计算气动声学
二. 声学原理（二）

黄迅
特聘研究员

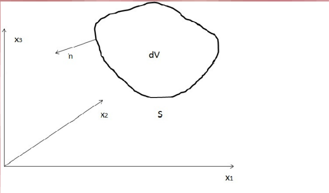
力学与空天技术系
工学院
北京大学

www.coe.pku.edu.cn/faculty/huangxun

感谢钟思阳帮助准备材料

基本方程

- 假设其余两个方向上声波均匀分布，可用一维声波简化模拟；
- 当声源尺寸<空间区域的特征尺度时，三维声波满足



$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1)$$

在笛卡尔坐标系中采用爱因斯坦约定求和，可写为

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2)$$

基本方程

同样对表面考虑动量定理，有

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla p' = 0. \tag{3}$$

该方程是向量方程，在三个方向分别写出则为

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

(1)式对时间求导，将(3)式代入后，考虑到$p' = c^2 \rho'$，有

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = 0. \tag{5}$$

同样道理，(3)式对时间求导，将(1)式代入后，有

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = 0. \tag{6}$$

考虑到$\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = \nabla^2 \vec{v} + \nabla \times (\nabla \times \vec{v})$，假设声音的速度场无涡量，即$\nabla \times \vec{v} = 0$，得速度$\vec{v}$也满足波动方程

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{v} = 0. \tag{7}$$

声场速度势

- 对方程(3)求涡量，考虑到$\nabla\times(\nabla p')=0$，有$\frac{\partial(\nabla\times\vec{v})}{\partial t}=0$.
- 所以若初始无旋，则$\nabla\times\vec{v}\equiv 0$，即声场为有势场。
- 对有势场，可以假设$\vec{v}=\nabla\varphi$，代入(3)式有$\nabla(\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}+p')=0$，可以得到

$$p'=f(t)-\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{8}$$

在假设只与时间相关的函数f(t)满足$\ddot{f}=0$时，φ也满足波动方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\nabla^2\varphi=0. \tag{9}$$

在以下几种情况下，可以将关于势函数的波动方程化为椭圆形的Laplace方程

- 流动为不可压缩流时，声速$c\to\infty$，
  故$\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\nabla^2\varphi=0\}|_{c\to\infty}=-\nabla^2\varphi=0.$
- 在接近于稳态流动的时候$\partial^2/\partial t^2=0$,也有$\nabla^2\varphi=0.$

三维声波的能量关系

方程(9)两端同时乘以$\frac{\rho_0}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$，第一项为：

$$\frac{\rho_0}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\{\frac{\rho_0}{2c^2}(\frac{\partial\varphi}{\partial t})^2\}=\frac{\partial}{\partial t}\{\frac{p'^2}{2\rho_0 c^2}\}$$

第二项为：

$$\begin{aligned}\frac{c^2\rho_0}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\nabla^2\varphi &= \rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_i}\\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\{\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\}-\rho_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i}(p'v_i)-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_0 v^2)\end{aligned}$$

将两项相加后有

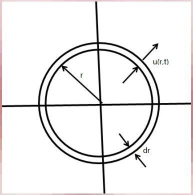
$$\frac{\partial}{\partial t}\{\frac{1}{2}\frac{p'^2}{\rho_0 c^2}+\frac{1}{2}\rho_0 v^2\}+\frac{\partial(p'v_i)}{\partial x_i}=0 \qquad (10)$$

其中$e_k=\frac{1}{2}\rho_0 v^2$为动能密度，$e_p=\frac{p'^2}{2\rho_0 c^2}$为势能密度，$\vec{I}=p\vec{v}$为intensity，有如下关系

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_k+e_p)=-\nabla\cdot\vec{I} \qquad (11)$$

球面声波(spherical wave)

假设球心在原点的球面波，压强和速度只为时间t和半径r的函数



在球坐标下，Laplace算子表示为

$$\nabla^2 = \frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}(\mathrm{r}^2\frac{\partial \mathrm{p}'}{\partial \mathrm{r}}) + \frac{1}{\mathrm{r}^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial \mathrm{p}'}{\partial\theta}) + \frac{1}{\mathrm{r}^2\sin\theta}\frac{\partial^2 \mathrm{p}'}{\partial\varphi^2}.$$

考虑到该情况下在θ,φ方向上并无变化，故方程写为：

$$\frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2 \mathrm{p}'}{\partial \mathrm{t}^2} = \frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}(\mathrm{r}^2\frac{\partial \mathrm{p}'}{\partial \mathrm{r}}). \quad (12)$$

经过简单的变换有

$$\frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{t}^2}(\mathrm{rp}') - \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{r}^2}(\mathrm{rp}') = 0, \quad (13)$$

其解形式为$\mathrm{p}'(\mathrm{r},\mathrm{t}) = \mathrm{f}(\mathrm{r}-\mathrm{ct})/\mathrm{r} + \mathrm{g}(\mathrm{r}+\mathrm{ct})/\mathrm{r}$.

球面声波(spherical wave)

- $f(r-ct)/r$表示向外传播的波，$g(r+ct)/r$表示自外向内传播的波
  - 因果条件：源点处的行为不应该受到以前声波的影响
  - 辐射条件(Sommerfeld)：在开空间中，方程的解应满足$r\{\frac{\partial p'}{\partial t}+c\frac{\partial p'}{\partial r}\}|_{r\to\infty}=0$
- 显然，只有形式为$f(r-ct)/r$的解满足以上两个条件，假设波的形式为$p'=\frac{Ae^{i\omega(t-r/c)}}{r}$，A是一个复常数，根据$\rho_0\partial u/\partial t=-\partial p'/\partial r$, 有

$$u(r,t)=\frac{A}{i\omega\rho_0}\{\frac{i\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\}e^{i\omega(t-r/c)}=\frac{A}{r}e^{i\omega(t-r/c-\phi/\omega)}\frac{\sqrt{1+(c/\omega r)^2}}{\rho_o c}, \tag{14}$$

其中$\phi=\arctan(c/\omega r)$，可以通过上面的式子，根据边条件确定出常数A

- 球面波速度与压强的关系为

$$u(r,t)=\frac{\sqrt{1+(c/\omega r)^2}}{\rho_o c}p'(r,t-\frac{\phi}{\omega}). \tag{15}$$

三维声波场的另一种阐述

- 若ϕ为波动方程的解，那么$\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$也是波动方程的解
- 通过微分运算，可以导出一系列的解来。
- 假设$\phi=\frac{f(r-ct)}{r}$是一个解，$p'(x,t)=\frac{\partial}{\partial x_1}\{\frac{f(r-ct)}{r}\}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\{\frac{f(r-ct)}{r}\}$($\phi$的存在性需要注意)，$\cos\theta=x_1/r$.

考虑一个运动的刚性球，速度为$(Ue^{i\omega t},0,0)$的实部，求解其产生的声波的情况。
由于声波的产生在于球的运动引起的振动，将声压写成$p'(x,t)=A\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\{\frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r}\}$.
在球表面处，$u=Ue^{i\omega t}$，假设$u(x,t)=B(x)e^{i\omega t}$,有

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}=i\omega\rho_0 u=-\frac{\partial p'}{\partial r}=-A\cos\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r}).$$

通过上式可以得到u的表达式，将边界处的值带入后可以确定A

$$A=\frac{-i\omega\rho_0 Ua^3e^{i\omega a/c}}{2(1+i\omega a/c)-\omega^2a^2/c^2}.$$

A. P. Dowling and J. E. Ffowcs Williams.
Sound and Sources of Sound,
Ellis Horwood Limited (1983).