计算气动声学
二. 声学原理（一）

黄迅
特聘研究员

力学与空天技术系
工学院
北京大学

www.coe.pku.edu.cn/faculty/huangxun

感谢钟思阳帮助准备材料

声的传播(propagation of sound)

- 声音是流场中扰动的传播
  - 扰动源(声源)可是不固体、液体、气体或者其他地方的振动
- 声音以机械波的形式传播
  - 声的传播需要介质。声速c：在空气中约为340m/s，在水中约为1500m/s
  - 一般情况下，声波在传播过程中，波前曲率逐渐变小，趋近于平面波

声音在传播过程中携带着能量

- 声波的能量使耳膜震动，通过inner hair cells使得人能感知到声音
- 人耳可感知的声波频率为20 – 20000Hz，其中对1kHz – 5KHz的频段最为敏感
- 使用声功率级(power level in decibel)衡量声波能量大小，

$$\mathrm{PWL} = 10\log_{10}\left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{W}_0}\right) \tag{1}$$

  其中$\mathrm{W}_0 = 10^{-12}$瓦，也称为参考功率
- 例：一般人大叫功率约为10^{-5}瓦，则PWL = 70dB，火箭发射的声因约为10^{7}瓦，SPL = 190dB

声波是线性运动

- 相较于平均的背景流动，声音的扰动很小
  - 假设流动的压强、密度为p_0, ρ_0，扰动的压强、密度为p', ρ'，$|\frac{p'}{p_0}| \ll 1, |\frac{\rho'}{\rho_0}| \ll 1$
  - 扰动粒子的运动速度也很小，记为$\vec{v}(\vec{x}, t)$
- 声压级(Sound pressure level)：声压的幅度很小，但是数量级的跨度却很大。

$$\mathrm{SPL} = 20\log_{10}\left(\frac{p'_{rms}}{0.0002\mu\mathrm{bar}}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{p'_{rms}}{2\times 10^{-5}\mathrm{pa}}\right) \tag{2}$$

其中$p_{rms}^2 = \overline{p'^2}$，$\bar{f}$表示函数f对时间的平均

  - 人耳感到刺痛的声压级大致为$130-140$dB，对应声压为千分之一大气压左右
  - 人耳的听力阈值为0dB，压强幅度为10^{-10}个大气压

声波是线性运动

- 在大多数情况下，声场是看以看做连续介质场
  - 声音的相关参数，压强、粒子速度、运动幅度等都是小量 $\lambda = \mathrm{c/f}$，考虑空气中$\mathrm{f = 1kHz}$的声波
  - $\mathrm{c = 340m/s}$，$\mathrm{u \sim 0.1m/s, u/c \sim 10^{-4}}$， $\mathrm{u \ll c}$，u为粒子扰动速度
  - $\lambda = 0.34\mathrm{m}$，$\mathrm{d = 10^{-4} \sim 10^{-5}m}$， $\mathrm{d} \ll \lambda$，d为粒子的扰动振幅
  - 听力阈值附近，$\mathrm{d \approx 10^{-11}m}$
- 声波的相互作用是线性的
  - 压强、速度、脉动密度等为小量，相乘的部分为更高阶小量，因此在传播过程中近似满足线性叠加原理
  - 声波的控制方程是流动方程的线性简化形式

声波的线性叠加

- 假设有两束声波，声压级(SPL)分别为80dB和85dB，若频率相同，二者相遇后叠加的声压级应如下计算：

因为频率相同，假设两束声波脉动压强分别为$p_1\cos(\omega t), p_2\cos(\omega t+\phi)$

则叠加后压强为$p' = p_1\cos(\omega t) + p_2\cos(\omega t+\phi)$

有：$p'^2 = p_1^2\cos^2(\omega t) + 2p_1\cos(\omega t)p_2\cos(\omega t+\phi) + p_2^2\cos^2(\omega t+\phi)$

即：$\overline{p'^2} = 0.5(p_1^2+p_2^2) + p_1p_2\cos\phi$

对于两束声波，$p_{irms} = \frac{p_i}{\sqrt{2}}, \quad i=1,2 \qquad p_1 = 0.503pa$

假设二者同相位，即$\phi=0$，有$\overline{p'^2} = 0.5(p_1+p_2)^2$

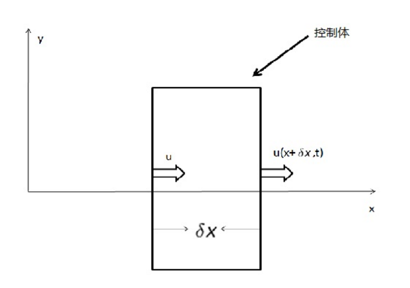
得$SPL = 20\log_10[\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(p_1+p_2)}{2\times10^{-5}}] = 88.9dB$

声场可视为理想流场

- 声波可以经过流动方程线性化得到，其中一个重要的原因的粘性项可以忽略
  - 雷诺数$\mathrm{Re}=\frac{\rho \mathrm{uL}}{\mu}=\frac{\frac{\rho \mathrm{u}^2}{\mathrm{L}}}{\mu\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{L}^2}} \sim \frac{\rho \mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}}{\mu\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2}}$，表示惯性力与粘性力之比
  - 选取波长λ为特征尺度，则$\mathrm{Re}=2\pi \mathrm{c}\lambda/\nu=\omega\lambda^2/\nu \sim 10^8$;
    选取粒子振幅d为特征尺度，$\mathrm{Re} \sim 10^4 \ll 1$
  - 与惯性力相比，粘性项的作用微乎其微。在声场中，可以忽略粘性作用
- 在远程传播中，粘性的作用会比较重要，但是声波已经传播了约为$\mathrm{Re}\times\lambda$的距离
- 在声场中，粘性作用、介质中分子结构的作用力可视为理想流场中的一种影响很小的修正作用

一维波动方程

假设声波各参数只与方向x位置相关，声压、密度、脉动速度分别记为$p(x,t), \rho(x,t), \vec{v}(x,t)$，有$\vec{v}(x,t) = (u(x,t), 0, 0)$



假设背景流场密度为ρ_0，ρ'为脉动粒子密度，由质量守恒

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}\delta x = \{(\rho_0 + \rho')u\}(x,t) - \{(\rho_0 + \rho')u\}(x + \delta x, t)$$

假设背景流动定常，且关于x方向密度ρ_0均匀分布，注意到u, ρ'等都为小量，有

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

一维波动方程

考虑动量方程，且$p = p_0 + p', \rho = \rho_0 + \rho'$有

$$(\rho_0 + \rho')\frac{\partial u}{\partial x}\delta x = p_0 + p'(x,t) - (p_0 + p'(x+\delta x, t))$$

忽略高阶小量，有

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

联合(3), (4)两式，有

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \tag{5}$$

假设p只为密度ρ的函数，即$p = p_0 + (\rho - \rho_0)\frac{dp}{d\rho}|_{\rho_0} + \cdots$，忽略高次

$$p' = \rho'\frac{dp}{d\rho}|_{\rho_0} \tag{6}$$

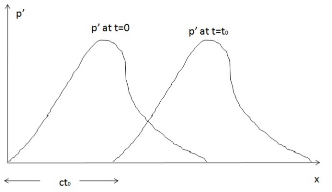
令$c^2 = \frac{dp}{d\rho}|_{\rho_0}$，有$p' = c^2\rho'$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \tag{7}$$

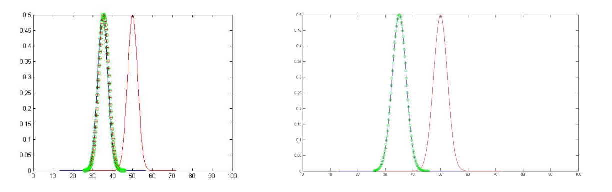
上式即为一维声波方程

一维声波方程

上述一维波动方程解的一般形式为$p'(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$，两项分别表示$\pm x$向方向传播



考虑初始时刻$p'(x) = 0.5e^{-\frac{(x-20)^2}{9}}$的声波，对空间离散使用DRP方法，时间分别使用经典4阶RK方法，以及傅里叶变换的方法（代码见附录），结果与精确解对比如下



粒子速度的确定

考虑声波方程中朝x方向传播的一项$p' = f(x - ct)$

由$p' = c^2\rho' \implies \rho' = p'/c^2 = c^{-2}f(x - ct)$

令$X = x - ct$,有$\frac{\partial\rho'}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{df}{dX}$

有方程(3)知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 c}\frac{df}{dX}(X) = \frac{1}{\rho_0 c}\frac{\partial f}{\partial x}(x - ct)$$

积分后有$u(x,t) = \frac{1}{\rho_0 c}f(x - ct)$,即

$$u = \frac{p'}{\rho_0 c} \tag{8}$$

同样的道理，朝−x方向的声波速度声压关系为

$$u = -\frac{p'}{\rho_0 c} \tag{9}$$

其中$\rho_0 c$称为声阻

声速c的确定

由波动方程的解可知，c表示初始的扰动向波传播方向的速度 在假设压强p只为密度ρ的函数的情况下，$c^2 = \frac{dp}{d\rho}|_{\rho_0}$

- 等温模型
  17世纪牛顿利用波义耳定律，$p/\rho = f(T)$

  在$T = 293K$时，有$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = 84000 m^2/s^2$

  得$c \approx 290 m/s$，与实际情况相差较大

- 等熵(绝热)模型
  1816年Laplace观察到介质在进行热交换的一段时间内，声波已经传播了很远，所以提出等熵模型

  对理想气体$p/p^\gamma = p_0/p_0^\gamma$ 与 $p = \rho RT$

  在$T = 293K$时，有$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \gamma RT = \gamma p_0/\rho_0 = 117700 m^2/s^2$

  得$c = 343 m/s$，与实际情况符合得很好

声波的能量关系

方程(3)两边同时乘上$c^2\rho'$经过简单的整理，有

$$\frac{c^2}{2\rho_0}\frac{\partial \rho'^2}{\partial t}+p'\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{10}$$

方程(4)两端乘以u，整理后有

$$\frac{\rho_0}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t}+u\frac{\partial p'}{\partial x}=0 \tag{11}$$

两式相加，有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_0 u^2}{2}+\frac{c^2\rho'^2}{2\rho_0}\right)+\frac{\partial}{\partial x}(p'u)=0 \tag{12}$$

容易看出$\frac{\rho_0 u^2}{2}$表示动能密度，记为e_k

另外$\frac{c^2\rho'^2}{2\rho_0}$表示势能密度，记为$e_p$，理由如下

对于一段控制体而言，其势能$Ep=\int_V e_p dV=-\int p' dV$

对质量一定的控制体V_0，$p'=c^2\rho', dV=-\frac{V_0}{\rho_0}d\rho$

可以得到：$-\int p'dV=\frac{V_0 c^2}{\rho_0}\int \rho' d\rho'=V_0\frac{\rho'^2}{2\rho_0}$

声波的能量关系

$p'u$称为intensity，记作I，表示的是声波穿过单位面积上的功率值

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_k + e_p) = -\frac{\partial I}{\partial x} \tag{13}$$

声强级定义(IL||intensity level)为:

$$IL = 10\log_{10}\left(\frac{\bar{I}}{10^{-12}W/m^2}\right)dB \tag{14}$$

因为$u = p'/(\rho_0 c) = \frac{c\rho'}{\rho_0}$

$$e_k = \frac{c^2\rho'^2}{2\rho_0} = e_p \tag{15}$$

$$I = p'u = \frac{c^3\rho'^2}{\rho_0} = c(e_k + e_p) = ce \tag{16}$$

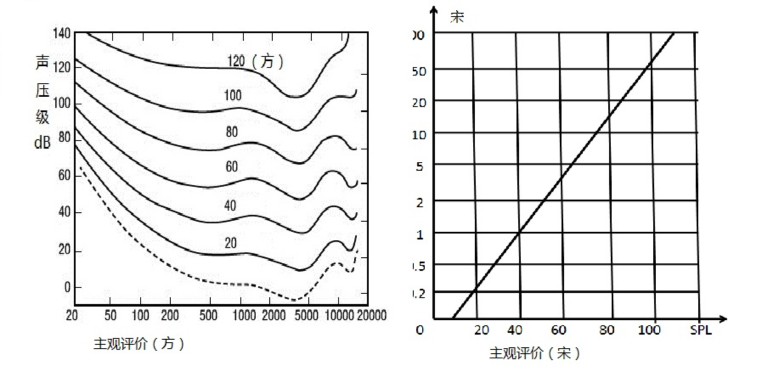
故而有关于总能量密度e的方程也满足波动方程:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + c\frac{\partial e}{\partial x} = 0 \tag{17}$$

噪音强弱的主观评价

声压级、声强级是描述声音强弱的客观指标，响度级是描述声音强弱的主观指标，用方(phon)表示

- 方的定义为：在某个特定频率下，一般人对此声音的响度感受与1kHz的纯音N方相同，则称该声音为N方。
- 宋(sone)的定义：N宋是指对于观察者而言，感受到的响度是1kHz、40方的纯音的N倍



A. P. Dowling and J. E. Ffowcs Williams.
Sound and Sources of Sound,
Ellis Horwood Limited (1983).