Proceedings of the 26th Chinese Control Conference
July 26-31, 2007, Zhangjiajie, Hunan, China

具有静态非线性互联结构的分布式异构系统的稳定性*

耿志勇
北京大学湍流与复杂系统国家重点实验室, 北京大学工学院力学与空天技术系, 北京 100871
E-mail: zygeng@pku.edu.cn

摘　要: 本文研究了一类具有非线性静态互联结构的分布式异构网络的 L_2 稳定性。假定网络的节点为有限平方可积空间上的单输入单输出算子, 节点之间通过满足扇区条件的非线性时变静态环节互联。对于这样构成的分布式异构网络系统, 首先建立了网络互联映射满足的代数二次约束条件, 在此基础上, 在假定网络互联适定的条件下给出了网络具有有界增义 L_2 稳定的条件。进一步, 当节点动力学由线性时不变算子刻画时, 给出了网络具有有界增义 L_2 稳定的频域条件。

关键词: L_2 稳定性, 分布式系统, 异构系统, 网络, 非线性互联系统

Stability of Distributed Heterogenous Systems with Static Nonlinear Interconnections

Geng Zhiyong
State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems, and Department of Mechanics and Aerospace Engineering,
Peking University, Beijing 100871, P.R. China
E-mail: zygeng@pku.edu.cn

Abstract: The paper studies the problem of L_2 stability of distributed heterogenous systems with static nonlinear interconnection structures. Under the assumptions that the nodes of the network are the single input single output operators defined on the finite square integrable space, and that the nodes are interconnected by the time-varying static nonlinearities that satisfies the sector condition. For such constructed distributed heterogenous systems, the algebraic quadratic condition that is satisfies by the interconnection mapping of the network is established first. Based on this, under the assumption that the interconnection of the network is well-posed, the condition that the network is of finite gain L_2 stability is presented. Further more, when the dynamics of the nodes are described by linear time invariant operators, the frequency domain condition that insures the finite gain L_2 stability of the network is put forward.

Key Words: L_2 stability, distributed systems, heterogenous systems, network, nonlinearly interconnected systems

1　引 言

随着现信息技术的发展, 控制、计算以及通信技术相互融合, 给现代控制系统带来了深刻的变化。嵌入式技术的成熟以及微处理器成本的大幅度降低, 使得嵌入式传感器和嵌入式控制器广泛用于现代控制系统, 系统中每一个子系统具有局部数据处理和远程通讯的功能, 控制系统具有广泛的空间分布性, 同时, 不同子系统之间借助于远程通讯相互合作共同完成复杂的任务。现代控制系统已不再是简单的反馈回路构成的闭环系统, 而是一个多回路分布式异构网络。近年来, 网络控制的研究成为控制理论研究的又一热点, 其中典型的问题有编队控制 [1-2], 同步控制 [3], 多智能体合作控制 [4] 等。上述典型研究问题都假定网络的节点有完全相同和几乎相同的动力学模型, 同时不考虑系统与外部环境的相互作用。而现实中还有一大类系统, 他们的网络节点具有完全不同的动力学模型, 而且网络是通过于执行外部指令来完成复杂的控制任务, 如工业企业中广泛采用的分布式系统, 现场总线系统, 交通、航空的指挥管理系统都是这种系统的典型例子。这种系统的典型特征是实时信号处理功能和全系统层面的控制功能并存, 其构成体系结构上具有典型的异构性。对于这样一类分布式异构网络, 研究其稳定性, 对于网络正常工作具有重要的意义。早期的代表性研究工作主要是由 Moylan and Hill[5] 给出的大系统的稳定性判据, 该研究将系统的节点作为耗散子系统, 并通过对网络互联矩阵满足耗散性互联条件的约束，给出了系统输入输出稳定性判据。近年的代表性研究工作有 Dullerud and Andrea[6] 给出的稳定性分析与综合凸性条件, 该研究利用多维时空序列信号空间上的算子理论, 通过定义复合位移算子和超对角算子, 将分布式异构网络的模型在形式上化为类似于线性时不变系统传递函数的输入输出关系, 并借助于 Parrott 定理以及 KYP 引理, 给出了稳定性分析的线性矩阵不等式判据。Lestas and Vinnicombe 针对由线性时不变节点通过线性互联构成的线性时不变异构网络, 利用 S- 包 (S-hull, 一种凸包概念的推广) 概念, 给出了类似于多变量 Nyquist 判据的频域稳定性判据。对于一个分布式异构网络, 其动力学特性主要取决于其节点动力学以及网络互联特性。现实中大多数分布式异构网络, 其节点通常具有非线性动力学特性, 而且其互联结构也远非理想的, 通常是网络状态驱动且为时变的。对于这样

* 此项工作得到国家自然科学基金资助, 项目批准号: 60374039, 60334030。

一类网络, 研究其稳定性具有更实际的意义。然而, 正如 IST(Information Society Technologies Programme) 欧洲委员会就未来控制系统的发展发起的一个专题讨论会报告所指出的, 目前非线性控制理论的发展对其应用强加了若干约束, 小增益理论的内在性限制以及稳定性研究平衡点概念的要求, 防碍了该理论在分布式多变量反馈回路中的推广 [7]。对于具有非线性节点动力学以及非线性互联特征的分布式异构网络的稳定性以及控制的研究具有挑战性。本文研究一类具有一般非线性节点动力学特性, 且网络互联通道是由满足扇区条件的时变非线性静态环节而构成的分布式异构网络的稳定性, 并给出网络稳定的条件。

2 问题描述

首先引入本文所用的一些符号。用 $\mathbf{R}$ 表示实数域，并记 $\bar{\mathbf{R}}=\{-\infty\}\bigcup\mathbf{R}\bigcup\{\infty\}$, 以及 $\mathbf{R}_+=[0,\infty)$。用 $\mathbf{C}$ 表示复数域，$m\times n$ 维复矩阵的集合记为 $\mathbf{C}^{m\times n}$。$\mathbf{R}(s)^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 维有理传递函数矩阵的集合, 用 $\boldsymbol{RH}^\infty$ 表示真的稳定的传递函数 (或传递函数矩阵) 的集合，当需要强调 $\boldsymbol{RH}^\infty$ 中的传递函数矩阵的维数为 $m\times n$ 时，用 $\boldsymbol{RH}^\infty(\mathbf{C}^{m\times n})$ 表示。用 $L_2(E)$ 表示定义在 $[0,\infty)$ 上，取值于欧氏空间 E 的平方可积的信号空间,

$$
\begin{aligned}
&L_2(E)\\
&=\left\{u:[0,\infty)\to E\ \middle|\ \|u\|_2=\left(\int_0^\infty\|u(t)\|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}<\infty\right\}
\end{aligned}
$$

其中 $\|\cdot\|$ 为 E 上的欧氏范数。其上的内积定义为

$$\langle u,v\rangle=\int_0^\infty u^{\mathrm{T}}(t)v(t)\mathrm{d}t,\quad u,v\in L_2(E)$$

设 $f:[0,\infty)\to E$ 为一取值于欧氏空间 E 的向量值信号, 对任意 $T\geqslant 0$, 定义信号 f 的截断为

$$f_T=\begin{cases} f(t) & 0\leqslant t\leqslant T\\ 0 & t>T\end{cases}$$

用 $L_{2e}(E)$ 表示定义在 $[0,\infty)$ 上，取值于欧氏空间 E 的有限平方可积的信号空间, 其定义为

$$L_{2e}(E)=\{u\mid u_T\in L_2(E),\forall T\geqslant 0\}$$

考虑由 $n(\geqslant 2)$ 个子系统组成的分布式异构系统, 它可表示为有 n 个节点互联的网络, 假定每个节点为一个单输入单输出动态系统

$$G_i:\begin{cases}\dot{x}_i=f_i(x_i,u_i),\ x_i(0)=x_i^0\\ y_i=h_i(x_i,u_i)\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

其中 $x_i(t)\in X_i=\mathbf{R}^{n_i}$ 为节点 i 的状态, $u_i\in U_i=\mathbf{R}$ 为节点 i 的输入, $y_i\in Y_i=\mathbf{R}$ 为节点 i 的输出, 线性子空间 U_i,Y_i 分别为节点 i 的输入及输出状态空间。$f_i:X_i\times U_i\to X_i$ 和 $h_i:X_i\times U_i\to Y_i$ 为足够光滑的映射。假定点 i 具有零状态可检测性, 即当 $u_i=0$ 时, $y_i=0$ 意味着 $\lim\limits_{t\to\infty}x_i(t)=0$, $i=1,2,\cdots,n$。设节点 i 的输入信号 $u_i\in L_{2e}(U_i)$, 输出 $y_i\in L_{2e}(Y_i)$, 则节点 i 在给定的初始条件下可认为是信号空间 $L_{2e}(U_i)$ 到 $L_{2e}(Y_i)$ 的算子, 用 G_i 表示该算子, $G_i:L_{2e}(U_i)\to L_{2e}(Y_i)$, 使得

$$y_i=G_iu_i,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

定义下列记号

$$y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_1&&&\\&G_2&&\\&&\ddots&\\&&&G_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}=Gu \tag{3}$$

并称 G 为节点算子, 对角矩阵只是一种记法, 并不表示 G 是线性的。考虑节点之间是按下列方式互联的: 假定节点 j 的输出 $y_j(t)\in Y_j$ 经过静态非线性环节 $\varphi_{ij}:\mathbf{R}_+\times Y_i\to U_i$ 输入到节点 i, 其中 φ_{ij} 连续且关于第二变量满足局部 Lipscitz 条件, 且有 $\varphi_{ij}(t,0)=0,\forall t\in\mathbf{R}_+$。并且满足如下扇区条件

$$\begin{gathered}\underline{k}_{ij}y_j\leqslant\varphi_{ij}(t,y_j)\leqslant\bar{k}_{ij}y_j\\ \forall y_j\in Y_j,\quad\forall t\geqslant 0,\quad i,j=1,2,\ldots,n\end{gathered} \tag{4}$$

其中 $\underline{k}_{ij},\bar{k}_{ij}\in\mathbf{R}$ 为常量。这说明, 分布式异构系统的互联结构是时变且是节点输出驱动的。记 $v_{ij}(t)=\varphi_{ij}(t,y_j(t))$, 则由 (4) 易知, 当 $y_j\in L_2(Y_j)$ 时, 有 $v_{ij}\in L_2(\mathbf{R})$。设节点 i 的输入可表示为

$$u_i=\sum_{j=1}^n\varphi_{ij}(\cdot,y_j)+e_i,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

其中 $e_i\in L_{2e}(U_i)$ 是节点 i 的外部输入信号。令 $U=U_1\times U_2\times\cdots\times U_n$, $Y=Y_1\times Y_2\times\cdots\times Y_n$, 定义 $F:\mathbf{R}_+\times Y\to U$

$$F(t,y)=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^n\varphi_{1j}(t,y_j)\\\vdots\\\sum_{j=1}^n\varphi_{nj}(t,y_j)\end{bmatrix},\quad\forall(t,y)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n \tag{6}$$

为网络的互联映射, 并令 $e=\begin{bmatrix}e_1&\cdots&e_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\in L_{2e}(U)$, 则给定的分布式异构系统在每个节点的初始状态给定的情况下可用下列输入输出关系表示

$$W:\begin{cases}y=Gu,\\u=F(t,y)+e\end{cases} \tag{7}$$

并简记为 $W=(G,F)$, 其中 G 表示节点的动力学特性, F 表示网络的互联特性。若给定信号 $e\in L_{2e}(U)$ 可唯一确定信号 $y\in L_{2e}(Y)$, 则称该系统为适定的。当系统适定时, 系统 W 确定了一个信号空间 $L_{2e}(U)$ 到 $L_{2e}(Y)$ 上的算子, 仍将该算子记为 W。本文在假定分布式异构系统 (G,F) 适定的条件下研究, 当 $e\in L_2(U)$ 时, 在什么条件下, 能够保证 $u\in L_2(U)$, $y\in L_2(Y)$。

3 主要结果

假定分布式异构系统 (G,F) 由 (7) 式定义, 由 (7) 式中互联映射 F 的定义以及静态非线性互联环节满足的扇区条件易知, 若 $e\in L_2(U)$, $y\in L_2(Y)$ 则定有 $u\in L_2(U)$。从而系统的每个节点的输入, 输出为 L_2 空间上的信号, 即 $u_i\in L_2(U_i), y_i\in L_2(Y_i), i=1,2,\cdots,n$。这样, 每个节点都具有 L_2 稳定性, 在连续性以及零状态可检测的假定下, 它等价于每个节点零状态的渐近稳定性。所以整个分布式异构系统 (G,F) 的稳定性归结为, 在给定系统外部输入 $e\in L_2(U)$ 的条件下, 如何确定系统的输出是否有 $y\in L_2(Y)$。为此, 我们首先给出如下定义。

定义 1 设由 (7) 式定义的分布式异构系统 (G,F) 为适定的, 称该系统为有界增义 L_2 稳定的, 系指存在 $\gamma>0$ 以及 $\beta\in\mathbf{R}$, 使得对任意的 $T\geqslant 0$, 有

$$\|y_T\|_2\leqslant\gamma\|e_T\|_2+\beta \tag{8}$$

若 $\beta=0$ 则称系统具有无偏有界 L_2 增义稳定性。

接下来，我们研究分布式异构系统 (7) 的有界增义 L_2 稳定性。

定义 2 称线性算子 $M:L_2(\mathbf{R}^n)\to L_2(\mathbf{R}^n)$ 为正定的, 系指 $M=M^*$, 且存在 $\alpha>0$, 使得

$$\langle u,Mu\rangle=\int_0^\infty u^{\mathrm{T}}(t)(Mu)(t)\mathrm{d}t\geqslant\alpha^2\|u\|_2^2 \tag{9}$$
$$\forall u\in L_2(\mathbf{R}^n)$$

由于在适定性的假定下, 系统 (G,F) 以及其组成节点 G_i 都可看成是有限平方可积信号空间上的算子, 下面我们给出一个算子 L_2 稳定的一个引理。

引理 1 设 $H:L_{2e}(U)\to L_{2e}(Y)$ 为一个输入信号空间 $L_{2e}(U)$ 到输出信号空间 $L_{2e}(Y)$ 的算子, 使得 $\forall u\in L_{2e}(U)$ 有 $y=Hu\in L_{2e}(Y)$。则该算子具有有界增益 L_2 稳定性, 当切仅当存在线性算子 $\Pi:L_{2e}(Y)\times L_{2e}(U)\to L_{2e}(Y)\times L_{2e}(U)$, 且有下列分块结构

$$\varPhi=\begin{bmatrix}P & Q\\ Q^* & R\end{bmatrix}$$

其中 P 正定, $R=R^*$ 及 Q 为有界线性算子, 使得

$$\left\langle\begin{bmatrix}y_T\\ u_T\end{bmatrix},\varPhi\begin{bmatrix}y_T\\ u_T\end{bmatrix}\right\rangle\leqslant\beta,\ \forall u\in L_{2e}(U),\ \forall T\geqslant 0 \tag{10}$$

证明 必要性: 由系统有界增益 L_2 稳定性定义, 定存在 $\gamma>0$, 以及 $\beta\in\mathbf{R}$, 使得 $\|y_T\|_2\leqslant\gamma\|u_T\|_2+\beta,\ \forall T\geqslant 0$, 从而有 $\|y_T\|_2^2\leqslant(\gamma\|u_T\|_2+\beta)^2\leqslant 2\gamma^2\|u_T\|_2^2+2\beta^2$, $\forall T\geqslant 0$, 可将其等价地表示为:

$$\left\langle\begin{bmatrix}y_T\\ u_T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & -2\gamma^2 I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_T\\ u_T\end{bmatrix}\right\rangle\leqslant 2\beta^2,\ \forall T\geqslant 0 \tag{11}$$

必要性得证。

充分性：设不等式 (10) 成立, 则由算子 P 的正定性，存在 $\alpha>0$, 使得

$$\begin{array}{ll} & \left\langle\begin{bmatrix}y_T\\ u_T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\alpha^2 I & Q\\ Q^* & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_T\\ u_T\end{bmatrix}\right\rangle\\ \leqslant & \left\langle\begin{bmatrix}y_T\\ u_T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}P & Q\\ Q^* & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_T\\ u_T\end{bmatrix}\right\rangle\leqslant\beta\end{array},\forall T\geqslant 0$$

注意到

$$\begin{bmatrix}\alpha^2 I & Q\\ Q^* & R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha I\\ \alpha^{-1}Q^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha I & \alpha^{-1}Q\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \alpha^{-2}Q^*Q-R\end{bmatrix}$$

从而有

$$\begin{array}{ll} & \left\|\alpha y_T+\alpha^{-1}Qu_T\right\|_2^2-\langle u_T,(\alpha^{-1}Q^*Q-R)u_T\rangle\\ = & \left\langle\begin{bmatrix}y_T\\ u_T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\alpha^2 I & Q\\ Q^* & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_T\\ u_T\end{bmatrix}\right\rangle\leqslant\beta,\quad\forall T\geqslant 0\end{array}$$

进一步可有

$$\begin{array}{ll} & \alpha\|y_T\|_2-\left\|\alpha^{-1}Q\right\|_{L_2\to L_2}\|u_T\|_2\\ \leqslant & \left\|\alpha y_T+\alpha^{-1}Qu_T\right\|_2\\ \leqslant & \left\|\alpha^{-2}Q^*Q-R\right\|_{L_2\to L_2}^{\frac{1}{2}}\|u_T\|_2+\sqrt{|\beta|}\end{array},\quad\forall T\geqslant 0$$

其中 $\|\cdot\|_{L_2\to L_2}$ 为算子范数。从而可得

$$\begin{array}{ll} & \|y_T\|_2\\ \leqslant & \alpha^{-1}\left(\left\|\alpha^{-1}Q\right\|_{L_2\to L_2}+\left\|\alpha^{-2}Q^*Q-R\right\|_{L_2\to L_2}^{\frac{1}{2}}\right)\|u_T\|_2\\ & +\alpha^{-1}\sqrt{|\beta|},\ \forall T\geqslant 0\end{array}$$

该式说明算子 H 是有界增义 L_2 稳定的。充分性得证。

引理 2 设 $F:\mathbf{R}_+\times Y\to U$ 是由 (6) 式定义的网络互联映射, 记 $v=F(t,y)\in U$, 则, $[v^{\mathrm{T}},\ y^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in U\times Y$ 满足如下代数约束

$$\begin{bmatrix}v\\ y\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-2I & \underline{K}+\overline{K}\\ \underline{K}^{\mathrm{T}}+\overline{K}^{\mathrm{T}} & -\underline{K}^{\mathrm{T}}\overline{K}-\overline{K}^{\mathrm{T}}\underline{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ y\end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{12}$$

其中 $\underline{K}=[\underline{k}_{ij}]_{n\times n}, \overline{K}=[\overline{k}_{ij}]_{n\times n}$。

证明 由扇区条件 (4) 易得

$$\sum_{j=1}^n\underline{k}_{ij}y_j\leqslant\sum_{j=1}^n\varphi_{ij}(t,y_j)\leqslant\sum_{j=1}^n\overline{k}_{ij}y_j,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

若记 $\underline{k}_i=[\underline{k}_{i1}\ \cdots,\ \underline{k}_{in}]$, $\overline{k}_i=[\overline{k}_{i1}\ \cdots\ \overline{k}_{in}]$ 及 $v_i=\sum_{j=1}^n\varphi_{ij}(t,y_j)$ 则

$$\underline{k}_i y\leqslant v_i\leqslant\overline{k}_i y,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

将上述不等式写成

$$\begin{array}{ll} & \left(y^{\mathrm{T}}\underline{k}_i^{\mathrm{T}}-v_i\right)\left(v_i-\overline{k}_i y\right)\\ = & -y^{\mathrm{T}}\underline{k}_i^{\mathrm{T}}\overline{k}_i y+y^{\mathrm{T}}\underline{k}_i^{\mathrm{T}}v_i+v_i\overline{k}_i y-v_i^2\geqslant 0\\ & i=1,2,\cdots,n\end{array}$$

对指标 i 求和后得

$$\begin{array}{l}-y^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^n\underline{k}_i^{\mathrm{T}}\overline{k}_i\right)y+y^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^n\underline{k}_i^{\mathrm{T}}v_i\\ +\left(\sum_{i=1}^n v_i\overline{k}_i\right)y-\sum_{i=1}^n v_i^2\geqslant 0\end{array} \tag{13}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{n}\underline{k}_i^{\mathrm{T}}\overline{k}_i=\underline{K}^{\mathrm{T}}\overline{K},\ \sum_{i=1}^{n}\underline{k}_i^{\mathrm{T}}v_i=\underline{K}^{\mathrm{T}}v,\ \sum_{i=1}^{n}v_i\overline{k}_i=v^{\mathrm{T}}\overline{K}$$

则不等式 (13) 可以写成

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}F(y)\\ y\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-2I & \underline{K}+\overline{K}\\ \underline{K}^{\mathrm{T}}+\overline{K}^{\mathrm{T}} & -\underline{K}^{\mathrm{T}}\overline{K}-\overline{K}^{\mathrm{T}}\underline{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F(y)\\ y\end{bmatrix}\geqslant 0$$

引理得证。 □

称矩阵

$$\Pi:=\begin{bmatrix}-2I & \underline{K}+\overline{K}\\ \underline{K}^{\mathrm{T}}+\overline{K}^{\mathrm{T}} & -\underline{K}^{\mathrm{T}}\overline{K}-\overline{K}^{\mathrm{T}}\underline{K}\end{bmatrix}\qquad(14)$$

为互联约束矩阵。

注 1 借助于互联约束矩阵 Π, 由 (12) 式定义了一个输入输出状态空间 $U\times Y$ 上的二次锥约束。尽管互联映射 F 是时变非线性的, 但是该映射的图位于二次锥内, 在本质上是由线性约束刻画的。这种约束也可以用来刻画互联通道中的参数不确定性。当互联映射为一静态时不变线性映射时, $\underline{K}=\overline{K}=F\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 则不等式 (12) 的等号成立。

下面给出本文的主要结果。

定理 1 设分布式异构系统 (G,F) 由 (7) 式给定, 并假定系统是适定的。继续引理 2 的假设和记号, 设 $y=Gu$, 若存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$\left\langle\begin{bmatrix}u_T\\ y_T\end{bmatrix},\Pi\begin{bmatrix}u_T\\ y_T\end{bmatrix}\right\rangle\leqslant-\varepsilon\|y_T\|_2^2,\quad \forall T\geqslant 0\qquad(15)$$

则分布式异构网络 (G,F) 具有有界增义 L_2 稳定性。

证明 将上述不等式写成

$$\left\langle\begin{bmatrix}u_T\\ y_T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2I & \underline{K}+\overline{K}\\ \underline{K}^{\mathrm{T}}+\overline{K}^{\mathrm{T}} & \varepsilon I-\underline{K}^{\mathrm{T}}\overline{K}-\overline{K}^{\mathrm{T}}\underline{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_T\\ y_T\end{bmatrix}\right\rangle\leqslant 0$$
$$\forall T\geqslant 0$$

用 $|A|$ 表示矩阵 (或向量)A 的元素取模后所构成的同维数的矩阵 (或向量)。令 $u=F(\cdot,y)+e,\ e\in L_{2e}(U)$ 为外部输入输入信号, 将其带入上述不等式, 并注意到

$$\begin{bmatrix}u\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e\\ 0\end{bmatrix}$$

对任意的 $T\geqslant 0$, 上述不等式可以写成

$$\begin{aligned}&\left\langle\begin{bmatrix}v_T\\ y_T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2I & \underline{K}+\overline{K}\\ \underline{K}^{\mathrm{T}}+\overline{K}^{\mathrm{T}} & \varepsilon I-\underline{K}^{\mathrm{T}}\overline{K}-\overline{K}^{\mathrm{T}}\underline{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_T\\ y_T\end{bmatrix}\right\rangle\\ +\quad & 2\left\langle e_T,-2v_T+(\overline{K}+\underline{K})y_T\right\rangle 2\|e_T\|_2^2\leqslant 0\end{aligned}\qquad(16)$$

由引理 2 可知

$$\begin{aligned}&\left\langle\begin{bmatrix}v_T\\ y_T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2I & \underline{K}+\overline{K}\\ \underline{K}^{\mathrm{T}}+\overline{K}^{\mathrm{T}} & \varepsilon I-\underline{K}^{\mathrm{T}}\overline{K}-\overline{K}^{\mathrm{T}}\underline{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_T\\ y_T\end{bmatrix}\right\rangle\\ \geqslant\quad & \varepsilon\|y_T\|_2^2=\varepsilon\,\||y_T|\|_2^2\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}\langle e_T,-v_T\rangle&=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle e_{iT},\varphi_{ij}(y_j)_T\rangle\\ \geqslant\quad&-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\langle|e_{iT}|,|\overline{k}_{ij}||y_{jT}|\right\rangle=-\left\langle|e_T|,|\overline{K}||y_T|\right\rangle\end{aligned}\qquad(17)$$

令

$$\varPhi=\begin{bmatrix}\varepsilon I & -2|\overline{K}|-|\underline{K}+\overline{K}|\\ -2|\overline{K}^{\mathrm{T}}|-|\overline{K}^{\mathrm{T}}+\underline{K}^{\mathrm{T}}| & -2I\end{bmatrix}$$

从而, 有

$$\begin{aligned}&\left\langle\begin{bmatrix}|y_T|\\ |e_T|\end{bmatrix},\varPhi\begin{bmatrix}|y_T|\\ |e_T|\end{bmatrix}\right\rangle\\ \leqslant\quad&\left\langle\begin{bmatrix}u_T\\ y_T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2I & \underline{K}+\overline{K}\\ \underline{K}^{\mathrm{T}}+\overline{K}^{\mathrm{T}} & \varepsilon I-\underline{K}^{\mathrm{T}}\overline{K}-\overline{K}^{\mathrm{T}}\underline{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_T\\ y_T\end{bmatrix}\right\rangle\\ \leqslant\quad&0\end{aligned}$$
$$\forall T\geqslant 0$$

由引理 1 可知定理成立。 □

注 2 定理 1 给出的不等式 (15) 是节点算子 G 的图在输入输出信号空间 $L_{2e}(U)\times L_{2e}(Y)$ 上满足的二次锥约束。若将描述互联映射 F 的约束 (12) 式积分, 则可得到 F 在信号空间 $L_{2e}(U)\times L_{2e}(Y)$ 上的锥约束, 并且与描述 G 的二次锥除在原点外是互不相交且严格分离的。信号空间 $L_{2e}(U)\times L_{2e}(Y)$ 中除原点外互不相交的两个二次锥, 从本质上刻画了异构网络 L_2 稳定的条件。基于这一观点, 我们可以研究更为复杂的异构网络的互联结构, 其中甚至还可包含动态非线性和动态不确定性。限于篇幅, 本文不准备在这一点上展开。

当系统的每个节点为有界 L_2 增义稳定时, 即存在 $\gamma_j>0,\beta_j\in\mathbf{R},\ j=1,2,\cdots,n$, 使得

$$\|y_{jT}\|_2\leqslant\gamma_j\|u_{jT}\|_2+\beta_j,\ \forall T\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n$$

令 $\gamma=\sqrt{2}\max\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n\}$, $\beta=\sqrt{2\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2}$。易得

$$\|y_T\|_2^2\leqslant\gamma^2\|u_T\|_2^2+\beta^2\qquad(18)$$

则可利用信号 $u\in L_{2e}(U)$ 将定理 1 可叙述为如下推论。

推论 1 设分布式异构系统 (G,F) 由 (7) 式给定, 并假定系统的所有节点为有界增义 L_2 稳定, 且系统是适定的。继续引理 2 的假设和记号, 设 $y=Gu$, 若存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$\begin{aligned}&\left\langle\begin{bmatrix}u_T\\ y_T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2I & \underline{K}+\overline{K}\\ \underline{K}^{\mathrm{T}}+\overline{K}^{\mathrm{T}} & -\underline{K}^{\mathrm{T}}\overline{K}-\overline{K}^{\mathrm{T}}\underline{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_T\\ y_T\end{bmatrix}\right\rangle\\ \leqslant\quad&-\varepsilon\|u_T\|_2^2,\quad\forall T\geqslant 0\end{aligned}\qquad(19)$$

则分布式异构网络 (G,F) 具有有界增义 L_2 稳定性。

证明 注意到 (18) 式, 则

$$-\varepsilon\|u_T\|_2^2\leqslant-\varepsilon\gamma^{-2}\|y_T\|_2^2+\varepsilon\gamma^{-2}\beta^2$$

类似于定理 1 的证明, 借助于引理 1, 可得推论。

进一步, 当系统的所有节点 G_i 为带有传递函数 $G_i(s) \in \boldsymbol{RH}^\infty$ 的稳定线性时不变算子时, 记 $G(s) = \mathrm{diag}(G_1(s), G_2(s), \cdots, G_n(s)) \in \mathbf{R}^{n\times n}(s)$, 则 $G(s) \in \boldsymbol{RH}^\infty(\mathbf{C}^{n\times n})$。借助于帕塞瓦尔 (Parseval) 定理, 可以给出异构网络 (G, F) 具有有界增义 L_2 稳定性的频域条件。

推论 2 设分布式异构系统 (G, F) 由 (7) 式给定, 并假定系统的所有节点 G_i 为带有传递函数 $G_i(s) \in \boldsymbol{RH}^\infty$ 的稳定线性时不变算子, 且系统是适定的。若下列不等式成立

$$\begin{bmatrix} I \\ G(\mathrm{j}\omega) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -2I & \underline{K} + \overline{K} \\ \underline{K}^\mathrm{T} + \overline{K}^\mathrm{T} & -\underline{K}^\mathrm{T}\overline{K} - \overline{K}^\mathrm{T}\underline{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ G(\mathrm{j}\omega) \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \omega \in \bar{\mathbf{R}} \tag{20}$$

其中 $G(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{diag}(G_1(\mathrm{j}\omega), G_2(\mathrm{j}\omega), \cdots, G_n(\mathrm{j}\omega))$, 则分布式异构网络 (G, F) 具有有界增义 L_2 稳定性。

对于具体问题, 借助于 KYP 引理很容易将频域不等式 (20) 转化为线性矩阵不等式求解。

4 结 论

对于分布式异构系统 (G, F), 其动力学特性取决于其节点动力学 G 以及网络互联结构 F, 当节点之间经过一个满足扇区条件的非线性静态环节互联时, 网络的互联映射 F 满足一个由互联约束矩阵定义的代数二次约束条件, 借助于互联约束矩阵, 可以构造节点算子 G 满足的积分二次约束, 当该积分二次约束满足时, 分布式异构网络 (G, F) 具有有限增义 L_2 稳定性。

参考文献(References)

[1] Justha E W, Krishnaprasada P S. Equilibria and steering laws for planar formations[J]. Systems & Control Letters, 2004，52:25-38.

[2] Triplett Benjamin I, Klein Daniel J, Kristi A Morgansen. Discrete Time Kuramoto Models with Delay: Lecture Notes in Control and Information Sciences 331, (Panos J. Antsaklis, Paulo Tabuada (Eds.)) Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.

[3] 汪小帆，李翔，陈关荣. 复杂网络理论及其应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.

[4] Khatir Maziar E, Davison Edward J. Cooperative Control of Large Systems: Lecture Notes in Control and Information Sciences 309, (V. Kumar, N. Leonard, A.S. Morse (Eds.)). Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.

[5] Moylan Peter J, Hill David J. Stability Criteria for Large-Scale Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1978, 23(2):143-149.

[6] Dullerud Geir E, D'Andrea Raffaello. Distributed Control of Heterogeneous Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(12):2113-2128.

[7] IST Programme European Commission, Worlshop on future and emerging ontrol systems [EB/OL], November, 2000. ftp://ftp.cordis.lu/pub/ist/docs/ka4/report_controlws.pdf.