Proceedings of the 25th Chinese Control Conference
7-11 August, 2006, Harbin, Heilongjiang

混合摄动下不确定系统的鲁棒镇定

孙 伟，耿志勇

北京大学湍流与复杂系统国家重点实验室; 北京大学工学院力学与空天技术系, 北京 100871
E-mail: sunwei2004@pku.edu.cn

摘 要: 本文研究了积分二次约束下具有混合摄动的不确定系统的鲁棒控制器设计问题.通过LMI综合方法与鲁棒稳定性频域判据相结合,将鲁棒控制器设计问题转化为求解LMI可行解问题.

关键词: 积分二次约束, 鲁棒镇定, 线性矩阵不等式

Robust Stabilization of Uncertain Systems with Mixed Perturbation

Sun Wei, Geng Zhiyong

State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems and Department of Mechanics and Aerospace Technology, Peking University, Beijing 100871
E-mail: sunwei2004@pku.edu.cn

Abstract: This paper studies the problem of robust controller design for the systems with mixed uncertainties which are described by integral quadratic constraints and parametric perturbations. By combining the method of LMI synthesis with the criterion of robust stability, the problem of robust controller design is converted to that of finding feasible solution of the LMIs.

Key Words: Integral Quadratic Constraint, Robust Stabilization, Linear Matrix Inequalities.

1. 引言（Introduction）

在控制科学研究的对象——控制系统中，由于种种原因而存在不确定性或摄动，一般可分为参数不确定性、动态不确定性、混合摄动等。鲁棒控制就是针对这些不确定系统的确定性处理方法。A.Megretski和A.Rantzer发展了鲁棒控制的一个新的分支——积分二次约束(IQC)，通过引入非因果乘子，拓广了积分二次约束的原始描述，从而将目前已知的许多关于系统动态不确定性的描述纳入一个统一的框架之下。文献[1]给出了一个判定系统反馈连接的稳定性的基本定理。目前IQC方法虽然在稳定性分析上获得成功，但如何利用该方法解决系统镇定问题，还远没有解决。如何设计带有积分二次约束不确定性系统的鲁棒控制器，具有重要的理论和实际意义。

本文研究混合摄动下不确定系统的鲁棒镇定问题，利用LMI综合的方法，将IQC问题转化为线性矩阵不等式（LMIs）求解问题，给出了控制器存在的充分条件。

IEEE Catalog Number: 06EX1310
此项工作得到国家自然科学基金资助，项目批准号：60374039,60334030.

2. 问题的描述(Problem Formulation)

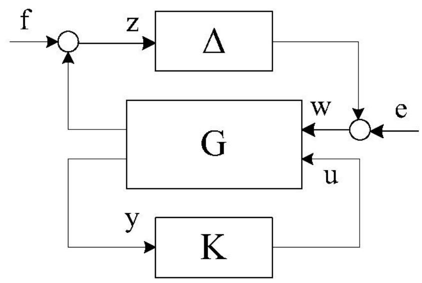

Figure1：混合摄动不确定系统

考虑图1所示混合摄动不确定系统，其输入输出描述为：

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$w = \Delta z + e \tag{1}$$
$$u = Ky$$

其中$z \in L^{l}_{2e}$和$y \in L^{p}_{2e}$分别是不确定输出和控制输入信号；而$w \in L^{m}_{2e}$和$u \in L^{q}_{2e}$分别是不确定输入和控

制输入信号；G是带有参数不确定性的广义受控对象，传递函数为$G(s)\in R(s)^{(l\times p)\times(m+q)}$，其状态空间实现可写成如下形式：

$$G(s)=\left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right] \tag{2}$$

其中 $A=\sum_{i=1}^{\alpha}A_i\lambda_i\in R^{n\times n}$，$\sum_{i=1}^{\alpha}\lambda_i=1$，$\lambda_i\ge 0$，表示系统的参数不确定性。

$\Delta: L^l{}_{2e}\to L^m{}_{2e}$为不确定有界因果算子，表示系统的动态不确定性。

设$\Pi(j\omega)=\Pi^*(j\omega)\in RL^\infty(C^{(l+m)\times(l+m)})$，以及w=Δz，称Δ为满足由乘子Π定义的积分二次约束[1]，系指

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\begin{bmatrix}\hat{z}(j\omega)\\ \hat{w}(j\omega)\end{bmatrix}^*\Pi(j\omega)\begin{bmatrix}\hat{z}(j\omega)\\ \hat{w}(j\omega)\end{bmatrix}d\omega\ge 0,\quad \forall\omega\in\bar{R}$$

其中$\hat{z}$、$\hat{w}$非别表示相应信号的Fourier变换。满足上述积分二次约束的不确定算子的集合记为Δ_Π。不确定性的积分二次约束描述可以代表鲁棒控制中所涉及到的相当广泛的一类不确定摄动模式。

设K为镇定闭环系统并带有传递函数$K(s)\in RH^\infty(C^{p\times q})$的线性时不变控制器，其状态空间实现为：

$$K(s)=\left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array}\right], \tag{3}$$

其中 $A_K\in R^{n_K\times n_K}$ 。则从w到z的传递函数矩阵为

$$T_{zw}(s)=\left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c} A+B_2D_KC_2 & B_2C_K & B_1+B_2D_KD_{21} \\ B_KC_2 & A_K & B_KD_{21} \\ \hline C_1+D_{12}D_KC_2 & D_{12}C_K & D_{11}+D_{12}D_KD_{21} \end{array}\right] \tag{4}$$

定义1 称控制器$K(s)\in RH^\infty(C^{p\times q})$鲁棒镇定不确定广义受控对象，系指

1) $T_{zw}(s)\in RH^\infty(C^{l\times m})$;

2) 对于任意$\Delta\in\Delta_\Pi$，由信号$[e, f]^T$可唯一确定信号$[w, z]^T$；

3) 存在常数$\gamma>0$，使得对任意$T>0$有

$$\int_0^T(|z|^2+|w|^2)dt\le\gamma\int_0^T(|e|^2+|f|^2)dt \tag{5}$$

满足条件1)的控制器称为标称控制器。条件2)给出的是闭环系统的适定性，本质上是保证了闭环系统的微分方程的解的存在唯一性。条件3) 所给出的是由$T_{zw}(s)$和Δ构成的反馈系统的内稳定性。

假定定义1的条件1)，2)满足，同时假设$\Delta\in\Delta_\Pi$可保证对任意$\tau\in[0, 1]$，有$\tau\Delta\in\Delta_\Pi$，则关于闭环系统的稳定性有如下定理。

定理1[1] 若下列频域不等式成立，

$$\begin{bmatrix}T_{zw}(j\omega)\\ I\end{bmatrix}^*\Pi(j\omega)\begin{bmatrix}T_{zw}(j\omega)\\ I\end{bmatrix}<0,\quad \forall\omega\in\bar{R} \tag{6}$$

则闭环系统(1)为鲁棒稳定的。

本文所要研究的问题是在假定满足定义1的条件1)、2)的控制器集合非空的情况下，用线性矩阵不等式方法寻求控制器，使得定理1的条件得到满足，从而得到混合摄动系统的鲁棒控制器。

3. 鲁棒镇定的LMI方法(LMI Method of Robust Stabilization)

首先我们定义矩阵

$$J_K=\begin{bmatrix}A_K & B_K\\ C_K & D_K\end{bmatrix}$$

该矩阵包含了控制器的全部参数。

则(4)可改写成如下形式：

$$\begin{bmatrix}A_{cl} & B_{cl}\\ C_{cl} & D_{cl}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A} & \bar{B}\\ \bar{C} & \bar{D}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\underline{B}\\ \underline{D}_{12}\end{bmatrix}J_K\begin{bmatrix}\underline{C} & \underline{D}_{21}\end{bmatrix} \tag{7}$$

其中

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\bar{B}=\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix},\bar{C}=\begin{bmatrix}C_1 & 0\end{bmatrix},\underline{C}=\begin{bmatrix}0 & I\\ C_2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\underline{B}=\begin{bmatrix}0 & B_2\\ I & 0\end{bmatrix},\underline{D}_{12}=\begin{bmatrix}0 & D_{12}\end{bmatrix},\underline{D}_{21}=\begin{bmatrix}0\\ D_{21}\end{bmatrix},\bar{D}=D_{11}$$

令

$$J_{cl}=\begin{bmatrix}A_{cl} & B_{cl}\\ C_{cl} & D_{cl}\end{bmatrix},J=\begin{bmatrix}\bar{A} & \bar{B}\\ \bar{C} & \bar{D}\end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}\underline{B}\\ \underline{D}_{12}\end{bmatrix},R=\begin{bmatrix}\underline{C} & \underline{D}_{21}\end{bmatrix}$$

则(7)式可写成

$$J_{cl}=J+LJ_KR \tag{8}$$

设 (6)中乘子$\Pi(j\omega)$具有如下结构：

$$\Pi(j\omega)=\begin{bmatrix}\Gamma(j\omega) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}^*M\begin{bmatrix}\Gamma(j\omega) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}$$

其中Γ是一个带有稳定传递函数的线性算子并具有如下实现：

$$\Gamma(j\omega)=C_\Gamma\left(j\omega I-A_\Gamma\right)^{-1}B_\Gamma+D_\Gamma$$

其中A_Γ是$(n_\Gamma\times n_\Gamma)$的Hurwitz 矩阵；$M$是一个具有如下结构的实对称矩阵：

$$M=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}$$

其中$M_{11}>0$，$M_{22}<0$，$M^*_{12}=M_{12}$。则(6)等价于

$$\begin{bmatrix}\Gamma(j\omega)T_{zw}(j\omega)\\ I\end{bmatrix}^*M\begin{bmatrix}\Gamma(j\omega)T_{zw}(j\omega)\\ I\end{bmatrix}<0. \tag{9}$$

现设

$$\Phi(j\omega)=\Gamma(j\omega)T_{zw}(j\omega)=\left[\begin{array}{c|c} A_\Phi & B_\Phi \\ \hline C_\Phi & D_\Phi \end{array}\right]$$

其中

$$A_\Phi=\begin{bmatrix} A_\Gamma & B_\Gamma C_{cl} \\ 0 & A_{cl} \end{bmatrix}, B_\Phi=\begin{bmatrix} B_\Gamma D_{cl} \\ B_{cl} \end{bmatrix}$$

$$C_\Phi=\begin{bmatrix} C_\Gamma & D_\Gamma C_{cl} \end{bmatrix}, D_\Phi=D_\Gamma D_{cl}$$

利用KYP引理[2]，有如下结果：

引理1 $\Phi(j\omega)=\Gamma(j\omega)T_{zw}(j\omega)$，则下列条件等价：

1) 矩阵A_Φ是Hurwitz的，且

$$\begin{bmatrix} \Phi(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} \Phi(j\omega) \\ I \end{bmatrix} < 0$$

2) 存在$X_\Phi > 0$，使得

$$\begin{bmatrix} A^*_\Phi X_\Phi + X_\Phi A_\Phi & X_\Phi B_\Phi + C^*_\Phi M_{12} & C^*_\Phi \\ B^*_\Phi X_\Phi + M_{21} C_\Phi & D^*_\Phi M_{12} + M_{21} D_\Phi + M_{22} & D^*_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi & -M_{11}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{10}$$

证明：注意到

$$\begin{bmatrix} \Phi(j\omega) \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(j\omega I - A_\Phi\right)^{-1} B_\Phi \\ I \end{bmatrix}$$

应用KYP引理，则1)等价于$\exists X_\Phi > 0$，使得.

$$\begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \\ 0 & I \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^*_\Phi X_\Phi + X_\Phi A_\Phi & X_\Phi B_\Phi \\ B^*_\Phi X_\Phi & 0 \end{bmatrix} < 0$$

注意到

$$\begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \\ 0 & I \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^*_\Phi \\ D^*_\Phi \end{bmatrix} M_{11} \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & C^*_\Phi M_{12} \\ M_{21} C_\Phi & D^*_\Phi M_{12} + M_{21} D_\Phi + M_{22} \end{bmatrix}$$

则上式等价于

$$\begin{bmatrix} C^*_\Phi \\ D^*_\Phi \end{bmatrix} M_{11} \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^*_\Phi X_\Phi + X_\Phi A_\Phi & X_\Phi B_\Phi + C^*_\Phi M_{12} \\ B^*_\Phi X_\Phi + M_{21} C_\Phi & D^*_\Phi M_{12} + M_{21} D_\Phi + M_{22} \end{bmatrix} < 0$$

又有$-M_{11} < 0$，利用Schur补即可得到结论。□

定义

$$\tilde{J}_\Phi = \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} X_\Phi & 0 \\ 0 & M_{21} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -M_{11}^{-1} \end{bmatrix}$$

(10)式可写成

$$\begin{bmatrix} W\tilde{J}_\Phi & 0 \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} W\tilde{J}_\Phi & 0 \end{bmatrix} + \tilde{M} < 0 \tag{11}$$

现设

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_\Gamma & B_\Gamma C_1 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \overline{A}_\Phi = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} B_\Gamma D_{11} \\ B_1 \end{bmatrix}, \quad \overline{B}_\Phi = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} C_\Gamma & D_\Gamma C_1 \end{bmatrix}, \quad \overline{C}_\Phi = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}_{11} = D_\Gamma D_{11}, \quad \overline{D}_\Phi = \tilde{D}_{11}$$

$$\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} B_\Gamma D_{12} \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_\Phi = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{B}_2 \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}_{12} = D_\Gamma D_{12}, \quad \underline{D}_{\Phi 12} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{D}_{12} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{C}_\Phi = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \tilde{C}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}_{21} = D_{21}, \quad \underline{D}_{\Phi 21} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{D}_{21} \end{bmatrix}$$

我们有

$$\tilde{J}_\Phi = \begin{bmatrix} \overline{A}_\Phi & \overline{B}_\Phi \\ \overline{C}_\Phi & \overline{D}_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B}_\Phi \\ \underline{D}_{\Phi 12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C}_\Phi & \underline{D}_{\Phi 21} \end{bmatrix}$$

记

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_\Gamma & B_\Gamma C_1 \\ 0 & A_i \end{bmatrix}, \quad \overline{A}^i_\Phi = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{J}^i_\Phi = \begin{bmatrix} \overline{A}^i_\Phi & \overline{B}_\Phi \\ \overline{C}_\Phi & \overline{D}_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B}_\Phi \\ \underline{D}_{\Phi 12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C}_\Phi & \underline{D}_{\Phi 21} \end{bmatrix}$$

由$A = \sum_{i=1}^{\alpha} A_i \lambda_i \in R^{n\times n}$，$\sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$

我们得到

$$\tilde{J}_\Phi = \sum_{i=1}^{\alpha} \tilde{J}^i_\Phi \lambda_i$$

则(11)等价于

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \left(\begin{bmatrix} W\tilde{J}^i_\Phi & 0 \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} W\tilde{J}^i_\Phi & 0 \end{bmatrix} + \tilde{M} \right) \lambda_i < 0 \tag{12}$$

借助引理1和(12)，容易得到如下结果：

引理2 若存在$X_\Phi > 0$，使得

$$\begin{bmatrix} W\tilde{J}^i_\Phi & 0 \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} W\tilde{J}^i_\Phi & 0 \end{bmatrix} + \tilde{M} < 0 \qquad i=1,2\ldots\alpha \tag{13}$$

则控制器K使闭环系统(1)鲁棒稳定。

证明：若$\exists X_\Phi > 0$满足不等式组(13)，显然可以满足(12)，这等价于(10)成立，根据引理1，定理1频域不等式成立，从而闭环系统(1)为鲁棒稳定的。

□

不等式组(13)是控制器镇定不确定对象凸多面体的α个顶点对象所需满足的条件，我们考虑其中第i个顶点：

$$\begin{bmatrix} W\tilde{J}^i_\Phi & 0 \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} W\tilde{J}^i_\Phi & 0 \end{bmatrix} + \tilde{M} < 0 \qquad i \in \underline{\alpha} \tag{14}$$

设

$$\tilde{J}_i=\begin{bmatrix}\bar{A}^i_\Phi & \bar{B}_\Phi\\ \bar{C}_\Phi & \bar{D}_\Phi\end{bmatrix},\tilde{L}=\begin{bmatrix}\underline{B}_\Phi\\ \underline{D}_{\Phi12}\end{bmatrix},\tilde{R}=\begin{bmatrix}\underline{C}_\Phi & \underline{D}_{\Phi21}\end{bmatrix}$$

则

$$\tilde{J}^i_\Phi=\tilde{J}_i+\tilde{L}J_K\tilde{R} \tag{15}$$

则(14)等价于

$$\begin{bmatrix}W\tilde{J}_i & 0\end{bmatrix}^*+\begin{bmatrix}W\tilde{J}_i & 0\end{bmatrix}+\tilde{M}$$

$$+\begin{bmatrix}\tilde{R}^*\\ 0\end{bmatrix}J_K{}^*\tilde{L}^*W^*+W\tilde{L}J_K\begin{bmatrix}\tilde{R} & 0\end{bmatrix}<0$$

这是一个关于J_K的线性矩阵不等式，它具有如下形式

$$H^i{}_{X_\Phi}+Q^*J^*{}_KP_{X_\Phi}+P^*{}_{X_\Phi}J_KQ<0 \tag{16}$$

其中

$$H^i{}_{X_\Phi}=$$

$$\begin{bmatrix}\bar{A}^{i*}_\Phi X_\Phi+X_\Phi\bar{A}^i_\Phi & X_\Phi\bar{B}_\Phi+\bar{C}^*_\Phi M_{12} & \bar{C}^*_\Phi\\ \bar{B}^*_\Phi X_\Phi+M_{21}\bar{C}_\Phi & \bar{D}^*_\Phi M_{12}+M_{21}\bar{D}_\Phi+M_{22} & \bar{D}^*_\Phi\\ \bar{C}_\Phi & \bar{D}_\Phi & -M^{-1}_{11}\end{bmatrix}$$

$$P_{X_\Phi}=\tilde{L}^*W^*$$

设

$$P=\begin{bmatrix}0 & I & 0 & 0\\ \tilde{B}^*_2 & 0 & \tilde{D}^*_{12}M_{12} & \tilde{D}^*_{12}\end{bmatrix}$$

$$S=\begin{bmatrix}X_\Phi & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}$$

则 $P_{X_\Phi}=PS$

$$Q=\begin{bmatrix}\tilde{R} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I & 0 & 0\\ \tilde{C}_2 & 0 & \tilde{D}_{21} & 0\end{bmatrix}$$

设

$$T^i{}_{X_\Phi}=\left(S^{-1}\right)^*H^i{}_{X_\Phi}S^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}X^{-1}{}_\Phi\bar{A}^{i*}_\Phi+\bar{A}_\Phi X^{-1}{}_\Phi & \bar{B}_\Phi+X^{-1}{}_\Phi\bar{C}^*_\Phi M_{12} & X^{-1}{}_\Phi\bar{C}^*_\Phi\\ \bar{B}^*_\Phi+M_{21}\bar{C}_\Phi X^{-1}{}_\Phi & \bar{D}^*_\Phi M_{12}+M_{21}\bar{D}_\Phi+M_{22} & \bar{D}^*_\Phi\\ \bar{C}_\Phi X^{-1}{}_\Phi & \bar{D}_\Phi & -M^{-1}_{11}\end{bmatrix}$$

借助投影引理[3]，我们可以得到

引理3 存在J_K使得

$$H^i{}_{X_\Phi}+Q^*J^*{}_KP_{X_\Phi}+P^*{}_{X_\Phi}J_KQ<0$$

当且仅当

$$N^*{}_PT^i{}_{X_\Phi}N_P<0 \tag{17}$$

$$N^*{}_QH^i{}_{X_\Phi}N_Q<0 \tag{18}$$

同时成立，其中 $\mathrm{Im}N_P=\mathrm{Ker}P$，$\mathrm{Im}N_Q=\mathrm{Ker}Q$。

证明：根据投影引理，∃J_K 使得(16)成立，当且仅当

$$N^*{}_{P_{X_\Phi}}H^i{}_{X_\Phi}N_{P_{X_\Phi}}<0，\quad N^*{}_QH^i{}_{X_\Phi}N_Q<0$$

同时成立，其中 $\mathrm{Im}N_{P_{X_\Phi}}=\mathrm{Ker}P_{X_\Phi}$，$\mathrm{Im}N_Q=\mathrm{Ker}Q$。又由 $P_{X_\Phi}=PS$，则

$$N^*{}_{P_{X_\Phi}}H^i{}_{X_\Phi}N_{P_{X_\Phi}}<0$$

成立当且仅当

$$N^*{}_PT^i{}_{X_\Phi}N_P<0$$

从而引理得证。 □

下面的问题是将引理3中的非凸条件转化为LMI条件。

注意到 $X_\Phi\in R^{(n+n_\Gamma+n_K)\times(n+n_\Gamma+n_K)}$，定义$X$、$Y\in R^{(n+n_\Gamma)\times(n+n_\Gamma)}$为$X_\Phi$、$X_\Phi{}^{-1}$的子矩阵：

$$X_\Phi=\begin{bmatrix}X & X_2\\ X^*_2 & X_3\end{bmatrix},X^{-1}{}_\Phi=\begin{bmatrix}Y & Y_2\\ Y^*_2 & Y_3\end{bmatrix}, \tag{19}$$

以下定理给出了系统(1)综合问题的一个充分条件。

定理2 如果存在$X>0$，$Y>0$，满足如下$2\alpha+1$个线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}N_o & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}^*\Theta\begin{bmatrix}N_o & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}<0$$

$$\begin{bmatrix}N_c & 0\\ 0 & V_3\end{bmatrix}^*\Xi\begin{bmatrix}N_c & 0\\ 0 & V_3\end{bmatrix}<0$$

$$\begin{bmatrix}X & I\\ I & Y\end{bmatrix}\geq 0$$

其中

$$\Theta=\begin{bmatrix}\tilde{A}_i^*X+X\tilde{A}_i & X\tilde{B}_1+\tilde{C}^*_1M_{12} & \tilde{C}^*_1\\ \tilde{B}_1X+M_{21}\tilde{C}_1 & \tilde{D}^*_{11}M_{12}+M_{21}\tilde{D}_{11}+M_{22} & \tilde{D}^*_{11}\\ \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{11} & -M^{-1}_{11}\end{bmatrix}$$

$$\Xi=\begin{bmatrix}\tilde{A}_iY+Y\tilde{A}^*_i & Y\tilde{C}^*_1 & \tilde{B}_1+Y\tilde{C}^*_1M_{12}\\ \tilde{C}_1Y & -M^{-1}_{11} & \tilde{D}_{11}\\ \tilde{B}^*_1+M_{21}\tilde{C}_1Y & \tilde{D}^*_{11} & \tilde{D}^*_{11}M_{12}+M_{21}\tilde{D}_{11}+M_{22}\end{bmatrix}$$

$$i=1,2\ldots\alpha$$

N_o和N_c为满秩矩阵，它们的像满足

$$\mathrm{Im}N_o=\mathrm{Ker}\begin{bmatrix}\tilde{C}_2 & \tilde{D}_{21}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Im}N_c=\mathrm{Ker}\begin{bmatrix}\tilde{B}^*_2 & \tilde{D}^*_{12}\end{bmatrix}$$

而 $\mathrm{Im}V_3=\mathrm{Ker}\tilde{D}^*_{12}M_{12}$。则存在控制器$K$，$n_K\geq n+n_\Gamma$，使得闭环系统(1)鲁棒稳定。

证明：设

$$N_P=\begin{bmatrix}V_1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & V_3\\ V_2 & 0\end{bmatrix},\quad N_Q=\begin{bmatrix}U_1 & 0\\ 0 & 0\\ U_2 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = N_o,\quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = N_c$$

为满秩矩阵且满足

$$\operatorname{Im} N_o = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & \tilde{D}_{21} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Im} N_c = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} \tilde{B}_2^* & \tilde{D}_{12}^* \end{bmatrix}$$

而 $\operatorname{Im} V_3 = \operatorname{Ker} \tilde{D}_{12}^* M_{12}$。

将 N_P、N_Q 及(19)带入(17)、(18)化简可得

$$\begin{bmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & V_3 \end{bmatrix}^* \Xi \begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & V_3 \end{bmatrix} < 0$$

对于 $\forall i \in \underline{\alpha}$，有上面两不等式成立，则定理2的前2 α 个不等式成立。根据引理2，此时控制器K使闭环系统(1)鲁棒稳定。

又 $\forall X$、Y，$\exists X_\Phi$、X_Φ^{-1}满足(19)当且仅当

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0,\quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \leq n + n_\Gamma + n_K$$

取 $n_K \geq n + n_\Gamma$，这样秩条件将自动满足，仅剩LMI条件，从而得到定理结论。 □

4. 结论(Conclusion)

混合摄动下的不确定系统鲁棒镇定问题，可以通过结合积分二次约束稳定性判据转化为控制器设计的LMI问题，通过求解线性矩阵不等式，求得可行控制器的状态空间实现。本文所给的控制器设计的LMI方法，是一种充分性方法，其保守性根源于积分二次约束下鲁棒稳定性判据。

参考文献

[1] A.Megretski,A.Rantzer. System analysis via integral quadratic constraints. IEEE Trans.Automat.Contrl.,Vol.42(1997)

[2] J.C.Willems. The Analysis of Feedback Systems. MIT Press,1971

[3] 俞立，鲁棒控制一线性矩阵不等式处理方法，清华大学出版社，北京，2002

[4] G.Dullerud ,F.Paganini. A Course in Robust Control Theory. New York : Springer, c2000

[5] 耿志勇，积分二次约束下系统鲁棒镇定的凸参数化方法(投送《自动化学报》)

[6] 黄琳，稳定性与鲁棒性的理论基础，科学出版社，北京，2003