

计算气动声学

三. 气动声源 (一)

黄迅
特聘研究员

力学与空天技术系
工学院
北京大学

www.coe.pku.edu.cn/faculty/huangxun

- 1952年Lighthill针对飞机发动机射流噪声建立声学模拟理论；
- 60年代以来Curle、Ffowcs Williams、Howe、Lilley等人进一步发展该理论；
- Farassat等推广到直升机旋翼噪声预测，Ann Dowling等研究了水下物体噪声预测；
- 目前的国际研究热点是飞行器机体噪声预测、计算气动声学、测试技术等。

首先采用纳维-斯托克斯方程组描述流动:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \delta_{ki} \lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (2)$$

δ_{ki} Kronecker符号, μ 粘性。

声学模拟理论

Eq. (1) 乘 u_i 加 Eq. (2):

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = -\frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (3)$$

$$\pi_{ik} = \rho u_i u_k + (p - p_0) \delta_{ik} - \sigma_{ik}.$$

连续方程Eq. (1)改写为:

$$\frac{\partial(\rho - \rho_0)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0. \quad (4)$$

消除 ρu_i , $\frac{1}{\partial t}$ (Eq. (4)) + $\frac{1}{\partial x_k}$ (Eq. (3)), 并减去 $\nabla^2 [c_0^2(\rho - \rho_0)]$:

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) [c_0^2(\rho - \rho_0)] = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (5)$$

$T_{ij} = \rho u_i u_j + (p - p_0) \delta_{ij} - \sigma_{ij} - [c_0^2(\rho - \rho_0)] \delta_{ij}$, 即 Lighthill 声模拟理论 (1952)。

- 适用自由空间湍流。
- 可预测某个空间内局部湍流运动造成的远场声分布。
- 需假设局部湍流外的流场不产生声音，即大部分区域 $T_{ij} = 0$ ：并且
(1) 黏性项可以忽略，即 $\sigma_{ij} = 0$ ；(2) 理想气体，
 $(p - p_0) = [c_0^2(\rho - \rho_0)]$ ；(3) 大部分空间假设满足 $\rho u_i u_k = 0$ 。
- 因此可以假设一个虚拟面包住局部空间湍流，然后根据自由空间格林函数计算体积分预测远场噪声：

$$c_0^2(\rho - \rho_0)(x, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_{ij}(y, t - |x - y|/c_0)}{|x - y|} d^3y. \quad (6)$$

x 远场观测点坐标， T_{ij} 四偶极子声源， y 声源坐标。

Lighthill公式进一步分析和化简

- 紧致假设。 $|\mathbf{x}| \gg 0$, $y \ll \text{声音波长}$ 。 Eq. (6)趋向:

$$\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{-\infty}^{\infty} T_{ij}(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0} + \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}}{c_0|\mathbf{x}|}) d^3\mathbf{y}. \quad (7)$$

- 偏微分转换。对 T_{ij} 在远场有如下偏微分转换近似关系:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \rightarrow -\frac{1}{c_0} \frac{x_j}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (8)$$

- Lighthill声模拟理论从流动方程出发，除了假设声不影响流动，基本做到步步推导有依据无简化。
- 如马赫数表征为 M ，对Lighthill方程量纲分析可知声能 P 和 M^8 成比例，因此降低 M 可以降低气动噪声。另外，对单位湍流能量，声转化效率 η 和 M^5 成比例，可以看出 η 非常低，说明只有很少一部分湍流能量转化成了声能。
- Lighthill理论不考虑固体边界影响。Curle指出固定固体和周围流动耦合会提高噪声转化效率。Ffowcs Williams和Hawkings推广到了更通用的情况，可处理移动固体问题，即FWH公式。

FWH公式

假设某个移动固体外型由函数 $S(\mathbf{x}, t)$ 描述，有：

$$S(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (9)$$

同时假设观察者和固体一起运动，有：

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v_i \frac{\partial S}{\partial x_i} = 0. \quad (10)$$

v_i 为固体运动速度。

FWH公式

利用广义函数重新改写纳维-斯托克斯方程， $H(S)$ 表示固体外流场，有：

$$\begin{aligned} \frac{\partial[(\rho - \rho_0)H(S)]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\rho u_k H(S)] &= (\rho - \rho_0) \frac{\partial H(S)}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial H(S)}{\partial x_k} \\ &= (\rho - \rho_0) \delta(S) \frac{\partial S}{\partial t} + \rho u_k \delta(S) \frac{\partial S}{\partial x_k} \\ &= \underbrace{(\rho_0 v_i + \rho(u_k - v_i)) \frac{\partial S}{\partial x_k}}_Q \delta(S) \quad (11) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial[\rho u_i H(S)]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [(\rho u_i u_k + p_{ik})H(S)] = \underbrace{p_{ik} + \rho u_i (u_k - v_k)}_{F_i} \frac{\partial S}{\partial x_k} \delta(S) \quad (12)$$

用Lighthill声模拟理论中做法改造成声波动方程，可得FWH方程：

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) [(\rho - \rho_0)H(S)] = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} [T_{ik}H(S)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [F_i \delta(S)] + \frac{\partial}{\partial t} [Q \delta(S)].$$

FWH公式分析

- Eq. (13)跟Eq. (5)相比，多了偶极子和单极子源。
- 远场解仍然使用类似公式Eq. (6)的方式，也就是说，固体移动壁面的存在被看作多处了若干声源，但是Green函数仍然可以采用自由空间的！
- 在计算模拟中，可以采用混合模式，近场采用CFD获得声源，然后远场采用FWH公式预测。
- 但由于物理上流体到声的转换效率很低，为了尽可能准确的捕捉声源，需要采用高精度计算格式。
- 实验验证采用近场声成像和远场声相关测试。
- 最后，在FWH公式中，如果壁面速度 $v \rightarrow 0$ ，即可得到Curle方程。