。如下的区间系统的鲁棒严格正实综合问题，仍是理论上尚未解决的具有挑战性的公开问题[9][10][13]-[16][18][20]-[25]。

区间系统的鲁棒严格正实综合问题　*对于阶次大于 4 的稳定的区间多项式集，究竟是否存在一个多项式，使其与该多项式集合配置成严格正实的有理函数族？或者，大于 4 阶的区间多项式集的鲁棒稳定性是否也是其可鲁棒严格正实综合的充分必要条件？*

从我们计算的大量数值例子来看，给定稳定的区间多项式集，这样的多项式都可以找到，尚未发现反例，因此，我们推测该问题可能会有正面肯定的答案。

参考文献

[1]. Kalman R E. Lyapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control. Proc. Nat. Acad. Sci.(USA), 1963, 49: 201-205.

[2]. Popov V M. Hyperstability of Control Systems. New York: Springer-Verlag, 1973.

[3]. Desoer C A, Vidyasagar M. Feedback Systems: Input-Output Properties. San Diego: Academic Press, 1975.

[4]. Anderson B D O, Moore J B. Linear Optimal Control. New York: Prentice Hall, 1970.

[5]. Landau I D. Adaptive Control: The Model Reference Approach. New York: Marcel Dekker, 1979.

[6]. Ackermann J, Bartlett A, Kaesbauer D, Sienel W, Steinhauser R. Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[7]. Barmish B R. New Tools for Robustness of Linear Systems. New York: MacMillan Publishing Company, 1994.

[8]. Bhattacharyya S P, Chapellat H, Keel L H. Robust Control: The Parametric Approach. New York: Prentice Hall, 1995.

[9]. Anderson B D O, Dasgupta S, Khargonekar P, Kraus F J, Mansou M. Robust strict positive realness: characterization and construction. IEEE Trans. Circuits Syst., 1990, CAS-37: 869-876.

[10]. Betser A, Zeheb E. Design of robust strictly positive real transfer functions. IEEE Trans. Circuits Syst.; Part I, 1993, CAS-40: 573-580.

[11]. Chapellat H, Dahleh M, Bhattacharyya S P. On robust nonlinear stability of interval control systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36: 59-69.

[12]. Dasgupta S, Bhagwat A S. Conditions for designing strictly positive real transfer functions for adaptive output error identification. IEEE Trans. Circuits Syst., 1987, CAS-34: 731-737.

[13]. Hollot C V, Huang L, Xu Z L. Designing strictly positive real transfer function families: A necessary and sufficient condition for low degree and structured families. Proceedings of Mathematical Theory of Network and Systems, (eds. Kaashoek M A, Van Schuppen J H, Ran A C M.), Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1989, 215-227.

[14]. Huang L, Hollot C V, Xu Z L. Robust analysis of strictly positive real function set. Preprints of Proceedings of the Second Japan-China Joint Symposium on Systems Control Theory and its Applications, Osaka: Osaka University Press, 1990, 210-220.

[15]. Marquez H J, Agathoklis P. On the existence of robust strictly positive real rational functions. IEEE Trans. Circuits Syst.; Part I, 1998, CAS-45: 962-967.

[16]. Patel V V, Datta K B. Classification of units in H_∞ and an alternative proof of Kharitonov's theorem. IEEE Trans. Circuits Syst.; Part I, 1997, CAS-44: 454-458.

[17]. 王龙. 区间有理函数严格正实性的有限检验. 科学通报, 1991, 36: 262-264.

[18]. Wang L, Yu W S. Complete characterization of strictly positive real regions and robust strictly positive real synthesis method. Science in China, 2000, (E)43: 97-112.

[19]. Wang L, Yu W S. On robust stability of polynomials and robust strict positive realness of transfer functions. IEEE Trans. on Circuits and Syst.; Part I, 2001, CAS-48: 127-128.

[20]. 郁文生. 系统鲁棒严格正实综合与鲁棒稳定性分析. 北京大学博士学位论文, 北京, 1998.

[21]. Yu W S, Huang L. A necessary and sufficient condition on robust SPR stabilization for low degree systems. Chinese Science Bulletin, 1999, 44:517-520.

[22]. Yu W S, Wang L. Design of strictly positive real transfer functions. IFAC Symposium on Computer Aided Control Systems Design (CACSD 2000), Salford, UK, 2000.

[23]. Yu W S, Wang L. Anderson's claim on fourth-order SPR synthesis is true. IEEE Trans. Circuits Syst.; Part I, 2001, CAS-48: 506-509.

[24]. Yu W S, Wang L. Design of robust strictly positive real transfer functions, Networked Control Systems：Theory and Applications, Springer-Verlag, 2008, 293-344.

[25]. Yu W S, Wang L, Ackermann J. Robust strictly positive real synthesis problem for polynomial families of arbitrary order, Science in China, 2004, (F)47: 475-489.

[26]. Body S, El Ghaoui L, Feron E, Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.

[27]. Yang L, Hou X R, Zeng Z B. A complete discrimination system for polynomials. Science in China, 1996, (E)39: 628-646.

[28]. 杨路, 张景中, 侯晓荣. 非线性代数方程组与机器证明(非线性科学丛书). 上海: 上海科学教育出版社, 1996.