



北京大学

# 博士研究生学位论文

题目：有限推力航天器最优轨道机  
动控制

姓 名：	岳 新 成
学 号：	10786828
院 系：	工 学 院
专 业：	力学系统与控制
研究方向：	航天器动力学与控制
导师姓名：	黄琳 院士 杨莹 副教授

二〇一〇年四月



# 版权声明

任何收存和保管本论文各种版本的单位和个人，未经本论文作者同意，不得将本论文转借他人，亦不得随意复制、抄录、拍照或以任何方式传播。否则，引起有碍作者著作权之问题，将可能承担法律责任。



## 摘 要

航天器轨道机动控制问题一直是航空航天领域的研究热点。研究轨道机动的方法主要有两类：一是脉冲法，二是制导法。脉冲法由于假设卫星在瞬时就能获得所需速度增量而不引起卫星向径的突变而大大简化了问题，因而得到广泛研究，理论比较成熟。但当发动机推力比达到千秒级时，轨道机动需要花费更多的时间，就必须把推力作为连续函数来考虑。连续推力下的最优轨道转移问题的数值方法主要有直接法、间接法和混合法。本论文主要应用间接法研究连续推力航天器最优轨道机动问题。考虑航天器为常值推力发动机点质量模型，在二体轨道基础上，采用位置-速度和改进轨道根数作为状态变量描述了轨道动力学方程。轨道机动模式包括轨道转移、交会和拦截，应用极大值原理设计了时间或能量最优控制律，并进行了奇异性分析。根据极大值原理一阶必要条件，将轨迹优化问题转化为两点边值问题，然后在数值上应用打靶法来求解相应的边值问题。论文还研究了最优轨道规避问题，在给定中间过渡轨道的条件下，应用非线性规划方法研究了时间最优和燃料最优轨道规避问题。具体的研究工作和成果如下：

1.应用开普勒型动力学方程研究了时间最优轨道拦截问题。考虑控制输入分别在惯性坐标系和轨道坐标系下分解，应用极大值原理设计最优控制律并进行了奇异性分析，根据极大值原理一阶必要条件，将轨道拦截问题转化为两点边值问题来求解。数值仿真结果表明最优状态解具振荡性，且同样存在最大推力幅值与最小飞行时间乘积近似成常数关系的现象。

2.应用改进轨道根数描述的高斯型动力学方程，在统一的框架下研究了时间最优轨道转移、交会和拦截问题。应用间接法设计了最优控制律，极大值原理一阶条件将轨迹优化问题转化为两点边值问题。仿真结果表明对于相同的最大推力幅值，轨道转移和交会问题具有几乎相同的最优轨迹；调整最大推力幅值，重复数值实验，结果表明最大推力幅值与最小飞行时间乘积近似成常数关系的猜想同样适用于轨道拦截和交会问题。

3.研究了累积赤经最优轨道转移问题。将累积赤经引入系统作为新的自变量，应用间接法研究考虑变质量和推力约束的最优累积赤经轨道转移问题；借鉴平均化方法，设计了近似最优控制律，同样将最优轨道转移问题转化为两点边值问题。数值仿真结果表明，最大推力幅值与最小累积赤经乘积近似成常数

关系。

4.研究了燃料最优轨道转移问题。基于改进轨道根数描述轨道动力学方程,应用间接法研究燃料最优控制。由于燃料最优控制律存在奇异性,不易求解,转而应用 $\epsilon$ 算法将燃料最优和能量最优结合起来考虑。根据极小值原理一阶必要条件,将轨迹优化问题转化为两点边值问题,并在数值上对这三种形式的最优轨道转移做出比较,结果表明能量最优、燃料最优及能量-燃料混合最优三种不同性能指标对应的最优轨迹几乎是相同的。

5.研究常值连续推力时间最优和燃料最优规避问题。在中间过渡轨道已知的条件下,将规避问题划分为转移和返回两个阶段,然后应用非线性规划方法统一来考虑时间或燃料最优规避问题。数值仿真结果表明,对于同一最大发动机推力幅值,时间最优情形与燃料最优情形相比较,航天器完成规避任务历经的飞行时间短,飞行轨迹的椭圆轨道半长轴变化较小,但是绕飞地球的圈数多。数值仿真同时也表明,在考虑时间最优或燃料最优轨道规避时,航天器均一直以最大推力工作。

**关键词:** 有限推力航天器; 轨道机动; 轨道规避; 间接方法; 极大值原理; 两点边值问题; 打靶法

---

# On Finite-thrust Spacecraft Orbital Maneuver Optimal Control

Xincheng Yue (Mechanical System and Control)

Directed by Professor Lin Huang and Associate Professor Ying Yang

An important problem in astronautics is to transfer a satellite between elliptic orbits, which has been widely studied by many researchers in both the impulsive case and the continuous low-thrust case. Recently, much attention has been focused on the computation of the optimal control law for the case of the finite-thrust orbital transfer, which can be performed by minimizing the cost of the final time or the fuel-consumption under some additional constraints. The finite-thrust trajectory optimization methods fall mainly into three categories: indirect methods, direct methods and hybrid methods. In this dissertation, the finite-thrust optimal orbital maneuver problems are studied by using the indirect method, and the trajectory optimization problems are deduced into the two-point boundary-value problem by the Maximum Principle.

The main contributions of this dissertation can be summarized as follows:

1. The finite-thrust time-optimal orbital intercept problem is studied firstly. The dynamics of the spacecraft is described by the so-called Keplerian equation using the position-speed variables in the Cartesian coordinate and in the orbital coordinate attached to the spacecraft. The optimal control laws are designed by the the Pontryagin Maximum Principle, and the singularity is also analyzed, then the trajectory optimization problem is converted into a two-point boundary-value problem. Two special examples are studied in numerical simulations, and the results show that the product of the minimum flight time and the maximal thrust is approximately a constant in these three cases of orbital maneuver.

2. The problems of indirect optimization of continuous finite-thrust minimum-time orbital maneuvers including the transfer, interception and rendezvous are studied. In virtue of the Pontryagin Maximum Principle, the trajectory optimization problem is converted into a two-point boundary-value problem, and the terminal constraints for these three orbital maneuver missions are also considered respectively. The single shooting method is used to solve the corresponding boundary-value problem, and the simulating results show that the product of the minimum flight time and the maximal

thrust is approximately a constant in these three cases of orbital maneuver.

3.The continuous finite-thrust near minimum cumulative longitude orbital transfer problem using the indirect method is addressed. The movement of the satellite is described by the Gauss equation using the modified equinoctial elements and replacing the time as a system independent variable by the cumulative longitude. The Maximum Principle is adapted to design the optimal control in order to minimize the final cumulative longitude, and a two-point-boundary-value problem is derived from the orbital transfer problem. The single shooting method is applied in the numerical experiment, and the results of simulations demonstrate that the orbital transfer mission is achieved and the product of the maximal thrust and the minimum cumulative longitude is nearly a constant.

4.The problems of optimal continuous-thrust orbital transfer for minimizing energy, fuel and energy-fuel combination are studied by using indirect method. The fuel optimal orbital transfer problem is hard to solve because of the possible existence of the singularities in solution, but the minimum energy problem is relatively easy to deal with, so the  $\epsilon$ -algorithm is applied to the fuel optimal problem by adding the energy term in the preference index. The trajectory optimization problem is converted into a two-point-boundary-value problem, and the shooting method is used to dispose to the problem in numerical computation. The results of the simulations demonstrate that the optimal trajectories are almost alike for the three optimal cases under the same thrust and transfer time.

5.The nonlinear programming method is used to study the continuous-thrust minimum-time and minimum-fuel-consumption orbital avoidance. The dynamics of the spacecraft is described by the modified elements. For the given intermediate parking orbit, the orbital avoidance mission is divided into transfer and round-trip phases. Considering the minimum-time or minimum-fuel-consumption performance, the optimal orbital avoidance problem is established. Furthermore, the nonlinear programming method is applied to the two phase orbital transfer problems. The results of simulation demonstrate that the minimum time/fuel-consumption orbital avoidance mission is well accomplished. The simulating results also show that the spacecraft flies around the earth with the maximum magnitude of the thrust at whole time history both for the minimum-time and minimum-fuel-consumption cases.

**Key Words:** Finite-thrust Spacecraft; Orbital Maneuver; Orbital Avoidance; Indirect

Method; the Maximum Principle; Two-point boundary-value Problem; Shooting Method



## 目 录

摘 要.....	I
ABSTRACT (英文摘要) .....	III
第一章 绪 论.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 研究现状.....	2
1.2.1 轨道动力学描述.....	3
1.2.2 轨迹优化方法.....	3
1.2.3 轨道机动使命和要求.....	9
1.3 研究内容与结构安排.....	11
第二章 航天器轨道动力学基础.....	13
2.1 二体问题及轨道根数.....	13
2.2 开普勒型方程.....	16
2.2.1 控制在地心坐标系下的动力学方程.....	16
2.2.2 控制在轨道坐标系下的动力学方程.....	17
2.3 轨道根数描述高斯方程.....	20
2.4 极坐标方程.....	25
2.5 卫星质量方程.....	26
2.6 小结.....	26
第三章 时间最优轨道机动 I：开普勒型方程.....	29
3.1 时间最优轨道机动问题描述.....	29
3.2 最优轨迹设计.....	31
3.2.1 地心坐标系描述情形.....	31
3.2.2 轨道坐标系描述情形.....	33
3.3 数值仿真.....	36
3.3.1 算例1.....	38
3.3.2 算例2.....	40

---

3.4 小结 .....	44
<b>第四章 时间最优轨道机动 II：轨道根数描述方程</b> .....	<b>49</b>
4.1 问题描述.....	50
4.2 正则最优控制律设计.....	53
4.3 边值问题和横截条件.....	56
4.3.1 轨道转移.....	57
4.3.2 轨道拦截.....	58
4.3.3 轨道交会.....	60
4.4 数值仿真.....	61
4.5 小结 .....	65
<b>第五章 近似最优赤经轨道转移</b> .....	<b>67</b>
5.1 问题描述.....	68
5.2 近似最优控制律设计.....	69
5.3 数值实验.....	73
5.4 小结 .....	75
<b>第六章 能量/燃料最优轨道转移</b> .....	<b>79</b>
6.1 问题描述.....	80
6.2 轨道转移最优控制律设计.....	81
6.2.1 燃料最优.....	81
6.2.2 能量最优.....	82
6.2.3 $\epsilon$ 算子法求解燃料最优 .....	83
6.3 数值计算.....	83
6.4 小结 .....	87
<b>第七章 连续推力最优轨道规避</b> .....	<b>91</b>
7.1 问题描述.....	91
7.2 非线性规划求解最优规避问题 .....	93
7.3 数值仿真.....	95
7.4 小论与展望 .....	97

---

第八章 结论与展望.....	101
参考文献 .....	105
附录 A 符号与常数示例.....	115
附录 B 极大值原理.....	117
附录 C 两点边值问题与打靶法.....	119
个人简历、在学期间的研究成果 .....	123
致谢 .....	125



## 表格

3.1	最小飞行时间 . . . . .	39
4.1	时间最优轨道机动问题的数值条件 . . . . .	61
4.2	最小飞行时间 . . . . .	64
5.1	累积赤经最优转移数值边值 . . . . .	74
6.1	燃料/能量最优轨道转移数值边界条件 . . . . .	84
7.1	最优规避问题数值仿真边值条件 . . . . .	95

## 插图

2.1	轨道根数与坐标系简单示意图 . . . . .	15
2.2	球坐标系示意图 . . . . .	25
3.1	时间最优轨道拦截3D轨迹, 1N . . . . .	39
3.2	时间最优轨道拦截状态变化轨迹, 1N . . . . .	40
3.3	时间最优轨道拦截最优控制轨迹, 1N . . . . .	41
3.4	最小飞行时间和最大推力幅值关系 . . . . .	42
3.5	时间最优轨道拦截3D轨迹, 10N . . . . .	43
3.6	时间最优轨道拦截状态变化轨迹, 10N . . . . .	44
3.7	时间最优轨道拦截最优控制轨迹, 10N . . . . .	45
3.8	时间最优轨道拦截3D轨迹, 20N . . . . .	46
3.9	时间最优轨道拦截状态变化轨迹, 20N . . . . .	46
3.10	时间最优轨道拦截最优控制轨迹, 20N . . . . .	47
4.1	状态最优轨迹, 4N . . . . .	62
4.2	轨道拦截3D最优轨迹, 4N . . . . .	63
4.3	轨道交会的3D最优轨迹, 4N . . . . .	63
4.4	$t_{fmin} \cdot T_{max}$ 近似常数关系 . . . . .	65
4.5	初始时刻 $L$ 对轨道拦截时间的影响 . . . . .	66
5.1	累积赤经最优轨道转移3D最优轨迹, 0.8 N . . . . .	74
5.2	累积赤经最优轨道转移状态的最优解, 0.8N . . . . .	75
5.3	累积赤经最优轨道转移控制输入, 0.8 N . . . . .	76
5.4	$L_{fmin} \cdot T_{max}$ 近似常数关系 . . . . .	76
5.5	不同推力幅值下 $ \sigma $ 变化轨迹 . . . . .	77
6.1	状态随时间变化轨迹 . . . . .	86
6.2	最优控制随时间变化轨迹 . . . . .	87
6.3	能量最优3D轨迹 . . . . .	88
6.4	燃料最优3D轨迹 . . . . .	88

---

6.5	终端时刻卫星质量与最大推力幅值的关系 . . . . .	89
7.1	时间最优规避3D最优轨迹, 30N . . . . .	96
7.2	最小燃料消耗规避3D 最优轨迹, 30N . . . . .	97
7.3	时间最优规避状态最优变化轨迹, 30N . . . . .	98
7.4	最小燃料消耗规避状态最优变化轨迹, 30N . . . . .	99
C.1	打靶法简单流程示意 . . . . .	121



## 第一章 绪 论

### 1.1 研究背景

早在半个世纪前，人类开始了空间技术的研究，虽然这是一个相对较新的研究领域，但是已经取得了巨大的成功。自从第一个人造卫星于1957年发射升空之后，人类和平利用开发太空的活动，诸如深空探测、月球探测、空间站等等，都取得令人瞩目的成就，也激励着众多科学家将兴趣聚焦在空间科学技术研究上。

上世纪六十年代，包括地球轨道间转移、地月转移、星际航行等在内的轨道机动任务的轨迹优化研究引起了众多科学家的研究兴趣。对于大多的空间使命，诸如有效载荷和飞行时间等指标都是事先严格设计好的。携带有效载荷过多或者飞行时间过长都会降低效率，或者完成一次任务需要实施更多次的空间机动飞行。因此，空间任务的优化设计是不可避免的。

当前，航天器轨道控制技术主要基于航天器的推进系统，因此根据推进方式的不同，研究轨道机动的方法主要有两类：一是脉冲法，二是制导法 [1,2]。早期的航天器主要采用化学推进系统，产生的推力较大，可以近似看作是脉冲推力，可以通过解析的办法来计算常值推力弧。脉冲法在理论上假设发动机推力充分大，发动机的推力工作时间与轨道运行周期相比是相当短暂的，航天器在瞬时就能获得所需速度增量而不引起卫星向径的突变 [1,2]。此时发动机的推力比冲 $I_{sp}$ 约为250~450s，这一假设大大简化了问题的研究。早在上世纪五六十年代，脉冲控制轨道机动包括轨道转移、拦截和交会问题已得到广泛深入的研究 [3]。早期的代表性工作是Lawden开展的，他把燃料最优轨迹优化问题看做一个Mayer型问题，应用变分法和拉格朗日乘子法寻求最优轨迹，发展了一张“主矢量”理论，脉冲机动的最优方向沿主矢量方向 [4]。Lawden的工作也证实了Hohmann关于最小燃料消耗脉冲轨道转移的结果 [1,2]。

对于轨道机动，脉冲式大推力虽可使航天器在短时间内获得较大的速度增量，但所需的推进剂多，从而减少了有效载荷。随着空间探测任务的深入，化学火箭发动机比冲小、效率低的缺点日益暴露，不能满足未来任务的需要。与此同时，以电推进、离子推进、太阳帆推进为代表的小推力推进技术受到了广泛的关注，并迅速发展，化学-电子混合推进方式同时也得到应用 [5]，

越来越多的空间任务选择这种推力持续变轨的机动模式。1998年发射的Deep Space 1 第一次成功地使用太阳能电力推进系统作为星际航行的主要推进方式 [6]；2003年9月，欧洲第一个月球航天器SMART-1应用电推进系统使得航天器逃离地球引力并进入月球轨道。另一个小推力推进系统的重要例子是太阳帆，航天器没有发动机，直接靠太阳能产生动力来驱动 [7]。这些小推力推进系统的特点是，推力小，不能在短的轨道周期内完成轨道机动任务，通常推力弧是连续的，因而轨迹计算需要多次综合才能完成。小推力推进也常称作有限推力或连续推力，此时，发动机比冲 $I_{sp}$ 达到千秒级，轨道机动需要花费更多的时间，必须把推力作为连续函数来考虑。尽管表面上看，小推力推进系统在技术上比较复杂，需要的机动任务时间也较长，但是小推力推进系统具有明显的有效载荷优势，而且与传统的化学推进系统相比，小推力推进系统能够提供更高级的使命设计任务和方法，因而激起了众多学者的研究兴趣。

本论文主要研究小推力时间最优或者能量最优轨道机动问题，所指的小推力推进系统并不特指是电推进或者太阳帆推进，涉及的小推力轨迹优化问题广泛的指非脉冲式使命设计并具有精确的微分运动方程描述。本论文的小推力轨道机动模式主要包括地球卫星之间的轨道转移、交会、拦截和规避问题。小推力最优轨道机动即轨迹优化和使命设计的研究极具挑战性，所研究的问题包括轨道动力学选择、轨迹优化方法、连续推力弧的计算、连续控制函数的选取以及不同的使命要求等等，下面就这几方面当前的研究现状进行综述。

## 1.2 研究现状

关于有限推力最优轨道机动问题，国内外已经开展了广泛深入的研究。Yang Gao的博士论文应用了两个直接优化方法（混合法和直接打靶法）研究了小推力轨道转移问题 [8]；James D.T. 研究了连续推力时间最优轨道转移问题，应用欧拉-拉格朗日理论将轨迹优化问题转化为两点边值问题来求解，并应用Kustaanheimo-Stiefel(KS)变换研究了最优初始协状态问题 [9]；Mischa Kim 则基于数值和解析的方法研究了连续推力时间最优轨道转移问题，应用解析和半解析技术提高了最优解寻优过程 [10]；而Troy Goodson 则主要应用间接法研究了有限推力燃料最优轨道转移问题，并修改了Patched Method将其应用于最优轨道转移问题 [11]。国内方面，哈尔滨工业大学任远的博士论文则是应用遗传算法研究了深空探测中的小推力轨道优化问题 [12]。

### 1.2.1 轨道动力学描述

研究有限推力轨道机动问题，一个重要内容是选择合适的轨道动力学描述。航天器轨道动力学的基础是二体轨道问题 [1,2,13,14]，在地球平方反比力场中将航天器看做点质量体，无控轨道运动满足二体开普勒方程。考虑外加控制输入或摄动的开普勒型动力学方程，状态变量为位置和速度，许多文献即采用该方程研究轨道优化问题 [15–21]。由于位置–速度分量描述的轨道动力学方程的解具有振荡性，而轨道根数变化缓慢平滑，数值上可以采用较大的积分步长，而且用轨道根数描述的动力学方程更易于分析控制输入或者摄动对轨道的影响，因而得到更广泛的应用，如文献 [22–24]采用经典的轨道根数描述方程研究了小推力最优轨道优化问题。但是，由于经典的轨道根数描述的动力学方程在零偏心率和零倾角时存在奇异性，一种称之为赤道轨道根数(Equinoctial Elements)的非奇异轨道根数被引入轨道机动研究 [14,25,26]，Walker 等人提出的另一种改进的赤道轨道根数(Modified Equinoctial Elements, MEE) [27,28]由于适用于所有二次曲线轨道，因而用其描述的高斯型动力学方程 [29]被更多学者采用 [30–33]。Kechichian 也引入了一系列的Equinoctial Elements来研究小推力地球卫星间轨道转移问题 [34–37]。

对于实际的轨道机动任务，都是在特定的坐标系系统下实施，笛卡尔惯性坐标系被自然地应用到位置和速度作为变量描述的开普勒型方程中 [15–21]；但是为便于优化设计，轨道根数描述的动力学方程多采用轨道固连坐标系，在这种坐标系中，通常控制推力分量有两种分解方式：切向-法向分解和径向-法向分解 [29,30]；球坐标或者二维极坐标系统也广泛应用于轨道转移研究中 [38–40]。

### 1.2.2 轨迹优化方法

有限推力最优轨道机动问题，在数值研究方法上归结为轨迹优化研究。轨迹优化数值方法按照传统的分类主要有间接法、直接法和混合法 [8–11,41,42]，简要分类如图1.1所示 [43]。关于轨迹优化的综述文献，Betts在1998年发表的一篇总结早期的轨迹优化数值方法的文章被广泛引用 [41]。Hull从参数化变量类型、数值积分方法和积分阶次角度对参数化方法进行了分类和概述 [44]。Ross等人则从最优控制问题的转换方法、变量离散和算法三方面对轨迹优化方法进行了分类 [45]。文献 [42]则从应用角度出发，结合近年来轨迹优

化研究领域的进展,阐述了不同分类标准下的常用轨迹优化方法以及高斯伪谱等新方法的基本原理、优缺点以及应用背景。国内学者如崔平远 [46–48]、唐国金团队 [49,50]、杨滌团队 [51,52]等多采用直接法、混合法或直接搜索法对连续推力轨道机动或星际任务开展了广泛的研究。

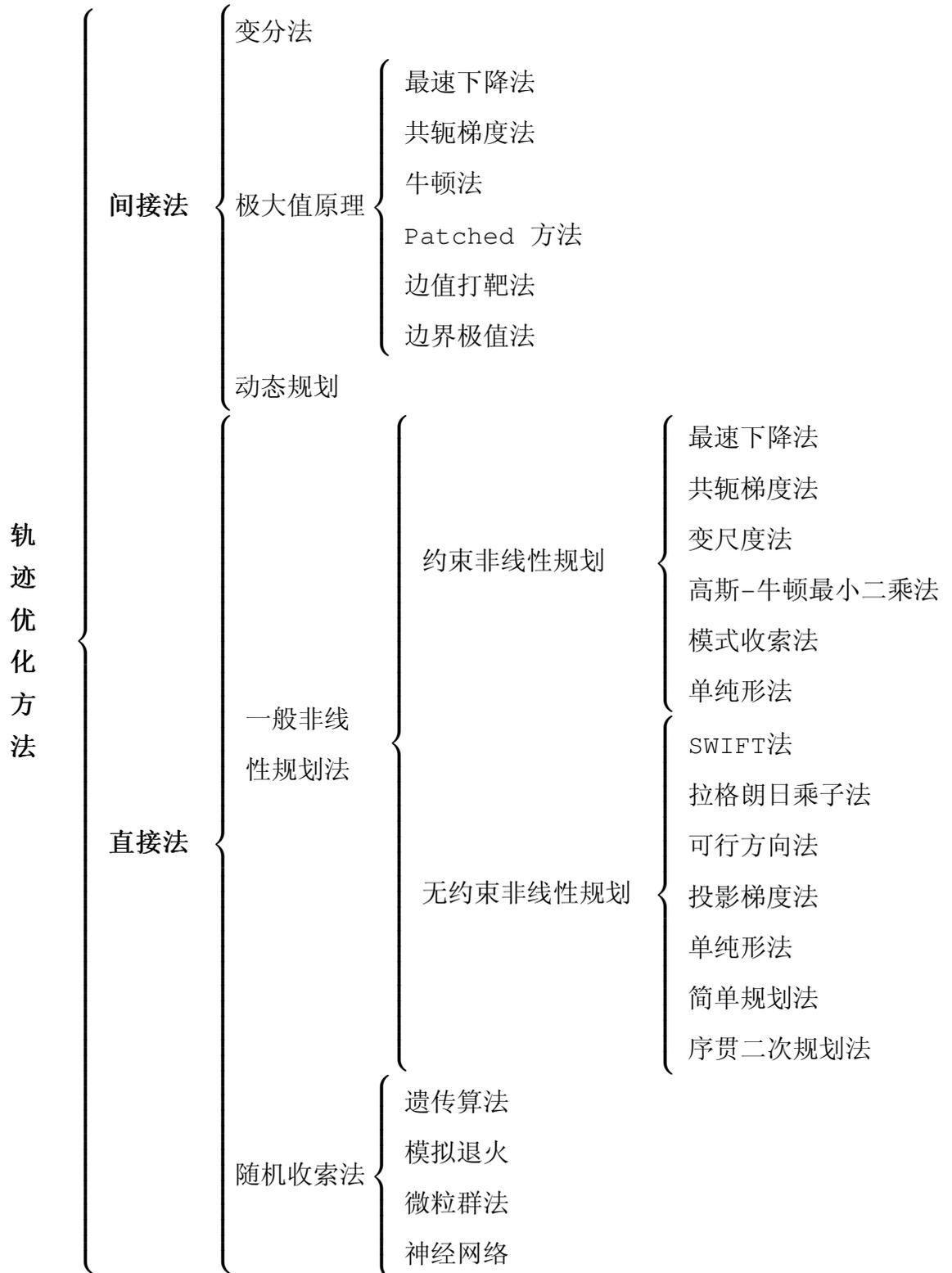


图1.1 轨迹优化数值方法

间接法应用极大值原理(Pontryagin Maximum Principle,PMP)或变分法 [53–55]推导最优控制的一阶必要条件,将连续空间的最优控制问题转化为一个两点边值问题(two-point boundary-value problem, TPBVP),通过单值打靶法、多点打靶法等求解相应的边值问题来获得最优轨迹。间接法的优点,一是解的精度较高,收敛速度快,最优解满足一阶最优必要条件,便于推导;其不足有三点 [41,55]: 1)基于极大值原理推导一阶必要条件的过程比较复杂和烦琐; 2)求解两点边值问题的收敛域较小,对初始猜测值比较敏感,对抽象的(无物理意义的)协变量初始值猜测比较困难; 3)对于有路径约束的最优控制问题,间接法处理比较困难。

直接法采用参数化方法将连续空间的最优控制问题转化为一个非线性规划(Nonlinear Programming,NLP)问题,通过数值求解非线性规划问题来获得最优轨迹 [56]。根据参数化方法不同,直接法分为两种基本类型 [42]: 1)通过将控制变量离散化,将连续空间的控制变量参数化,而状态变量由数值积分获得; 2)同时将控制变量和状态变量离散化,节点之间采用多项式表示状态变量随时间的变化关系,连续动力学微分方程约束转化为代数约束。直接法的优点,一是不需要推导最优条件;二是收敛域相对间接法更宽广,对初始估计精度要求不高,不需要猜测协变量的初值,不需要切换结构的先验信息。但是许多直接法不提供主矢量信息,因此不能保证非线性规划解是原最优控制问题的解,而将控制变量参数化的直接法容易收敛到局部最优解,即依赖于初始猜测值。直接法还有一个显著缺点就是依赖节点的选取,计算量大,计算精度不高,解不够光滑。混合法,也引入协状态,依据极大值原理得到正则方程组,将问题转化为在终端约束条件下,针对协状态初值及其他一些特定参数(如发动机开关机时刻,总飞行时间等)的参数优化问题。

间接法已成功应用于大量的小推力轨迹优化问题。Kechichian 采用了改进轨道根数描述的动力学方程研究了最优轨道转移问题,应用极大值原理一阶必要条件给出协状态方程,并推导出了协状态方程的具体表达式 [36,37]。C. H. Chuang 等人应用开普勒型方程,并考虑了J2摄动和大气摄动,应用间接法研究了燃料最优轨道转移问题,并应用横截条件确定了终端边值约束 [19,57,58]。Oberle, H.J. 应用极坐标方程,研究了最小燃料消耗地球轨道-火星轨道转移问题,应用极大值原理必要条件,并证明了解的存在性 [59]。Bonnard, B. ,Caillau, JB , Gergaud, J.等人所在的研究小组系统的应用间接法研究了时间最优、能量最优轨道转移问题,用改进的轨道根数MEE描述卫

星动力学方程，应用几何的观点分析了最优控制特性 [30–32, 60–63]。Bonnard, B. 和 Chyba, M. 的专著 [64] 也详细的讨论了极大值原理的应用问题，特别是奇异控制问题，虽然该书并未强调是应用于航天器最优轨道机动问题，但是书中的成果都是基于文献作者关于航天器最优轨道转移问题的研究成果，完全适用于轨道机动问题的研究。

间接法即是应用 Pontryagin 极值原理将轨迹优化问题转化为两点边值问题，两点边值问题的求解有大量的文献可考，应用在最优轨道机动上的数值方法主要有单值打靶法，多点打靶法，Patched 方法和最小边界条件法 (Minimizing-Boundary-Condition method, MBCM)。单值打靶法首先确定打靶函数，令其满足边值条件，然后寻求合适的算法求解，常用的有牛顿型算法。文献 [61] 介绍了单值打靶技术的应用，文献 [30, 31, 65] 应用单值打靶法求解了时间最优轨道转移问题，文献 [18, 32, 60] 研究了其在能量最优轨道转移问题上的应用。由于 Hamiltonian 系统的不稳定性，某些情况单值打靶法是不充分的，因而必须采用多点打靶法。应用多值打靶法必须预先知道最优控制的结构，比较常用的算法是 H.J. Oberle 发展的 Boundsco 算法，但这个算法需要猜测切换时间点。文献 [11, 57, 59, 66–68] 应用 Boundsco 算法研究了最优轨道机动问题。MBCM 实际上是单值打靶法的改进，通过消除一个边值条件而增大了可行解集，未知边界条件的个数并没改变。因为解集的扩大，相应的边值问题易于求解，一旦完成求解，寻找与最终边值条件不符的解就可看作最小化问题，计算梯度用于更新初始状态直至最后一个边界条件满足。在 MBCM 中，最优控制的切换结构是明显的，因为每一个积分步骤都将检验切换函数，因而可以直接应用切换条件，收敛域比单值打靶法大。文献 [11, 57] 应用 MBCM 研究了最优轨道转移问题。Goodson T. 也用 Patched 方法研究了能量最优轨道转移问题。

应用打靶法求解两点边值问题由于需要猜测协状态初值而变得难于处理，系统的收敛域对协状态的初始值非常敏感，因此协状态的初值分析和设计也是最优控制领域当前的一个研究热点，David G. Hull 系统的总结了打靶法中初始协状态值的处理方法 [69]。常用的一种方法是规范变换法 (Canonical transformations)，考虑不同坐标系或者变量之间的变换，选择合适的坐标系或者变量来代替原协状态初始值 [70]，文献 [21, 71] 应用规范变换方法研究了最优轨道转移问题。文献 [72] 应用球坐标系统，研究了最小燃料消耗最优轨道转移问题，将协状态变量在初始时刻领域用一阶近似泰勒级数表示，通过求解初始时刻领域内的方程来得到近似协变量初始猜测值。生成函数方法由于不需猜测协

状态的初始值而广泛应用于最优交会问题 [73–75]。生成函数有四种形式：

$$F_1(x, x_0, t, t_0), F_2(x, p_0, t, t_0), F_3(p, x_0, t, t_0), F_4(p, p_0, t, t_0)$$

最优交会初始状态和终端状态都是已知的，这样就可以选取 $F_1$ 为生成函数，相应应有变换：

$$p = \frac{\partial F_1(x, x_0, t, t_0)}{\partial x}, p_0 = \frac{\partial F_1(x, x_0, t, t_0)}{\partial x_0}$$

其他生成函数可以通过Legendre变换得到 [74]。但是选取合适的生成函数也是比较困难的事情，而且由于存在多解而可能出现奇异。

应用极大值原理设计最优控制律时，另外一个问题是存在奇异控制 [76]，此时需要继续判定二阶条件，分析切换函数的特性。文献 [62]研究了时间最优共面轨道转移情形，证明了切换函数是连续可微的而且仅存在有限多个孤立零点，即不存在奇异弧而仅存在切换点，而在任意两个切换点之间，解是光滑连续的。进而证明了在奇异点都是 $\pi$ 奇异，即在切换点控制输入方向旋转180度。文献 [30, 61]应用幂零逼近的方法也同样证明了 $\pi$ 奇异性。虽然文献 [62]证明了在近地点或远地点若存在奇异点则至多有三个连续切换点，但是在通常情况下是否存在奇异点，以及若存在奇异点则切换时间的确定，仍然是未解决的难题，在数值算法中则可以通过调整积分步长来处理奇异性 [77]。根据极大值原理，极值解满足一阶必要条件，局部充分条件则需满足Legendre-Clebsche二阶条件

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0$$

Morse定理建立起二阶条件与共轭点之间的联系 [64]，在第一个共轭点之前的轨迹都是局部时间最优的 [64, 78, 79]。Bonnard等人提出了正则情况下的COTCOT算法，即检验Jacobi方程的解组成的Jacobi域的向量空间维数，用于检验共轭点，并将其用于时间最优轨道转移 [78, 79]，但该算法需要预先知道轨道转移时间，而转移时间是我们需要优化的目标，因而该算法在数值上并不能准确检验二阶条件。而在奇异情况下，单输入仿射系统同样可以检验共轭点，但是多输入系统的二阶条件检验则是开问题 [64]。文献 [80]则基于Riccati方法检验终端时间自由最优控制问题的二阶充分条件，并将其应用于时间最优地球-火星轨道转移问题。而文献 [81, 82]则考虑了单终端约束和多终端约束情况下的二阶条件检测过程，并将其应用于固定时间能量或燃料最优轨道转移问题。而对

于切换函数, 文献 [83] 假设应用同伦方法确定的切换函数不存在奇异弧即仅存在孤立的零点; 文献 [18] 则直接研究了燃料最优轨道转移, 假设切换函数仅存在孤立零点, 应用二分法检测切换点, 提高了打靶法的收敛性和运行效率。文献 [15] 则基于考虑、大气摄动的开普勒型动力学模型, 提出了一种基于振荡频率分析称之为采样法的切换算法, 能够提高运算速度和切换点的精确度。

应用间接法研究轨迹优化问题还有一个难点就是路径约束或者状态约束, 虽然关于控制约束、状态等式或不等式约束问题, 理论上分析与设计已很完善 [55, 76], 但是在实际问题的数值处理中仍很困难, 如很多文献在研究最优轨道转移问题时都假设路径约束自然满足 [18, 31, 32, 60, 62]。文献 [21, 66] 在研究返回式空间探测任务中, 应用开普勒型方程, 考虑能量最优指标, 并假定在目标轨道停留时间必须大于一定时间, 则将返回式问题分成转移段、停留段和返回转移段, 在目标轨道上的进入点和离开点约束则作为角点条件来处理, 应用极大值原理将问题转化成多点边值问题来求解。

关于直接法, 一般是将轨迹优化问题转化为非线性规划问题。Betts 的专著系统的介绍了非线性规划方法的原理、方法和应用 [41], 他也应用非线性规划方法研究了最优轨道转移问题 [84–86]。文献 [33] 研究了时间轨道转移问题, 应用 direct-transcription 方法将连续最优控制问题转化为 NLP 问题。配点法 (collocation) 也应用于地球轨道转移任务中 [87, 88]; 文献 [89] 应用球坐标方程, 采用 sequential quadratic Programming (SQP) 和配点法研究了轨道转移问题。文献 [90] 则考虑了分段连续模型, 应用参数优化方法和二阶梯度方法研究了最小燃料消耗轨道转移问题。

包括神经网络、模拟退火、进化算法、遗传算法等的随机直接搜索方法也归入直接法范畴内。文献 [39, 91] 应用遗传算法、文献 [92] 应用进化算法研究了最优轨道转移问题。由于直接法和间接法各有优缺点, 将两个方法结合使用的混合方法也广泛应用于最优轨道转移中, 文献 [91] 应用开普勒型方程, 利用极大值原理将轨迹优化问题转化成两点边值问题, 然后应用遗传算法求解相应的边值问题, 而文献 [92] 则是用进化算法求解。文献 [93] 对球坐标系统描述的异面开普勒轨道转移问题, 应用极大值原理设计了最优控制律, 然后将时间区间分割, 节点作为内点约束, 再利用直接配点法来求解。

### 1.2.3 轨道机动使命和要求

小推力 (或有限推力, 连续推力) 轨道机动任务包括轨道转移、交会和拦

截。最优轨道转移是研究的热点，包括地球卫星轨道间转移、地球轨道-行星轨道转移以及星际转移任务。文献 [15, 17–20, 57] 应用位置-速度描述的动力学方程研究了地球卫星轨道转移问题，而文献 [30–32, 36, 37, 60–63] 则用改进轨道根数描述动力学方程研究了轨道优化问题。地球-行星轨道转移主要是研究地球-火星轨道转移任务 [39, 59, 94, 95]，地球轨道-月球轨道转移任务也有研究 [96]，而文献 [48, 97, 98] 则研究了星际航行问题。不同轨道机动任务的区别主要在终端约束边值条件，如用位置-速度描述，在终端时刻位置和速度向量均确定则是轨道交会问题，而只有位置向量确定则是轨道拦截问题。因而，不同的终端约束条件可以表示不同的轨道机动形式，如文献 [19, 57] 在应用位置-速度描述的动力学方程研究轨道转移任务时就是用角动量和偏心率向量来确定终端条件，而文献 [65] 则考虑了多种不同的终端约束条件来描述轨道转移任务。

而关于轨道交会和拦截任务，早期应用脉冲法开展了大量的研究 [3]。小推力控制情形时，相对轨道动力学方程广泛应用于轨道交会任务 [99, 100]，罗亚中应用遗传算法、模拟退火算法等智能算法对相对动力学方程描述的轨道交会问题开展研究 [101–103]，而文献 [104] 则用相对轨道根数推导出相对动力学方程并将其应用于轨道交会问题中。Kechichian 发展了一套改进的轨道根数来描述轨道运动，应用间接法研究了最优轨道交会问题 [35, 105]。文献 [106] 在太阳系坐标系统中用开普勒型方程研究了能量最优轨道交会问题，考虑能量受限和比冲受限，并应用极大值原理设计了最优控制律。Park 则在太阳系坐标系统中应用球坐标描述的动力学方程研究了时间-燃料混合最优轨道拦截和交会问题，不同的终端约束条件表示了轨道拦截和交会任务，并应用横截条件推导出边值约束 [98]。

轨道优化的性能指标主要是要求飞行时间最短或者消耗燃料最小，时间最优轨道转移问题得到了广泛深入的研究 [30, 31, 33, 61–63, 107, 108]。而对于燃料最优问题，通常性能指标要求是初始质量最小或者终端质量最大，对于常值推力发动机，性能指标则可描述为  $J = \int_0^{t_f} |\mathbf{u}| dt$ ，由于应用间接法研究燃料最优问题时存在奇异性，通常在性能指标中引入能量指标 [32, 60] 或者其他惩罚函数 [109]，在数值上再应用连续方法如同伦方法来研究 [32, 60]。也有文献将时间和质量最优统一来考虑，两者之间存在权重系数 [98]，但是由于量纲不统一，权重系数不易确定，作者认为这种性能指标不是很合理，文献也较少应用这种指标形式。

### 1.3 研究内容与结构安排

本论文主要应用间接法研究轨道转移、交会和拦截问题，考虑航天器为点质量模型和常值推力发动机，分别对位置-速度和MEE描述的轨道动力学方程应用极大值原理设计时间最优控制律，并进行了奇异性分析，根据极大值原理一阶必要条件，将轨迹优化问题转化为两点边值问题，然后在数值上应用打靶法来求解相应的边值问题。将最终累积赤经作为新的系统自变量，借鉴平均化方法研究了累积赤经最优轨道转移问题。对于能量最优轨道转移问题，综合考虑燃料、能量以及能量-燃料混合最优问题，应用极大值原理设计最优控制律，数值上应用打靶法和 $\epsilon$ 算法来求解。论文还研究了最优轨道规避问题，假设存在中间过渡轨道，应用非线性规划方法研究了时间最优和燃料最优轨道规避问题。

根据上述简单描述的研究内容，论文在结构上安排如下：

第二章，首先讨论了航天器轨道动力学基础，在二体轨道理论框架内，给出了用位置-速度描述的开普勒型和用轨道根数描述的高斯型轨道动力学方程，并简单讨论了球坐标描述的方程和航天器质量方程，为后续章节的研究奠定基础。

第三章，在惯性坐标系和轨道坐标系下分别应用开普勒型方程研究时间最优轨道拦截问题，应用极大值原理设计最优控制律并进行了奇异性分析，将轨道拦截问题转化为两点边值问题来求解。数值仿真部分给出两个不同终端约束的轨道拦截任务。

第四章则应用改进轨道根数描述的高斯型动力学方程，在统一的框架下研究时间最优轨道转移、交会和拦截问题，应用间接法设计了最优控制律，极大值原理一阶条件将轨迹优化问题转化为两点边值问题，然后应用单值打靶法求解相应的边值问题。

第五章，将累积赤经引入系统作为新的变自量，应用间接法研究考虑变质量和具推力约束下的最优累积赤经轨道转移问题；借鉴平均化方法，设计了近似最优控制律，同样将最优轨道转移问题转化为两点边值问题。

第六章，基于MEE描述轨道动力学方程，应用间接法研究燃料最优、能量最优以及能量-燃料混合最优轨道转移，分别设计了最优控制律，尝试在数值上对这三种形式的最优轨道转移做比较并得出结论。

第七章研究常值连续推力时间最优和燃料最优规避问题。在给定中间过渡

轨道条件下，将规避问题划分为转移和返回两个阶段，然后应用非线性规划方法来研究时间和燃料最优规避问题。

第八章则给出全文的结论，并对未来的继续研究方向做了展望。在附录部分，也简要介绍了极大值原理、两点边值问题和打靶方法。

## 第二章 航天器轨道动力学基础

这一章，我们主要讨论航天器轨道动力学，为后续章节的研究奠定基础。首先讨论二体问题及描述轨道运动的轨道根数，然后讨论常用的三种描述连续推力轨道机动问题的轨道动力学方程，即：一是在笛卡尔坐标系下用位置和速度表示的开普勒型方程，二是在轨道坐标系下用改进赤道轨道根数表示的高斯方程，三是在球坐标系下用球半径、幅角以及速度表示的动力学方程。

### 2.1 二体问题及轨道根数

轨道动力学，是把航天器当做质点来研究其在外层空间随时间变化过程一轨道。在航天器轨道的分析问题中，常假设其在地球中心力场中运动，忽略其他各种摄动(如地球非球形、密度分布不均匀引起的摄动，太阳、月球引力摄动，大气压力摄动等)。这种研究一个质点在另一个质点（本论文分别指卫星和地球）的万有引力作用下运动的问题，即是二体问题，这种卫星轨道则称为二体轨道，它是轨道动力学的基础。运用牛顿关于物体线动量的变化率等于作用力

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

这一定律可以导出轨道动力学的基本方程 [1,2,14,29,110]

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.1)$$

其中 $\mathbf{r}$ 为卫星相对地球地心位置矢量， $r = \|\mathbf{r}\|$ 为其矢量幅值， $\mu = Gm_e$ 为地球引力常数（ $G$ 为万有引力常数， $m_e$ 为地球质量，且假设卫星质量远远小于地球质量）。方程2.1称之为开普勒方程，由此可以看出，作用在卫星上的地球中心引力仅与卫星质量成正比，与卫星的地心距的平方成反比；由引力产生的加速度幅值 $\frac{\mu}{r^2}$ 与卫星质量无关，引力加速度幅值与地心距单位矢量 $\frac{\mathbf{r}}{r}$ 的方向相反 [29]。

动力学方程2.1可化成二体系统的基本动力学微分方程，它是一个六阶的非线性常微分方程组，若要完全求解该方程组则必须找出含有六个相互独立的积分常数的解。常选择一组意义明确且相互独立的六个积分常数代表运动轨道的基本量，称之为轨道根数，用 $\sigma$ 表示。

对于椭圆轨道，常用的经典轨道根数为  $\sigma = (a, e, i, \Omega, \omega, \theta)$  [1, 14]:

- $a$ —椭圆轨道半长轴
- $e$ —偏心率
- $i$ —轨道倾角
- $\Omega$ —升交点赤经
- $\omega$ —近地点幅角
- $\theta$ —真近地点角

其中  $a$  和  $e$  表示轨道的大小和形状， $\Omega$  和  $i$  表示轨道面在空间的指向， $\omega$  表示在轨道面内近地点方向的指向， $\theta$  表示过近地点时间，也即表示卫星在轨道上的位置 [1]，其间关系由图 2.1 简单所示。

经典的轨道根数与航天器在地心惯性坐标系下的位置和速度矢量是可以相互转换的，用经典的轨道根数描述的位置和速度矢量为 [14]

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \frac{P}{1+e \cos \theta} (\cos \Omega \cos(\omega + \theta) - \sin \Omega \sin(\omega + \theta) \cos i) \\ \frac{P}{1+e \sin \theta} (\cos \Omega \cos(\omega + \theta) + \sin \Omega \sin(\omega + \theta) \cos i) \\ \frac{P}{1+e \cos \theta} \sin(\omega + \theta) \sin i \end{pmatrix} \\ \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\mu}{P}} (\cos \Omega (\sin \theta + e \sin \omega) + \sin \Omega (\cos \theta + e \cos \omega) \cos i) \\ -\sqrt{\frac{\mu}{P}} (\sin \Omega (\sin \theta + e \sin \omega) - \cos \Omega (\cos \theta + e \cos \omega) \cos i) \\ -\sqrt{\frac{\mu}{P}} (\cos \theta + e \cos \omega) \sin i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中  $P = a(1 - e^2)$  表示轨道的半通径。

描述轨道运动的轨道根数有很多种形式，如改进的经典轨道根数、庞加莱根数、欧拉参数等等 [111]。由于经典轨道根数描述的动力学方程在偏心率  $e = 0$  和（或）轨道倾角  $i = 0$  时存在奇异，Walker 提出了一种称为 Modified Equinoctial Elements (MEE) 的轨道根数 [27]，以该根数为状态的轨道动力学方程得以广泛应用，可以适用于除  $i = 180^\circ$  以外的任意圆锥曲线轨道。该轨道根数与经典的轨道根数的关系为

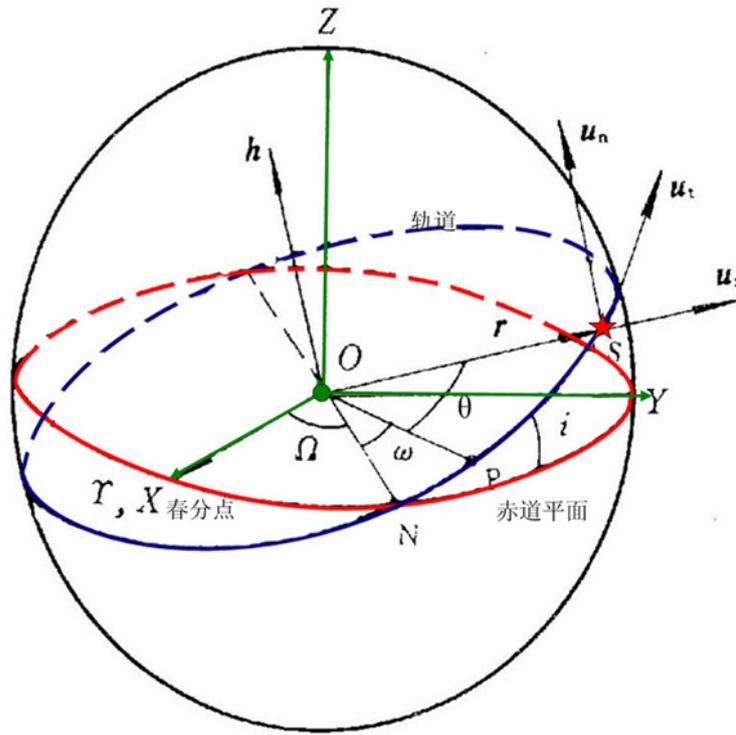


图 2.1 轨道根数与坐标系简单示意图

$$\begin{aligned}
 P &= a(1 - e^2) \\
 e_x &= e \cos(\omega + \Omega) \\
 e_y &= e \sin(\omega + \Omega) \\
 h_x &= \tan\left(\frac{i}{2}\right) \cos \Omega \\
 h_y &= \tan\left(\frac{i}{2}\right) \sin \Omega \\
 L &= \Omega + \omega + \theta
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

其中第一个分量确定轨道的大小，第二个和第三个分量确定轨道的形状（圆，椭圆，抛物线，双曲线），第四个和第五个分量确定轨道倾角，第六个分量确定卫星在轨道上的位置。前五个分量可看作慢变量，第六个则是快变量。第一个分量也可考虑半长轴 $a$ ，能量，角动量 $h = \sqrt{P/\mu}$ 等，第四、五个分量也可考虑为 $i \cos \Omega, i \sin \Omega$ 等，第六个也可考虑偏赤经 $\Omega + \omega + E$ 或平赤经 $\Omega + \omega + M$ 。

同样，改进的轨道根数2.3与惯性坐标系下的位置和速度分量的关系

为 [14,112]

$$r_1 = \frac{P}{CW}((1 + h_x^2 - h_y^2) \cos L + 2h_x h_y \sin L) \quad (2.4a)$$

$$r_2 = \frac{P}{CW}((1 - h_x^2 + h_y^2) \sin L + 2h_x h_y \cos L) \quad (2.4b)$$

$$r_3 = \frac{P}{CW}(2Z) \quad (2.4c)$$

$$v_1 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{\mu}{P}}(2h_x h_y (e_x + \cos L) - (1 + h_x^2 - h_y^2)(e_y + \sin L)) \quad (2.4d)$$

$$v_2 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{\mu}{P}}((1 - h_x^2 + h_y^2)(e_x + \cos L) - 2h_x h_y (e_y + \sin L)) \quad (2.4e)$$

$$v_3 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{\mu}{P}}(2h_x (e_x + \cos L) + 2h_y (e_y + \sin L)) \quad (2.4f)$$

其中 $(r_1, r_2, r_3), (v_1, v_2, v_3)$ 分别表示位置和速度矢量分量，其他参数为 $C = 1 + h_x^2 + h_y^2, W = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L$ 。

本文主要应用位置-速度变量和改进的赤道轨道根数描述的动力学方程，接下来我们分别考虑其描述的系统方程。

## 2.2 开普勒型方程

考虑以位置、速度为状态变量的动力学方程，在不考虑姿态时假设卫星为点质量，在外力作用下的动力学方程为：

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{T}}{m} + \mathbf{T}_p \quad (2.5)$$

其中 $\mathbf{r}$ 为卫星相对地球地心位置矢量， $m$ 为卫星质量， $\mu$ 为地球引力常数； $\mathbf{T}$ 为发动机推力（控制输入）矢量，并且是有界的满足 $\|\mathbf{T}\| \leq T_{\max}$ ； $\mathbf{T}_p$ 表示摄动力矢量。当 $\mathbf{T} = \mathbf{T}_p = 0$ 时方程2.5即为开普勒方程2.1，因此我们将以位置和速度为变量描述的方程称之为开普勒型方程。在本节，我们不考虑摄动力的影响，为书写方便，以下省略 $\mathbf{T}_p$ 。

### 2.2.1 控制在地心坐标系下的动力学方程

首先考虑控制输入在地心坐标系下分解的动力学方程。惯性坐标系 $(X, Y, Z)$ 由图2.1所示，定义为： $X$ 轴方向从地心指向春分点， $Y$ 轴方向位于

赤道平面内与Y方向正交，Z为赤道面法向方向，(X,Y,Z)构成右手直角坐标系。卫星在该坐标系下位置和速度矢量为

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^T \\ r &= \|\mathbf{r}\| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}\end{aligned}$$

则卫星的动力学方程为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{u}}{m}\end{aligned}\quad (2.6)$$

其中控制约束需满足 $\|\mathbf{u}\| \leq T_{\max}$ 。

### 2.2.2 控制在轨道坐标系下的动力学方程

上面我们考虑了推力在惯性坐标系下分解的动力学方程，通常情况下，发动机推力方向随轨道坐标系变化。在轨道坐标系下，推力方向主要有两种分解形式：切向-法向分解和径向-法向分解 [29, 30]。切向-法向标架(T,C,N)定义为，在轨道坐标系中，T方向沿轨道切向方向，C在轨道面内与T方向垂直，N方向为轨道面瞬时法向平行，构成右手直角坐标系；而径向-法向标架(R,T,N)如图2.1所示，定义为，在轨道坐标系中，R方向沿卫星与地球连线径向方向，T在轨道面内与R方向垂直，N方向与瞬时轨道面法向平行，构成右手直角坐标系。接下来我们在轨道坐标系下研究轨道动力学方程，设：航天器的速度空间为 $T_M\mathbb{R}^3$ (M为构型空间)，我们首先定义切丛空间 $T\mathbb{R}^3$ 的一组基向量，

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\partial}{\partial v} \right]^T = \left[ \frac{\partial}{\partial r_1} \quad \frac{\partial}{\partial r_2} \quad \frac{\partial}{\partial r_3} \quad \frac{\partial}{\partial v_1} \quad \frac{\partial}{\partial v_2} \quad \frac{\partial}{\partial v_3} \right]^T$$

则状态变量可写作：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \begin{bmatrix} \dot{r}_1 & \dot{r}_2 & \dot{r}_3 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} = \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} = v \frac{\partial}{\partial r} \\ \dot{\mathbf{v}} &= \begin{bmatrix} \dot{v}_1 & \dot{v}_2 & \dot{v}_3 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial v} = \dot{v} \frac{\partial}{\partial v}\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} & \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \in T\mathbb{R}^3 \\ \dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{r} & \dot{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix} \\ \dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{r} & \dot{v} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

由轨道动力学方程2.5则有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{r} & \dot{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v & -\mu \frac{r}{\|r\|^3} + \frac{u}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix} \\ &= v \frac{\partial}{\partial r} - \mu \frac{r}{\|r\|^3} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{u}{m} \frac{\partial}{\partial v}\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}_0 &= v \frac{\partial}{\partial r} - \mu \frac{r}{\|r\|^3} \frac{\partial}{\partial v} \\ \boldsymbol{f} &= \frac{u}{m} \frac{\partial}{\partial v}\end{aligned}$$

则有轨道动力学方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_0 + \frac{1}{m} \boldsymbol{f}$$

a)(T,C,N)型方程

假定推力不为零，推力方向则可在切向-法向标架下分解为

$$\boldsymbol{f} = f \frac{\partial}{\partial v} = u_t f_t \frac{\partial}{\partial v} + u_n f_n \frac{\partial}{\partial v} + u_c f_c \frac{\partial}{\partial v} = u_t \boldsymbol{f}_t + u_n \boldsymbol{f}_n + u_c \boldsymbol{f}_c \quad (2.7)$$

其中：

$$\begin{aligned}f_t &= \frac{v}{\|v\|} \\ f_n &= \frac{r \wedge v}{\|r \wedge v\|} \\ f_c &= f_c \wedge f_t = \frac{(r \wedge v) \wedge v}{\|(r \wedge v) \wedge v\|}\end{aligned}$$

其中符号“ $\wedge$ ”表示向量的外积，定义运算为：

$$r \wedge v = \left( \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} r_2 v_3 - r_3 v_2 \\ r_3 v_1 - r_1 v_3 \\ r_1 v_2 - r_2 v_1 \end{bmatrix}^T$$

根据上述定义可知

$$(r \wedge v) \wedge v = \langle r, v \rangle v - \langle v, v \rangle r = \begin{bmatrix} (r^T v) v_1 - \|v\|^2 r_1 \\ (r^T v) v_2 - \|v\|^2 r_2 \\ (r^T v) v_3 - \|v\|^2 r_3 \end{bmatrix}^T$$

因此方程2.7中描述运动动态的各分量为

$$\mathbf{f}_0 = \frac{1}{\|r\|^3} \begin{bmatrix} v_1 \|r\|^3 & v_2 \|r\|^3 & v_3 \|r\|^3 & -r_1 \mu & -r_2 \mu & -r_3 \mu \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_t = \frac{1}{\|v\|} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_n = \frac{1}{\|r \wedge v\|} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & r_2 v_3 - r_3 v_2 & r_3 v_1 - r_1 v_3 & r_1 v_2 - r_2 v_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_c = \frac{1}{\|(r^T v)v - \|v\|^2 r\|} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (r^T v)v_1 - \|v\|^2 r_1 & (r^T v)v_2 - \|v\|^2 r_2 & (r^T v)v_3 - \|v\|^2 r_3 \end{bmatrix}$$

则轨道动力学方程写成分量形式有：

$$\dot{r}_1 = v_1$$

$$\dot{r}_2 = v_2$$

$$\dot{r}_3 = v_3$$

$$\dot{v}_1 = -\frac{\mu r_1}{\|r\|^3} + \frac{v_1}{m \|v\|} u_t + \frac{(r^T v)v_1 - \|v\|^2 r_1}{m \|(r^T v)v - \|v\|^2 r\|} u_c + \frac{r_2 v_3 - r_3 v_2}{m \|r \wedge v\|} u_n$$

$$\dot{v}_2 = -\frac{\mu r_2}{\|r\|^3} + \frac{v_2}{m \|v\|} u_t + \frac{(r^T v)v_2 - \|v\|^2 r_2}{m \|(r^T v)v - \|v\|^2 r\|} u_c + \frac{r_3 v_1 - r_1 v_3}{m \|r \wedge v\|} u_n$$

$$\dot{v}_3 = -\frac{\mu r_3}{\|r\|^3} + \frac{v_3}{m \|v\|} u_t + \frac{(r^T v)v_3 - \|v\|^2 r_3}{m \|(r^T v)v - \|v\|^2 r\|} u_c + \frac{r_1 v_2 - r_2 v_1}{m \|r \wedge v\|} u_n$$

## b)(R,T,N)型方程

另一种重要分解为径向-法向分解

$$\mathbf{f} = u_r \mathbf{f}_r + u_t \mathbf{f}_t + u_n \mathbf{f}_n$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_r &= \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \frac{\partial}{\partial v} \\ \mathbf{f}_n &= \frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}}{\|\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}\|} \frac{\partial}{\partial v} \\ \mathbf{f}_t &= \frac{\mathbf{f}_c \wedge \mathbf{f}_r}{\|\mathbf{f}_c \wedge \mathbf{f}_r\|}\end{aligned}$$

按照上述同样方法可得：

$$\begin{aligned}(r \wedge v) \wedge r &= \langle r, v \rangle r - \langle r, r \rangle v \\ &= \begin{bmatrix} (r^T v)r_1 - \|r\|^2 v_1 \\ (r^T v)r_2 - \|r\|^2 v_2 \\ (r^T v)r_3 - \|r\|^2 v_3 \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

则轨道动力学方程写成分量形式为

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 &= v_1 \\ \dot{r}_2 &= v_2 \\ \dot{r}_3 &= v_3 \\ \dot{v}_1 &= -\frac{\mu r_1}{\|r\|^3} + \frac{r_1}{m \|r\|} u_r + \frac{(r^T v)r_1 - \|r\|^2 v_1}{m \|(r^T v)r - \|r\|^2 v\|} u_t + \frac{r_2 v_3 - r_3 v_2}{m \|r \wedge v\|} u_n \\ \dot{v}_2 &= -\frac{\mu r_2}{\|r\|^3} + \frac{r_2}{m \|r\|} u_r + \frac{(r^T v)r_2 - \|r\|^2 v_2}{m \|(r^T v)r - \|r\|^2 v\|} u_t + \frac{r_3 v_1 - r_1 v_3}{m \|r \wedge v\|} u_n \\ \dot{v}_3 &= -\frac{\mu r_3}{\|r\|^3} + \frac{r_3}{m \|r\|} u_r + \frac{(r^T v)r_3 - \|r\|^2 v_3}{m \|(r^T v)r - \|r\|^2 v\|} u_t + \frac{r_1 v_2 - r_2 v_1}{m \|r \wedge v\|} u_n\end{aligned} \quad (2.8)$$

## 2.3 轨道根数描述高斯方程

由于用位置-速度描述的轨道动力学方程具有振荡性，因而常用轨道根数

来描述卫星的运动 [32, 62]。实际应用中，卫星轨道常采用六个轨道根数来描述： $a$ -椭圆轨道半长轴； $e$ -偏心率； $i$ -轨道倾角； $\omega$ -近地点幅角； $\Omega$ -升交点经度； $M$ -平近地点角。若航天器的作用力为保守力，比如各种摄动力，可以利用常数变易原理导出拉格朗日（Lagrange）型的摄动运动方程 [29]。而对于非保守力，作用力在轨道坐标系(R,T,N)标架下分解，则用经典轨道根数描述的高斯型轨道动力学方程为 [2]

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} (e \sin \theta u_r + (1+e \cos \theta) u_t) \quad (2.9a)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} (\sin \theta u_r + (\cos E + \cos \theta) u_t) \quad (2.9b)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin(\omega + \theta)}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} u_n \quad (2.9c)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r \cos(\omega + \theta)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} u_n \quad (2.9d)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left( -\cos \theta u_r + \frac{2+e \cos \theta}{1+e \cos \theta} \sin \theta u_t \right) - \cos i \frac{d\Omega}{dt} \quad (2.9e)$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1-e^2}{nae} \left( \left( \frac{2er}{P} - \cos \theta \right) u_r + \left( 1 + \frac{r}{P} \right) \sin \theta u_t \right) \quad (2.9f)$$

方程2.9中， $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ 为真近点角的平均角速率， $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$ 为地心距， $E$ 为偏近点角，偏近点角与真近点角的关系满足

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} \tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

而平近点角与偏近点角的关系满足

$$M = E - e \sin E$$

由于经典轨道六根数描述的高斯行星方程2.9在偏心率 $e = 0$ 和（或）轨道倾角 $i = 0$ 时存在奇异，为消除奇异性，以改进的赤道轨道根数2.3为状态的轨道运动方程得以更加广泛的应用，可以适用于除 $i = 180^\circ$ 以外的任意圆锥曲线轨道。

下面考虑改进轨道根数描述的动力学方程，令状态为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a & e_x & e_y & h_x & h_y & L \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{a} \frac{\partial}{\partial a} + \dot{e}_x \frac{\partial}{\partial e_x} + \dot{e}_y \frac{\partial}{\partial e_y} + \dot{h}_x \frac{\partial}{\partial h_x} + \dot{h}_y \frac{\partial}{\partial h_y} + \dot{L} \frac{\partial}{\partial L} = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x}$$

则该系统在切向-法向标架下分解为 [30]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0 + \frac{1}{m}(u_t \mathbf{f}_t + u_c \mathbf{f}_c + u_n \mathbf{f}_n)$$

式中：

$$\mathbf{f}_0 = \sqrt{\frac{\mu}{P}} \frac{W^2}{P} \frac{\partial}{\partial L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\mu}{P}} \frac{W^2}{P} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} = f_0 \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.10a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_t &= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left( \frac{2WP \|\eta\|}{(1-e^2)^2} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{2W\eta_x}{\|\eta\|} \frac{\partial}{\partial e_x} + \frac{2W\eta_y}{\|\eta\|} \frac{\partial}{\partial e_y} \right) \\ &= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \begin{bmatrix} \frac{2WP\|\eta\|}{(1-e^2)^2} & \frac{2W\eta_x}{\|\eta\|} & \frac{2W\eta_y}{\|\eta\|} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} = f_t \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.10b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_c &= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left( \frac{D\eta_x - W\eta_y}{\|\eta\|} \frac{\partial}{\partial e_x} + \frac{D\eta_x + W\eta_y}{\|\eta\|} \frac{\partial}{\partial e_y} \right) \\ &= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{D\eta_x - W\eta_y}{\|\eta\|} & \frac{D\eta_x + W\eta_y}{\|\eta\|} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} = f_c \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.10c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_n &= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left( -Ze_y \frac{\partial}{\partial e_x} + Ze_x \frac{\partial}{\partial e_y} + \frac{C \cos L}{2} \frac{\partial}{\partial h_x} + \frac{C \sin L}{2} \frac{\partial}{\partial h_y} + Z \frac{\partial}{\partial L} \right) \\ &= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \begin{bmatrix} 0 & -Ze_y & Ze_x & \frac{C \cos L}{2} & \frac{C \sin L}{2} & Z \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} = f_n \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.10d)$$

其中

$$\begin{aligned}
 P &= a(1 - e^2) \\
 \eta &= (\eta_x, \eta_y) = (e_x + \cos L, e_y + \sin L) \\
 W &= 1 + e_x \cos l + e_y \sin l \\
 D &= e_x \sin L - e_y \cos L \\
 C &= 1 + h_x^2 + h_y^2 \\
 Z &= h_x \sin L - h_y \cos L
 \end{aligned}$$

按分量表示, 则描述轨道动力学方程为

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \sqrt{\frac{P}{\mu}} \frac{2P \|\eta\|}{(1 - e^2)^2} u_t \\
 \frac{de_x}{dt} &= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left( \frac{2W\eta_x}{\|\eta\|} u_t + \frac{D\eta_x - W\eta_y}{\|\eta\|} u_c - Ze_y u_n \right) \\
 \frac{de_y}{dt} &= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left( \frac{2W\eta_y}{\|\eta\|} u_t + \frac{D\eta_x + W\eta_y}{\|\eta\|} u_c + Ze_x u_n \right) \\
 \frac{dh_x}{dt} &= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \frac{C \cos L}{2} u_n \\
 \frac{dh_y}{dt} &= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \frac{C \sin L}{2} u_n \\
 \frac{dL}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu}{P}} \frac{W^2}{P} + Zu_n
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

上述表式中应用的改进轨道根数为 $(a, e_x, e_y, h_x, h_y, L)$ , 现将第一个根数改为半通径 $P$ , 推力矢量在 $(\mathbf{R}, \mathbf{T}, \mathbf{N})$ 轨道坐标系下分解, 轨道动力学方程可描述为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0 + \frac{1}{m} (u_r \mathbf{f}_r + u_t \mathbf{f}_t + u_n \mathbf{f}_n)$$

式中描述卫星运动的四个动态为：

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{P}} \frac{W^2}{P} \frac{\partial}{\partial L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\mu}{P}} \frac{W^2}{P} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} = f_0 \frac{\partial}{\partial x} \\
\mathbf{f}_r &= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left( W \sin L \frac{\partial}{\partial e_x} - W \cos L \frac{\partial}{\partial e_y} \right) \\
&= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \begin{bmatrix} 0 & W \sin L & -W \cos L & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} = f_r \frac{\partial}{\partial x} \\
\mathbf{f}_t &= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left( 2P \frac{\partial}{\partial P} + (W \cos L + \eta_x) \frac{\partial}{\partial e_x} + (W \sin L + \eta_y) \frac{\partial}{\partial e_y} \right) \\
&= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \begin{bmatrix} 2P & (W \cos L + \eta_x) & (W \sin L + \eta_y) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} = f_t \frac{\partial}{\partial x} \\
\mathbf{f}_n &= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left( -Z e_y \frac{\partial}{\partial e_x} + Z e_x \frac{\partial}{\partial e_y} + \frac{C \cos l}{2} \frac{\partial}{\partial h_x} + \frac{C \sin L}{2} \frac{\partial}{\partial h_y} + Z \frac{\partial}{\partial L} \right) \\
&= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \begin{bmatrix} 0 & -Z e_y & Z e_x & \frac{C \cos l}{2} & \frac{C \sin L}{2} & Z \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} = f_n \frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中  $W = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L$ ,  $Z = h_x \sin L - h_y \cos L$ ,  $\eta_x = e_x + \cos L$ ,  $\eta_y = e_y + \sin L$  和  $C = 1 + h_x^2 + h_y^2$ 。

动态2.12描述的轨道动力学方程，漂移项  $\mathbf{f}_0$  是周期的，且在切空间内，向量  $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_r, \mathbf{f}_t, \mathbf{f}_n$  张成的李括号  $\text{lie}_{\mathbf{x}}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_r, \mathbf{f}_t, \mathbf{f}_n) = T_{\mathbf{x}}M$ ,  $M$  为构型流形。因此，根据仿射输入非线性系统可控性判断条件 [64]，系统保持可控性。

本论文主要应用改进轨道根数描述的方程2.12来研究轨道机动问题。球坐标系（也称为极坐标系）也被广泛应用于轨道机动，特别是深空探测使命，如文献 [98]应用球坐标方程研究了在太阳系系统对那些对地球造成碰撞威胁的流星或彗星实施拦截问题。下面简要给出极坐标描述的轨道运动方程。

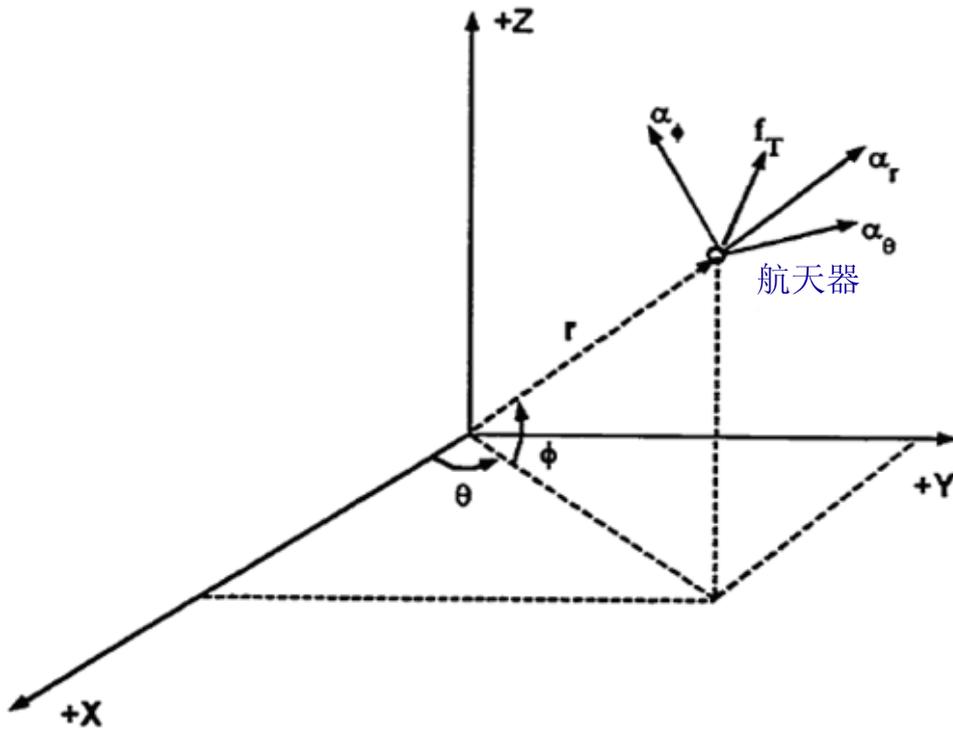


图 2.2 球坐标系统示意图

## 2.4 极坐标方程

球坐标系统如图2.2所示，运动方程则可描述为 [2,98]

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= v_r \\
 \dot{\theta} &= \frac{v_\theta}{r \cos \varphi} \\
 \dot{\varphi} &= \frac{v_\varphi}{r} \\
 \dot{v}_r &= \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{\mu}{r} + f_T a_r \\
 \dot{v}_\theta &= -\frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\varphi v_\theta}{r} \tan \varphi + f_T a_\theta \\
 \dot{v}_\varphi &= -\frac{v_r v_\varphi}{r} - \frac{v_\theta^2}{r} \tan \varphi + f_T a_\varphi
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

其中 $r$ 为航天器距坐标系系统中心的半径幅值， $\theta$ 和 $\varphi$ 为两个位置角度，如图2.2所示， $v_r, v_\theta, v_\varphi$ 则定义三个速度分量， $f_T$ 为发动机推力幅值， $a_r, a_\theta, a_\varphi$ 表

示推力方向在轨道坐标系下的分量,  $a_r$ 沿半径方向,  $a_\theta$ 垂直于 $a_r$ 且平行于XY平面,  $a_\varphi$ 则满足右手定则。

## 2.5 卫星质量方程

上面研究了卫星轨道动力学方程的三种描述形式, 通常情况下假设卫星为点质量, 并未考虑卫星质量变化。实际上, 对于轨道机动任务, 卫星携带的燃料是有限的, 燃料是受限的, 因此必须考虑卫星质量变化。对于连续小推力发动机, 本论文并不具体的去考虑采取何种推进方式, 若发动机推力为常值, 即比冲固定时, 卫星质量变化可描述为 [30]

$$\dot{m}(t) = -\frac{T}{I_{sp}g_0} \doteq -\beta T \quad (2.14)$$

其中 $I_{sp}$ 为发动机推力比冲,  $g_0$ 为当地重力加速度,  $T$ 为固定比冲时发动机推力且 $T \leq T_{\max}$ 。若考虑变比冲发动机, 推力 $T$ 和排气速度 $v_e = I_{sp}g_0$ 的关系为

$$T = |\dot{m}| v_e$$

而能量与排气速度的关系则为 [98]

$$\varepsilon P = \frac{1}{2} |\dot{m}| v_e^2$$

其中 $\varepsilon$ 为推进系统的效率。因此能量和推力的关系为

$$T = \frac{2\varepsilon P}{I_{sp}g_0}$$

则卫星质量变化方程为

$$\dot{m}(t) = -\frac{T}{I_{sp}g_0} \doteq -\frac{T^2}{2\varepsilon P} \doteq -\frac{2\varepsilon P}{(I_{sp}g_0)^2}$$

## 2.6 小结

本章主要讨论了二体轨道问题的轨道根数和轨道动力学方程。在平方反比

地球引力场中，考虑有控外力作用，常用位置-速度矢量和轨道根数作为变量，描述航天器的运动。以位置-速度分量作为变量，分别讨论了在地球惯性坐标系和轨道坐标系下的有控动力学方程；应用改进的轨道根数，分别讨论了轨道坐标系中常用两种分解方式下的动力学方程；简单讨论了极坐标描述的动力学方程和卫星质量变化方程。在第三章，将应用开普勒型方程，考虑卫星质量变化，研究时间最优轨道机动问题。



### 第三章 时间最优轨道机动 I：开普勒型方程

有限推力时间最优轨道机动问题是航空航天领域的研究热点，轨道机动模式包括轨道转移、拦截与交会，目前众多的研究集中在轨道转移方面。轨道动力学的基础是二体轨道动力学 [2, 14]，在地球平方反比力场中，有控模型满足如下开普勒型方程2.5

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{T}}{m} + \mathbf{T}_p \quad (3.1)$$

上式描述的轨道动力学方程的状态变量是位置和速度矢量分量，被广泛应用于轨道优化问题研究。文献 [57]研究了燃料最优轨道转移问题，考虑了J2摄动和大气摄动，应用间接法将问题化成两点边值问题，然后应用多点打靶法BOUNDSO来求解；而文献 [91]则将直接法和间接法结合使用，应用遗传算法求解相应的边值问题。文献 [15]应用开普勒型方程研究了时间最优轨道转移问题，应用极大值原理设计了最优控制律，并提出了一种切换函数检验和分析的方法。

不同轨道机动任务的区分主要在终端约束边值条件，在终端时刻位置和速度向量均确定则是轨道交会问题，而只有位置向量确定则是轨道拦截问题。因而，不同的终端约束条件可以表示不同的轨道机动形式，如文献 [19, 57]用位置-速度表示的角动量和偏心率向量来确定终端条件。本章应用位置-速度描述的开普勒型方程研究时间最优轨道机动问题，由于不同的轨道使命的区别主要在终端约束条件，而且应用该方程研究轨道转移的文献较多，本章则主要研究时间最优轨道拦截问题。另外，已有的文献应用开普勒型方程，控制输入都是在惯性坐标系下分解，由于在轨道坐标系中，更容易分析控制分量对轨道参数改变的影响，因此本章主要应用轨道坐标系下描述的开普勒型方程研究轨道拦截问题。

本章的主要贡献有两点：1)应用控制在轨道坐标系下分解的动力学模型，根据极大值原理设计最优控制律，分析了奇异性，将时间最优轨道拦截问题化成两点边值问题；2)考虑了一种新的轨道拦截问题的终端条件描述，将目标轨道参数引入系统，使轨道拦截问题更合理。

#### 3.1 时间最优轨道机动问题描述

在二体轨道动力学基础上，航天器(本文主要是指地球卫星)动力学方程可

写成一仿射输入非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}) + \frac{T_{\max}}{m} \sum_{i=1}^3 u_i \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}) \quad (3.2)$$

考虑常值推力固定比冲发动机，其中 $T_{\max}$ 为发动机最大推力幅值。同时，卫星质量变化满足方程

$$\dot{m} = -\beta T_{\max} \|\boldsymbol{u}\| \quad (3.3)$$

而推力方向作为控制则满足约束

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \leq 1 \quad (3.4)$$

对于特定的轨道机动任务，仍需满足初始和终端边值条件

$$\Phi_0(t_0, \boldsymbol{x}(t_0), m(t_0)) = 0 \quad (3.5)$$

$$\Phi_1(t_f, \boldsymbol{x}(t_f), m(t_f)) = 0 \quad (3.6)$$

对于时间最优问题，则需最小化性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (3.7)$$

方程3.2-3.7构成了时间最优轨道机动问题，为简化研究问题，我们考虑以下假设条件

**A1)** 系统模型的状态始终满足路径约束

$$A = \{(\boldsymbol{x}, m) \mid \|\boldsymbol{r}\| > R_e, m \geq m_s\}$$

即卫星在椭圆域内飞行，在地心坐标系下位置向量幅值始终大于地球半径 $R_e$ ， $m_s$ 为不携带燃料时的卫星本体质量。

**A2)** 初始轨道和目标轨道是相异的，即最优控制是非空的。

**A3)** 卫星在终端时质量是自由的。

### 3.2 最优轨迹设计

考虑以位置、速度为状态变量的动力学方程，在不考虑姿态影响时假设卫星为点质量体，在外力作用下（不包括其他摄动力）的动力学方程为：

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} + \frac{\mathbf{T}}{m} \quad (3.8)$$

其中 $\mathbf{r}$ 为卫星相对地球地心位置矢量， $m$ 为卫星质量， $\mu$ 为地球引力常数； $\mathbf{T}$ 为发动机推力（控制输入），需满足约束 $\mathbf{T} \leq T_{\max}$ 。

#### 3.2.1 地心坐标系描述情形

首先考虑控制在地心惯性坐标系XYZ下分解情形，令 $\mathbf{T} = T_{\max} \mathbf{u}$ ，其中常数 $T_{\max} > 0$ 为最大推力幅值，控制约束变为 $\|\mathbf{u}\| \leq 1$ ，则考虑卫星质量变化的的动力学状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\mu \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} + \frac{T_{\max}}{m} \mathbf{u} \\ \dot{m} &= -\beta T_{\max} \|\mathbf{u}\| \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中 $x = (\mathbf{r}, \mathbf{v}, m) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ 为系统状态。

考虑时间最优轨道转移，问题满足的初始条件为

$$x(t_0) = (\mathbf{r}(t_0), \mathbf{v}(t_0), m(t_0)) \quad (3.10)$$

而对于轨道拦截问题，则在终端时刻 $\mathbf{r}(t_f)$ 已知， $\mathbf{v}(t_f)$ 自由， $m(t_f) \geq m_e$ 。

利用Pontryagin极大值原理，得系统的Hamiltonian 函数为

$$H = -1 + \mathbf{p}_r^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \left( -\mathbf{r} \frac{\mu}{r^3} + \frac{T_{\max}}{m} \mathbf{u} \right) - p_m \beta T_{\max} \|\mathbf{u}\| \quad (3.11)$$

其中 $p = (\mathbf{p}_r, \mathbf{p}_v, p_m) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ 为系统状态 $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, m)$ 对应的协态变量。

当 $\mathbf{p}_v \neq 0$ 时，对应的最优解 $x^* = (\mathbf{r}^*, \mathbf{v}^*, m^*)$ 称为正则最优解，对应的控制

称为正则最优控制，这时使H达极大值的最优推力取为：

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{p}_v}{\|\mathbf{p}_v\|} \quad (3.12)$$

上述分析中，我们假定 $\mathbf{p}_v \neq 0$ ，若在某时间点 $t_i \in [t_0, t_f], i = 1, 2, \dots, N$ 有 $p_v = 0$ ，而 $\dot{\mathbf{p}}_v \neq 0$ 时，有

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\mathbf{p}_v^T T_{\max}}{m} = 0$$

在这样的点控制 $\mathbf{u}$ 将改变方向，进行180度反向切换；而当在一个测度不为0的时间段 $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_f]$ 上 $\mathbf{p}_v = 0$ 时，相应的最优解 $x^* = (\mathbf{r}^*, \mathbf{v}^*, m^*)$ 称为奇异最优解，对应的控制称为奇异最优控制，由于此时有 $\dot{\mathbf{p}}_v = 0$ ，而选择这种坐标系的情况下 $\dot{\mathbf{p}}_v = -\mathbf{p}_r$ ，这将导致在一个测度不为0的时间段 $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_f]$ 上协态变量 $p \equiv 0$ ，根据最大值原理，这种情况是不可能的。所以在这种坐标系的选择下，不存在奇异最优解和奇异控制。

因此， $\|\mathbf{u}\| = 1$ 几乎处处满足，系统的最优Hamiltonian 函数为：

$$H^* = -1 + \mathbf{p}_r^T \mathbf{v} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{p}_v^T \mathbf{r} + \left( \frac{\|\mathbf{p}_v\|}{m} - \beta p_m \right) T_{\max} \quad (3.13)$$

根据极大值原理一阶必要条件得正则状态方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{T_{\max}}{m} \mathbf{u}^* \\ \dot{m} &= -\beta T_{\max} \end{aligned} \quad (3.14)$$

和协态方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_r &= \mu \left( \frac{\mathbf{p}_v}{r^3} - 3 \frac{\mathbf{p}_v^T \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} \right) \\ \dot{\mathbf{p}}_v &= -\mathbf{p}_r \\ \dot{p}_m &= \frac{T}{m^2} \|\mathbf{p}_v\| \end{aligned} \quad (3.15)$$

考虑横截条件,则在终端时刻有:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_r(t_f) &= [\lambda_{r_1} \quad \lambda_{r_2} \quad \lambda_{r_3}]^T \\
 \mathbf{p}_v(t_f) &= \mathbf{0} \\
 p_m(t_f) &= \begin{cases} 0, & m(t_f) > m_e \\ \lambda_m, & m(t_f) = m_e \end{cases} \\
 H^*(t_f) &= -1 + \mathbf{p}_r^T(t_f)\mathbf{v}(t_f) - \beta p_m(t_f)T_{\max} = 0
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

其中 $\lambda_i$ 为对应于终端约束的拉格朗日乘子。针对我们研究的问题,假设当轨道转移完成时,燃料并未消耗完,即满足假设条件A3,则横截条件取为:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_v(t_f) &= \mathbf{0} \\
 p_m(t_f) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

而在终端时刻位置同时满足

$$\mathbf{r}(t_f) = [r_1^f \quad r_2^f \quad r_3^f]^T$$

因此将地心惯性坐标下描述的轨道拦截问题转化为两点边值问题。

### 3.2.2 轨道坐标系描述情形

考虑推力方向在轨道坐标下沿切向-法向(R,T,N)分解,则有

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{f}_1 + u_2\mathbf{f}_2 + u_3\mathbf{f}_3$$

其中  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$  为轨道坐标系的基向量:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}_2 &= \frac{1}{\|(\mathbf{r}^T \mathbf{v})\mathbf{v} - \|\mathbf{v}\|^2 \mathbf{r}\|} \begin{bmatrix} (\mathbf{r}^T \mathbf{v})v_1 - \|\mathbf{v}\|^2 r_1 \\ (\mathbf{r}^T \mathbf{v})v_2 - \|\mathbf{v}\|^2 r_2 \\ (\mathbf{r}^T \mathbf{v})v_3 - \|\mathbf{v}\|^2 r_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}_3 &= \frac{1}{\|\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}\|} \begin{bmatrix} r_2 v_3 - r_3 v_2 \\ r_3 v_1 - r_1 v_3 \\ r_1 v_2 - r_2 v_1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.18)$$

记  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ , 则  $\mathbf{u}$  满足  $\|\mathbf{u}\| \leq 1$ , 系统的状态方程为:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{T_{\max}}{m} (u_1 \mathbf{f}_1 + u_2 \mathbf{f}_2 + u_3 \mathbf{f}_3) \\ \dot{m} &= -\beta T_{\max} \|\mathbf{u}\|\end{aligned}\quad (3.19)$$

利用Pontryagin极大值原理, 得系统的Hamiltonian 函数为

$$H = -1 + H_0 + \sum_{i=1}^3 u_i H_i$$

其中

$$\begin{aligned}H_0 &= \mathbf{p}_r^T \mathbf{v} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{p}_v^T \mathbf{r} - \beta p_m T_{\max} \|\mathbf{u}\| \\ H_i &= \frac{T_{\max}}{m} \mathbf{p}_v^T \mathbf{f}_i, \quad i = 1, 2, 3\end{aligned}\quad (3.20)$$

令  $\Psi = [H_1, H_2, H_3]$ , 当  $\Psi \neq 0$ , 相应的最优解  $x^* = (\mathbf{r}^*, \mathbf{v}^*, m^*)$  称为正则最优解, 对应的控制称为正则最优控制, 这时使  $H$  达极大值的最优推力取为:

$$\mathbf{u}^* = \frac{\Psi}{\|\Psi\|}\quad (3.21)$$

若假设不存在奇异性,  $\|\mathbf{u}\| = 1$  几乎处处满足, 则可得正则情况下系统的最

优Hamiltonian 函数为：

$$H = -1 + H_0 + \|\Psi\|$$

对应的状态方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{T_{\max} \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_v^T \mathbf{f}_i u_i}{m(\sum_{i=1}^3 (\mathbf{p}_v^T \mathbf{f}_i u_i)^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \dot{m} &= -\beta T_{\max} \|\mathbf{u}\| \end{aligned} \quad (3.22)$$

和协状态方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_r &= -\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{p}}_v &= -\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{v}} \\ \dot{p}_m &= \frac{T_{\max}}{m^2} \|\Psi\| \end{aligned} \quad (3.23)$$

同样考虑横截条件,则在终端时刻有：

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_v(t_f) &= \mathbf{0} \\ p_m(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

终端时刻位置同时满足 $\mathbf{r}(t_f) = [r_1^f \quad r_2^f \quad r_3^f]^T$ , 因此将(R,T,N)轨道坐标系下描述的轨道拦截问题转化为两点边值问题。

在上面的分析中, 我们假定 $\Psi \neq 0$ , 现进行奇异性分析。若在某时间点 $t_i \in [t_0, t_f], i = 1, 2, \dots, N$ 有 $\Psi = 0$ , 而 $\dot{\Psi} \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$$

在这样的点控制 $\mathbf{u}$ 将改变方向, 进行180度反向切换; 而当在一个测度不为0的时间段 $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_f]$ 上 $\Psi = 0$ 时, 相应的最优解 $x^* = (\mathbf{r}^*, \mathbf{v}^*, m^*)$ 称为奇异最优解, 对应的控制称为奇异最优控制。由坐标系的选取, 易知此时有 $\mathbf{p}_v(t) = \mathbf{0}$ , 而由 $\dot{\Psi} = 0$ , 可得方程

$$\dot{H}_i = \{H_i, H\} = \{H_i, H_0\} + \sum_{j \neq i}^3 \{H_i, H_j\} u_j = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

或者

$$\begin{bmatrix} 0 & h_{12} & h_{13} \\ -h_{12} & 0 & h_{23} \\ -h_{13} & -h_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{01} \\ h_{02} \\ h_{03} \end{bmatrix}$$

其中 $h_{ij}$ 是由下式定义的Poisson括号

$$h_{ij} = \{H_i, H_j\} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial H_i}{\partial v_k} \frac{\partial H_j}{\partial p_{vk}} - \frac{\partial H_i}{\partial p_{vk}} \frac{\partial H_j}{\partial v_k}, i = 0, 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$$

当系数矩阵非奇异时，可解出最优奇异控制。

易证Poisson括号和李括号有如下关系

$$\{H_i, H_j\} = \frac{T_{\max}}{m} \mathbf{p}_v^T [\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j]$$

若向量场 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ 张成的分布 $\Delta(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \text{span}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ 是对和的，则任意的 $[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j], i, j = 1, 2, 3$ ，可由 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ 线性表出，由此可知 $\{H_i, H_j\}$ 可表示成 $H_1, H_2, H_3$ 线性的线性组合，从而有

$$\dot{H}_i = \{H_i, H_0\} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

由此可得 $\mathbf{p}_r = 0$ ，与控制在地心坐标系分解的情形相同，这将导致在一个测度不为0的时间段 $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_f]$ 上协态变量 $\mathbf{p} = 0$ ，根据最大值原理，这种情况是不可能的。所以在这种坐标系的选择下，当分布 $\Delta(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \text{span}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ 对和时不存在奇异最优解和奇异控制。

**注记 3.1:** 在本章，我们应用极大值原理设计最优控制律。若应用所谓的极小值原理，则控制律和终端横截条件的符号则相反 [76]。但是，不管是应用极大值还是极小值原理，化成的两点边值问题的最优解是相同的。在后续章节中，应用极大值原理研究轨迹优化问题，都有类似的情况，不再另行说明。

### 3.3 数值仿真

在3.2节，我们考虑了以卫星位置和速度为变量的动力学方程，对于时间最优轨道拦截问题，应用极大值原理，分别研究了惯性坐标系和轨道坐标系下

最优推力矢量设计，从而将时间最优轨道拦截问题转化为两点边值问题。在本节，则考虑应用单值打靶法求解相应的两点边值问题，为便于问题的数值处理，转而考虑无量纲化系统。设  $R_e = 6.378 * 10^3 \text{Km}$  为地球半径， $t_e$  为卫星绕半径为  $R_e$  的圆飞行一圈的时间，则有

$$\omega_e = \sqrt{\frac{\mu}{R_e^3}}, \quad t_e = \frac{2\pi}{\omega_e} = 2\pi \sqrt{\frac{r_e^3}{\mu}}$$

定义无量纲量：

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{R_e} \mathbf{r}, \quad \bar{\mathbf{v}} = \frac{t_e}{R_e} \mathbf{v}, \quad \bar{t} = \frac{t}{R_e}, \quad \bar{\mu} = \frac{t_e^2}{R_e^3}, \quad \mu = 4\pi^2$$

本节的数值仿真采用的是3.2.2节轨道坐标系描述方程，为书写方便，以下则以惯性坐标系下系统为例。描述卫星运动的原动力学方程可写为

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{d\bar{t}} &= \frac{t_e}{R_e} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{t_e}{R_e} \mathbf{v} = \frac{t_e}{R_e} \frac{R_e}{t_e} \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}} \\ \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{d\bar{t}} &= \frac{t_e^2}{r_e} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{t_e^2}{R_e} \left( -\mathbf{r} \frac{\mu}{r^3} + \frac{T_{\max}}{m} \mathbf{u} \right) = -\frac{t_e^2}{R_e^3} \bar{\mathbf{r}} \frac{\mu}{\bar{r}^3} + \frac{t_e^2}{R_e} \frac{T_{\max}}{m} \mathbf{u} \end{aligned}$$

即系统方程为：

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{d\bar{t}} &= \bar{\mathbf{v}} \\ \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{d\bar{t}} &= -\bar{\mathbf{r}} \frac{\bar{\mu}}{\bar{r}^3} + \frac{t_e^2}{r_e} \frac{T_{\max}}{m} \mathbf{u} \\ \frac{dm}{d\bar{t}} &= -\beta T_{\max} t_e \|\mathbf{u}\| \end{aligned} \quad (3.25)$$

对系统3.25，同样应用极大值原理设计最优控制律，相应的Hamiltonian函数为

$$\bar{H} = -1 + \mathbf{p}_{\bar{\mathbf{r}}} \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{p}_{\bar{\mathbf{v}}} \left( -\bar{\mathbf{r}} \frac{\bar{\mu}}{\bar{r}^3} + \frac{t_e^2}{r_e} \frac{T_{\max}}{m} \mathbf{u} \right) - p_m \beta T_{\max} t_e \|\mathbf{u}\| \quad (3.26)$$

则根据极大值原理一阶必要条件，系统的协状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{p}}_{\bar{\boldsymbol{r}}} &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{\boldsymbol{r}}} \\ \dot{\boldsymbol{p}}_{\bar{\boldsymbol{v}}} &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{\boldsymbol{v}}} \\ \dot{p}_m &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial m}\end{aligned}\quad (3.27)$$

对于时间最优轨道拦截问题，初始边界条件为

$$\Phi_0 = (\boldsymbol{r}(0) - \boldsymbol{r}^0, \boldsymbol{v}(0) - \boldsymbol{v}^0, m(0) - m^0) = 0$$

而终端边值条件则为

$$\Phi_1 = (\boldsymbol{r}(t_f) - \boldsymbol{r}^f, \boldsymbol{p}_v(t_f), p_m(t_f)) = 0$$

接下来应用单值打靶法求解化成的两点边值问题。

### 3.3.1 算例1

系统模型中的物理参数为

$$\begin{aligned}\mu &= 5165.8620912 \quad \text{Mm}^3/\text{h}^2 \\ \beta &= 1.42 \times 10^{-2} \quad \text{h/Mm}\end{aligned}$$

而数值边界条件分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}^0 &= (-9.7836\text{Mm}, 0, 0) \\ \boldsymbol{v}^0 &= (0, -0.9969\text{Mm/h}, -0.2193\text{Mm/h}) \\ m^0 &= 1500\text{kg} \\ \boldsymbol{r}^f &= (3.9392\text{Mm}, 2.7283\text{Mm}, 5.7958\text{Mm})\end{aligned}$$

首先考虑最大推力幅值 $T_{\max} = 1\text{N}$ ，图3.1所示为在地球惯性坐标系下的最优轨迹，上图中的箭头表示发动机推力方向矢量，左下图是最优轨迹在地球赤道平面上的投影，而由右下图则可以看出飞行轨道的轨道倾角变化规律。

表 3.1 最小飞行时间

$T_{\max}(\text{N})$	0.5	1	2	4	6	8	10
$t_{f\min}(\text{h})$	1532.117	767.7074	385.9243	195.6217	132.4835	101.0232	79.4446

图3.2所示为状态变量即位置、速度分量已经质量随时间变化轨迹，任务完成时间为767.7074h，其中为图示方便， $R = \|\mathbf{r}\|, V = \|\mathbf{v}\|$ 分别表示位置和速度向量的幅值。由图可以看出位置和速度分量随时间是周期振荡。图3.3所示的则是最优推力方向随时间变化轨迹，由图可以看出满足 $\|\mathbf{u}\| = 1$ ，因而质量变化可以直接写出 $m(t) = m^0 - \beta T_{\max} t$ ，由图3.2也可看出与时间成线性变化关系。

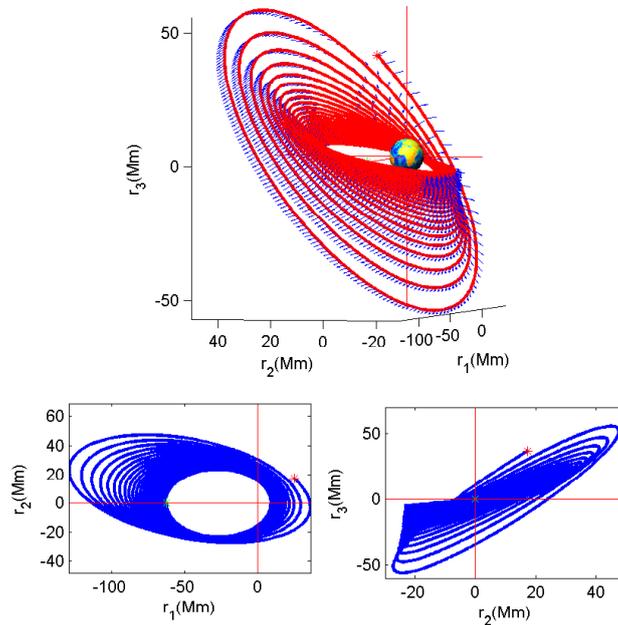


图 3.1 时间最优轨道拦截3D轨迹，1N

图3.5,3.6,3.7所示的则是最大推力幅值为 $T_{\max} = 10\text{N}$ 时相应的数值仿真结果，飞行时间为79.4446h。改变推力幅值大小，重复数值实验，飞行时间分别为相应的结果由图3.4表示，可以看出最小飞行时间和最大推力幅值之间存在如下关系

$$t_{f\min} \cdot T_{\max} \approx c$$

其中 $c$ 为常数。

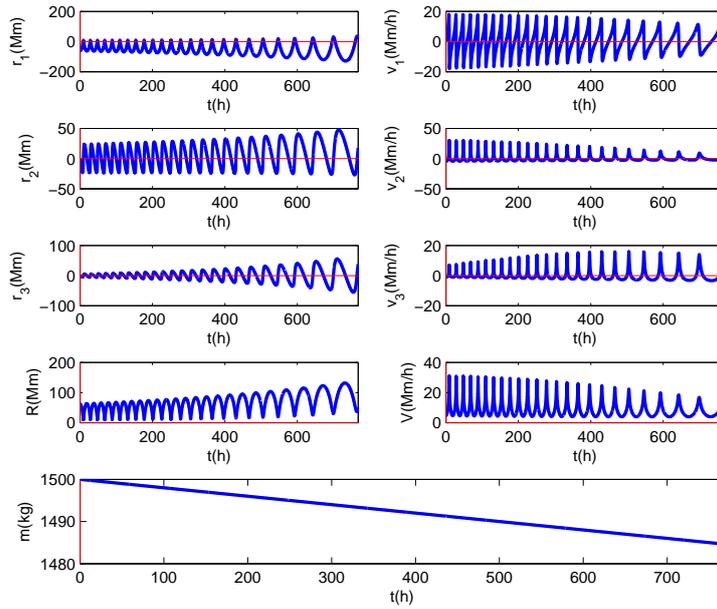


图 3.2 时间最优轨道拦截状态变化轨迹, 1N

### 3.3.2 算例2

算例1考虑的只是单颗卫星, 给定初始和终端条件, 严格意义上讲并不是轨道拦截问题, 仍是轨道转移问题。对于轨道拦截问题, 则需研究两个航天器的相对运动, 终端约束条件不是一个确定值, 而是一个流形约束, 即

$$\begin{aligned}
 \phi_1(t_f) &= r_1(t_f) - r_1^f = 0 \\
 \phi_2(t_f) &= r_2(t_f) - r_2^f = 0 \\
 \phi_3(t_f) &= r_3(t_f) - r_3^f = 0
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

即要求在终端时刻两个航天器相对位置为0, 而相对速度自由的。

式3.28中 $\mathbf{r}^f = (r_1^f, r_2^f, r_3^f)$ 则需满足目标轨道约束, 是关于真近点角的变化函数, 与飞行时间有关。现考虑用经典轨道根数 $(a_f, e_f, i_f, \Omega_f, \omega_f, \theta_f)$ 描述目标轨道, 前五个参数描述目标轨道的大小、形状和轨道倾角, 是确定量, 而第六个参数真近点角 $\theta_f$ 则描述目标航天器某一时刻在轨道上的位置, 随飞行时间变化。以下为书写方便, 省略下标 $f$ , 目标航天器在终端时刻的位置可用轨道根数

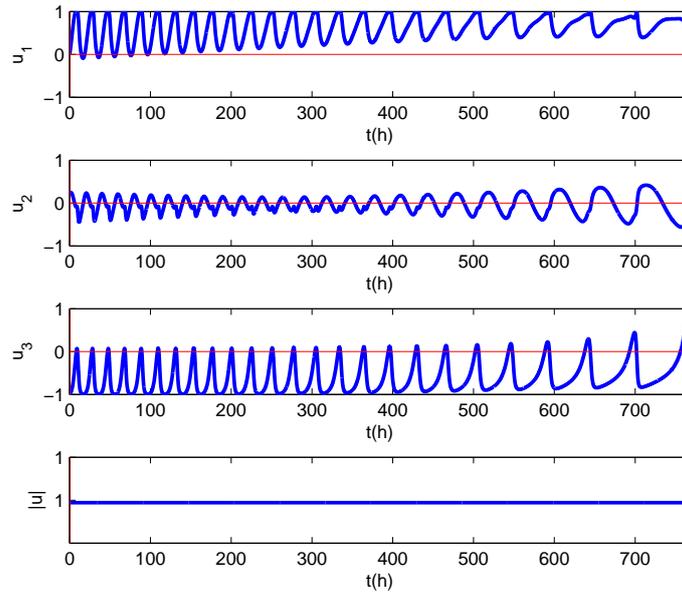


图 3.3 时间最优轨道拦截最优控制轨迹，1N

表示为

$$\begin{aligned}
 r_1^f &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} (\cos\Omega \cos(\omega+\theta) - \sin\Omega \sin(\omega+\theta) \cos(i)) \\
 r_2^f &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\sin\theta} (\cos\Omega \cos(\omega+\theta) + \cos\Omega \sin(\omega+\theta) \cos(i)) \\
 r_3^f &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} (\sin(\omega+\theta) \sin(i))
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

其中的真近点角是关于时间变化的

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3(1-e^2)^3}} (1+e\cos\theta)^2 \tag{3.30}$$

方程3.30难以写出 $\theta$ 关于时间 $t$ 的解析表达式，为便于数值处理，将其引入系统方程，从而 $\theta$ 成为一新的系统变量。根据极大值原理横截条件可得以下终端约

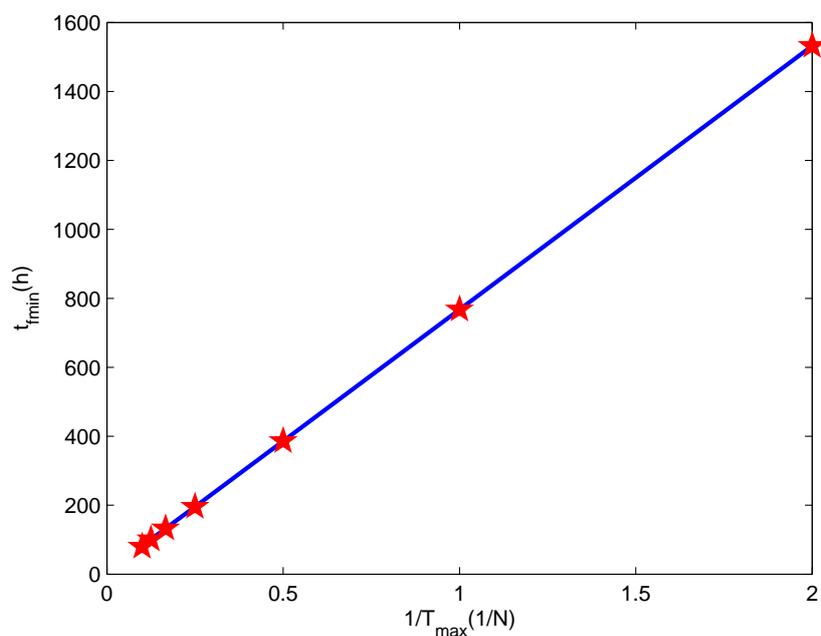


图 3.4 最小飞行时间和最大推力幅值关系

束条件

$$\begin{aligned}
 p_{r_1} &= -\sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial r_1} = -\lambda_1 \\
 p_{r_2} &= -\sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial r_2} = -\lambda_2 \\
 p_{r_3} &= -\sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial r_3} = -\lambda_3
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

其中 $\lambda_i, i = 1, 2, 3$  是Lagrange乘子，而关于 $\theta$ 的横截条件则为

$$p_\theta = -\sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial r_i^f}{\partial \theta} \tag{3.32}$$

由于终端时刻速度矢量和质量均是自由的，因而由横截条件可知

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_v &= \mathbf{0} \\
 p_m &= 0
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

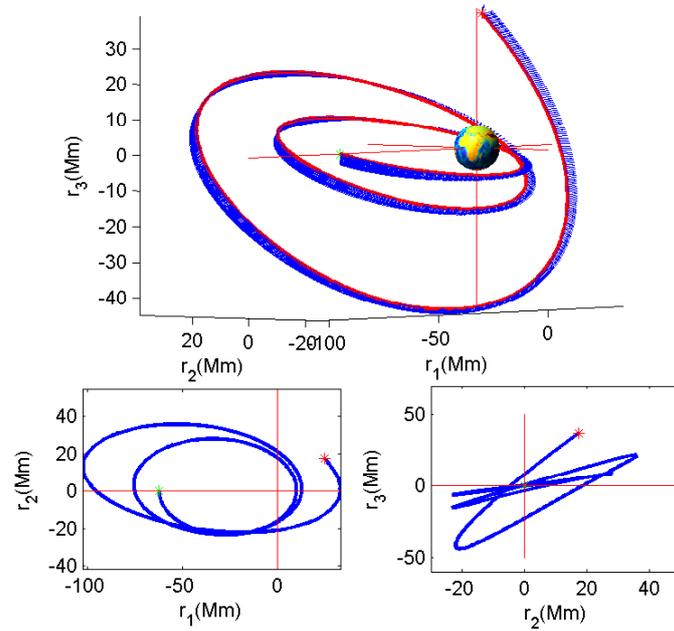


图 3.5 时间最优轨道拦截3D轨迹，10N

Lagrange乘子 $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ 由方程组3.31确定，将求解得到的 $\lambda_i$ 代人方程3.32可得到一个终端边值条件，因此方程3.28，3.33和3.32组成了7个终端边值条件从而将问题转化为两点边值问题。

数值仿真中，初始数值条件为

$$\begin{aligned}(r_1, r_2, r_3)(0) &= (2.0881\text{Mm}, 1.1872\text{Mm}, 0.2093\text{Mm}) \\(v_1, v_2, v_3)(0) &= (-2.0231\text{Mm/h}, 3.4508\text{Mm/h}, 0.6085\text{Mm/h}) \\m(0) &= 1500\text{kg} \\\theta(0) &= 1.0472\text{rad}\end{aligned}$$

而目标轨道参数为

$$(a_f, e_f, i_f, \Omega_f, \omega_f) = (32.378\text{Mm}, 0.05, 1.0472\text{rad}, 0.5236\text{rad}, 0.5236\text{rad})$$

以下是最大推力幅值 $T_{\max} = 20\text{N}$ 的数值仿真结果，图3.8是在惯性坐标系下的最优飞行轨迹，左上图中点划线表示的是目标轨道，其上的实线部分则表示任务完成时间内目标航天器的飞行轨迹，由图可以看出，拦截航天器的轨道倾

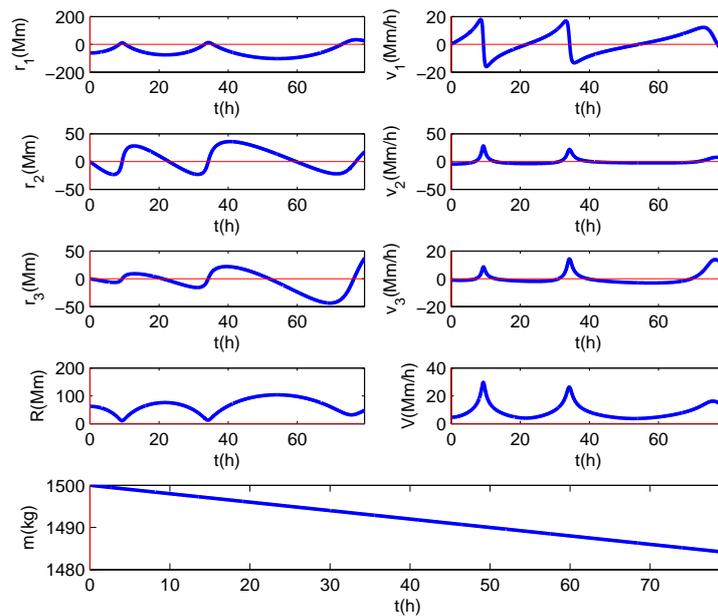


图 3.6 时间最优轨道拦截状态变化轨迹, 10N

角变化较小且比较缓慢，在任务时间内大部分是实现轨道半长轴的增大，由左下图也可明显看出。

图3.9和图3.10则分别是状态和最优控制随时间变化轨迹，与算例1的仿真结果作比较，我们则可以看出位置和速度分量仍是振荡的，但是在地球惯性坐标系下的绝对位置和速度则是近似线性变化的，这与图3.8的结果是相对应的。从图3.10则可看出，在任务总时间的前半段时间内，控制分量在 $u_1$ 方向几乎一直以最大值允许，而在 $u_2$ 方向的分量几乎为0；在任务即将完成时间段，控制分量在 $u_1, u_2$ 方向几乎为0，而在 $u_3$ 方向则几乎一直以最大推力工作。这是因为在轨道坐标系下，推力方向沿径向-法向标架分解， $u_1$ 方向主要是控制轨道半长轴， $u_2$ 主要控制轨道偏心率，而 $u_3$ 则主要控制轨道倾角的变化。这与图3.8的结果是相对应的。

### 3.4 小结

在本章，考虑了用位置和速度作为变量描述的轨道动力学方程，对于时间最优轨道拦截问题，应用极大值原理，分别研究了推力矢量在惯性坐标系和轨道坐标系下分解的最优控制律设计。在假设终端时刻卫星质量是自由的条件

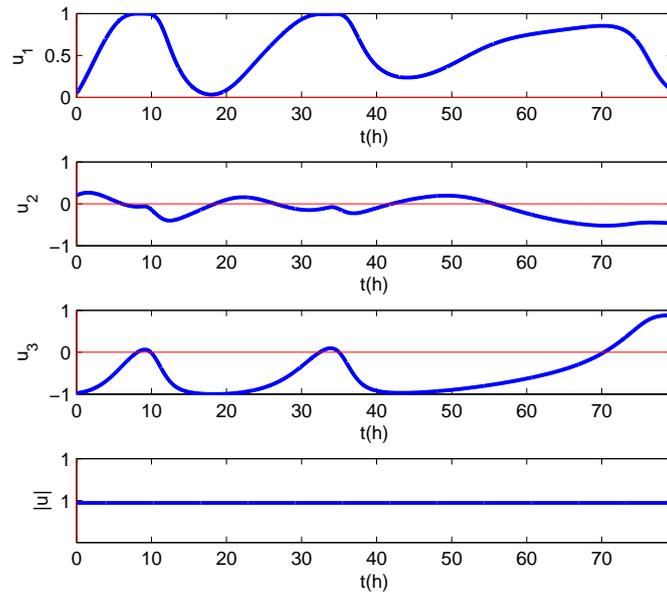


图 3.7 时间最优轨道拦截最优控制轨迹，10N

下，依据极大值原理理论证明了不存在奇异控制情形，最优控制几乎处处满足  $\|u\| = 1$ 。应用极大值原理一阶必要条件和横截条件，将时间最优轨道拦截问题转化为两点边值问题。应用单值打靶法求解相应的边值问题，数值仿真结果表明轨道拦截问题能够完成，位置和速度分量随时间呈振荡变化；改变推力幅值大小重复数值试验，结果表明最大推力幅值和最小飞行时间的乘积近似成常数关系。

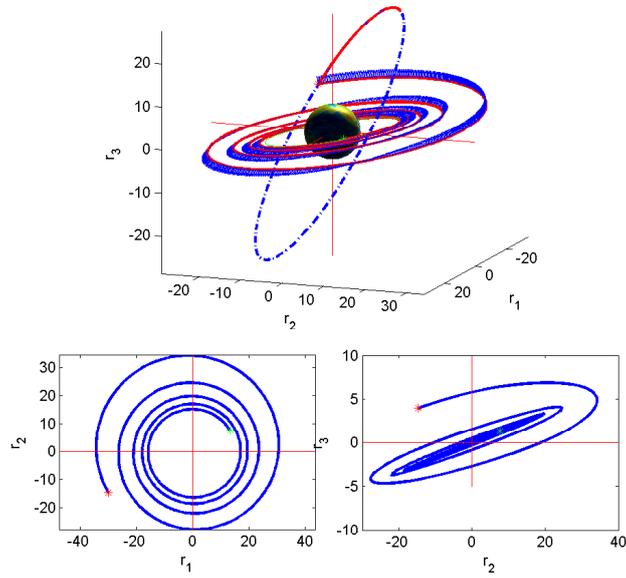


图 3.8 时间最优轨道拦截3D轨迹, 20N

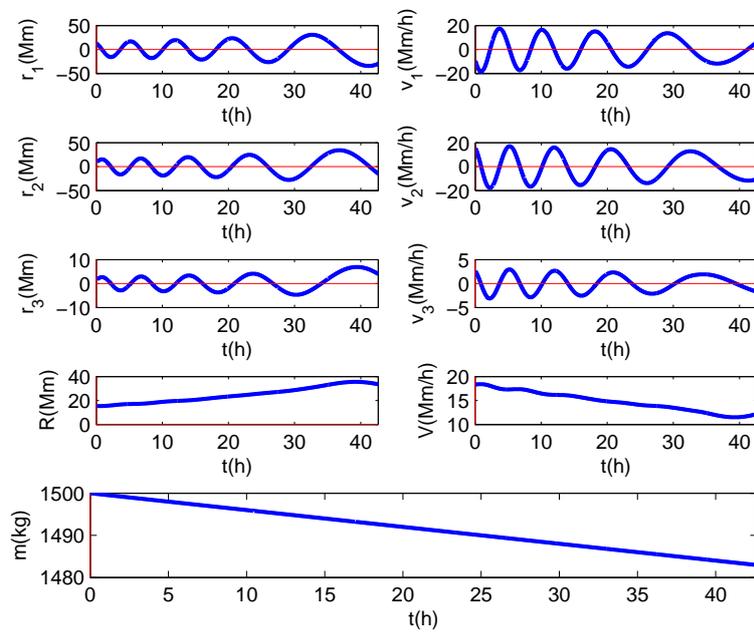


图 3.9 时间最优轨道拦截状态变化轨迹, 20N

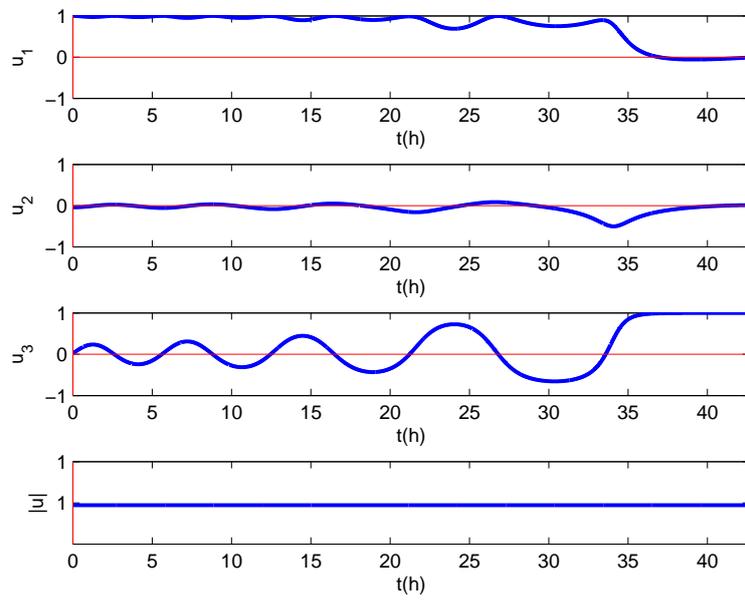


图 3.10 时间最优轨道拦截最优控制轨迹，20N



## 第四章 时间最优轨道机动 II：轨道根数描述方程

在第三章，分别应用在地心坐标系和轨道坐标系下位置-速度表示的卫星轨道运动方程，研究了时间最优轨道拦截问题，根据极大值原理设计了最优控制律，并证明了应用开普勒型方程不存在奇异最优解和奇异控制。根据数值仿真结果可以看出该方程解具有振荡性，且假设的路径约束条件A1不易满足，数值上处理比较困难。因此，在本章应用更具普遍性的改进轨道根数描述轨道动力学方程来研究时间最优轨道机动问题，并考虑J2摄动的影响。

应用改进轨道根数描述的轨道动力学方程，根据几何方法，系统满足可控性条件 [61]。根据Filopov定理可以证明最优解的存在性 [64]，但是最优控制是否是唯一和连续的仍然是开问题 [113]。文献 [30]研究了单输入系统的可控性，在切向-法向标架下，沿 $f_n, f_c$ 方向在椭圆域内不是无条件可控的，而控制沿切向的单输入系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_0 + u \boldsymbol{f}_t$$

在椭圆域内是完全可控的。若记 $\boldsymbol{p}$ 为协状态， $H_0 = \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{f}_0 \rangle, H_t = \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{f}_t \rangle$ ，则在奇异面

$$\Sigma' = \{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) : H_0 = \{H_0, H_t\} = 0\}$$

上有控制输入

$$u_s = \frac{\{H_0, \{H_0, H_t\}\}}{\{H_t, \{H_0, H_t\}\}}$$

式中： $\{\cdot, \cdot\}$ 为Poisson括号。而对于多输入仿射非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_0 + \sum_{i=1}^m u_i \boldsymbol{f}_i$$

奇异控制则满足

$$\{H_i, H_0\} + \sum_{j=1}^m \{H_i, H_j\} u_j = 0$$

其中 $\{\{H_i, H_j\}\}_{1 \leq i, j \leq m}$ 是对角元素为0的反对称矩阵，求解控制输入 $u_i$ 需要分 $m$ 是奇数和偶数两种情况 [64, 114]。

众多学者应用改进轨道根数描述的动力学方程开展了时间最优轨道转移问题研究 [30, 31, 33, 61–63, 107, 108]。文献 [62]研究了共面轨道转移情形，证明了

切换函数是连续可微的而且仅存在有限多个孤立零点，即不存在奇异弧而仅存在在切换点，而在任意两个切换点之间，解是光滑连续的。进而证明了在奇异点都是 $\pi$ 奇异，即在切换点控制输入方向立刻旋转180度。文献 [115,116]应用单值打靶法研究了椭圆轨道向地球同步轨道转移问题，数值计算结果表明最大推力幅值与最优轨道转移时间有如下关系

$$t_{f \min} \cdot T_{\max} \approx c$$

这是数值计算的结果，理论上仍是开问题 [113]。

在第三章的讨论中，可知轨道机动任务也包括轨道拦截和交会，它们和轨道转移任务之间的区别主要在终端边值条件。根据作者目前掌握的文献来看，应用改进轨道根数描述的高斯动力学方程研究时间最优轨道拦截和交会的文献很少见到。因此，在本章，在统一的框架下，我们应用改进轨道根数描述的高斯动力学方程研究包括轨道转移、交会和拦截在内的时间最优轨道机动问题，应用极大值原理，将轨迹优化问题转化为两点边值问题，同时分别讨论了轨道转移、交会和拦截问题的终端边值条件。

本章的主要贡献在于：1)应用改进轨道根数描述的高斯型动力学方程，间接优化方法用于研究时间最优轨道拦截和交会问题，并详细讨论了各自终端条件的描述方法。2)数值仿真结果表明，最大推力幅值和最小飞行时间近似成常数关系的猜想同样适用于轨道拦截和交会问题；同时也表明，最大推力幅值固定时，轨道交会和转移问题几乎具有相同的最优轨迹。

## 4.1 问题描述

考虑应用改进轨道根数描述卫星的轨道运动，令 $\mathbf{x} = [P \ e_x \ e_y \ h_x \ h_y \ L]^T$ ，则描述卫星运动的系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0 + \frac{T_{\max}}{m} \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{f}_i + \sum_{i=1}^3 g_i \mathbf{f}_i \quad (4.1)$$

其中 $T_{\max}$ 为常值推力发动机最大推力幅值， $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]$ 为发动机推力方向矢量。若推力在轨道坐标系下沿径向-法向(R,T,N)标架下分解，则定义卫星

动态的四个向量场如方程(2.12)描述，写成向量形式为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{P}} \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{W^2}{P} \right]^T \\
 \mathbf{f}_1 &= \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left[ 0 \ \sin L \ -\cos L \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T \\
 \mathbf{f}_2 &= \sqrt{\frac{P}{\mu}} \frac{1}{W} \left[ 2P \ W \cos L + \eta_x \ W \sin L + \eta_y \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T \\
 \mathbf{f}_3 &= \sqrt{\frac{P}{\mu}} \frac{1}{W} \left[ 0 \ -Ze_y \ Ze_x \ \frac{C}{2} \cos L \ \frac{C}{2} \sin L \ Z \right]^T
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $\mu$ 为地球引力常数，其他参数则有如下形式：

$$\begin{aligned}
 W &= 1 + e_x \cos L + e_y \sin L, \eta_x = e_x + \cos L, \eta_y = e_y + \sin L, \\
 Z &= h_x \sin L - h_y \cos L, C = 1 + h_x^2 + h_y^2
 \end{aligned}$$

方程4.1中的 $g_i$ 表示摄动作用力，若是考虑地球扁率摄动的影响，一阶扁率在径向-法向方向分解用经典轨道根数描述为 [2]

$$\begin{aligned}
 g_1 &= -\frac{3}{2} J_2 \frac{\mu R_e^2}{r^4} [1 - 3 \sin^2 i \sin^2(\omega + f)] \\
 g_2 &= -\frac{3}{2} J_2 \frac{\mu R_e^2}{r^4} \sin^2 i \sin 2(\omega + f) \\
 g_3 &= -\frac{3}{2} J_2 \frac{\mu R_e^2}{r^4} \sin 2i \sin^2(\omega + f)
 \end{aligned}$$

用改进轨道根数描述则为 [117]

$$\begin{aligned}
 g_1 &= -\frac{3}{2} J_2 \frac{\mu R_e^2}{r^4} \left[ 1 - \frac{12(h_x \sin L - h_y \cos L)^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2} \right] \\
 g_2 &= -12 J_2 \frac{\mu R_e^2}{r^4} \frac{(h_x \sin L - h_y \cos L)(h_x \cos L + h_y \sin L)}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2} \\
 g_3 &= -6 J_2 \frac{\mu R_e^2}{r^4} \frac{(h_x \sin L - h_y \cos L)(1 - h_x^2 - h_y^2)}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2}
 \end{aligned}$$

其中

$$r = \frac{P}{1 + e_x \cos L + e_y \sin L}$$

令

$$\tilde{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{f}_0 + \sum_{i=1}^3 g_i \mathbf{f}_i$$

则系统可描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{f}}_0 + \frac{T_{\max}}{m} \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{f}_i \quad (4.3)$$

考虑卫星质量变化方程为

$$\dot{m} = -\beta T_{\max} |\mathbf{u}| \quad (4.4)$$

而控制输入需满足约束

$$\|\mathbf{u}\| \leq 1$$

对于轨道机动任务，仍需满足边值约束

$$\begin{aligned} \Phi(0, \mathbf{x}(0), m(0)) &= 0 \\ \Phi(t_f, \mathbf{x}(t_f), m(t_f)) &= 0 \end{aligned}$$

至此，我们完成了轨道机动问题的简单描述，为便于应用极大值原理设计时间最优控制律，控制约束改写成

$$\|\mathbf{u}\| = 1, 0 \leq T \leq T_{\max}$$

对于固定比冲常值推力发动机，控制则变成推力方向矢量和推力幅值大小

$$\mathbf{u}_c = T\mathbf{u}, \quad 0 \leq T \leq T_{\max}, \quad \|\mathbf{u}\| = 1 \quad (4.5)$$

综合考虑，时间最优轨道机动问题可描述为

$$(TP)_t \begin{cases} \min J = \int_0^{t_f} dt & \text{性能指标} \\ \dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{f}}_0(\mathbf{x}) + \frac{T}{m} \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) & \text{卫星动态} \\ \dot{m} = -\beta T & \text{质量变化} \\ \Phi(0, \mathbf{x}(0), m(0)) = 0 & \text{初始条件} \\ \Phi(t_f, \mathbf{x}(t_f), m(t_f)) = 0 & \text{终端条件} \\ \|\mathbf{u}\| = 1, 0 \leq T \leq T_{max} & \text{控制约束} \end{cases} \quad (4.6)$$

为简化研究问题，我们考虑以下假设条件

**A1)** 系统模型的状态始终满足路径约束

$$A = \{(x, m) | P > 0, \|(e_x, e_y)\| < 1, m \geq m_s\}$$

即卫星在椭圆域内飞行，在地心坐标系下位置向量幅值始终大于地球半径， $m_s$ 为不携带燃料时的卫星本体质量。

**A2)** 初始轨道和目标轨道是相异的，即最优控制是非空的。

**A3)** 卫星在终端时质量是自由的。

## 4.2 正则最优控制律设计

这一节，我们研究时间最优轨道机动 $(TP)_t$ 的最优控制问题，应用极大值原理，相应的Hamiltonian函数为

$$H = p_0 + H_0 + \frac{T}{m} \sum_{i=1}^3 u_i H_i - \beta p_m T + \nu(\|\mathbf{u}\|^2 - 1) \quad (4.7)$$

在式4.7中， $p_0$ 是一个非正的常数， $H_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 是Hamiltonian提升 $\langle \mathbf{p}, \mathbf{f}_i \rangle$ ， $\mathbf{p}$ 是状态 $\mathbf{x}$ 对应的协变量， $p_m$ 是质量 $m$ 对应的协变量， $\nu$ 则是Lagrange乘子。则正则情况下， $p_0$ 是负常数且被整定取为-1。定义 $\Psi =$

$(H_1, H_2, H_3)$ ，而最优控制则由下式确定

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 \\ \|\mathbf{u}\| = 1 \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \leq 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

当任何时候  $\Psi \neq 0$  时，求解方程组

$$\begin{aligned} \nu &= -\frac{T}{2m} \|\Psi\| \\ \mathbf{u} &= \frac{\Psi}{\|\Psi\|} \end{aligned}$$

可得到  $\nu$  和  $\mathbf{u}$ 。

定义切换函数为

$$S = \frac{\|\Psi\|}{m} - \beta p_m \quad (4.9)$$

因此，可将与推力有关的项合并起来，从而Hamiltonian 函数可以重新写成

$$H = p_0 + H_0 + S \times T \quad (4.10)$$

根据极大值原理一阶必要条件，描述协变量  $p_m$  的动态方程为

$$\dot{p}_m = \frac{T}{m^2} \|\Psi\|$$

而根据假设A2，由极大值原理横截条件可知  $p_m(t_f) = 0$ ，由上式我们可以看出  $p_m$  是非正的增函数且趋近于  $p_m(t_f)$ ，因此切换函数  $S$  是非负的，当推力幅值最大时Hamiltonian函数也取最大。根据以上分析，有以下命题：

**命题 4.1:** 当假设A1和A2满足，若  $\Psi = (H_1, H_2, H_3)$  不为0时，则时间最优轨道机动问题  $(TP)_t$  的最优控制为

$$\mathbf{u} = \frac{\Psi}{\|\Psi\|}, \quad T = T_{\max} \quad (4.11)$$

上面我们考虑了正则最优控制律设计，接下来考虑奇异情况。

令  $(x, m, p, p_m, \mathbf{u})$  是系统极值解，极值的分类则依赖于轨迹与切换面  $\Psi = 0$  的接触阶数。当  $\Psi \neq 0$ ，控制  $\mathbf{u}$  是光滑的且有式 4.11 形式时，则说极值解是 0 阶的，若  $\Psi \equiv 0$  时则是奇异的 [30]。  $\|\Psi\|$  是一个在时域内与奇异弧和切换点相关的函数，文献 [62] 已经证明了  $\|\Psi\|$  是连续可微的，几何分析也表明在集合  $\{\Psi = 0\}$  内仅存在有限多个切换点。因此有下述命题：

**命题 4.2:** 对于固定比冲发动机，设发动机推力最大幅值为  $T_{\max}$ ，若在路径约束安全区域  $A$  内存在最优轨迹  $(x, m)$ ，则时间最优轨道机动问题  $(TP)_t$  相应的最优控制几乎处处满足  $\|\mathbf{u}\| = 1, T = T_{\max}$ 。

**注记 4.1:** 在文献 [30] 和 [62] 中，作者研究了时间最优轨道转移问题，得到了类似命题 4.1 和 4.2 的结论。应用 Pontryagin 极大值原理，轨道拦截或交会问题与轨道转移问题的主要区别在于终端条件，因此命题 4.1 和 4.2 同样适用于轨道拦截和交会问题。

根据命题 4.2,  $T = T_{\max}$  几乎处处满足，因此卫星质量可以表示成时间的显式函数

$$m(t) = m^0 - \beta T_{\max} t \quad (4.12)$$

其中  $m^0$  是卫星在任务初始时刻的质量。进一步，为简化问题，我们令  $\tau = \frac{t}{t_f}$ ，从而将飞行时间整定到区间  $[0, 1]$ ，最终飞行时间  $t_f$  则作为系统一个新的常数变量。因此，时间最优轨道机动问题  $(TP)_t$  可转化为如下 Mayer 型最优性能指标的形式

$$(TP)_\tau \begin{cases} \min & J = t_f(1) \\ \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} &= t_f \left( \tilde{\mathbf{f}}_0(\mathbf{x}) + \frac{T_{\max}}{m(t_f\tau)} \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \right), \tau \in [0, 1] \\ \frac{dt_f}{d\tau} &= 0 \\ \Phi(0, \mathbf{x}(0), t_f(0)) &= 0, \Phi(1, \mathbf{x}(1), t_f(1)) = 0 \\ \|\mathbf{u}\| &= 1 \end{cases} \quad (4.13)$$

若  $(\mathbf{x}, t_f, \mathbf{u})$  是问题  $(TP)_\tau$  的解，则有绝对连续协变量  $\mathbf{p}$  和  $p_{t_f}$  分别对应于状态  $\mathbf{x}$  和  $t_f$ ，因此根据极大值原理一阶必要条件， $(\mathbf{x}, t_f, \mathbf{p}, p_{t_f})$  是下述两点边值问

题的解

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H^*}{\partial \boldsymbol{p}} \quad (4.14a)$$

$$\dot{t}_f = 0 \quad (4.14b)$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H^*}{\partial \boldsymbol{x}} \quad (4.14c)$$

$$p_{t_f} \dot{t}_f = -\frac{\partial H^*}{\partial t_f} \quad (4.14d)$$

同时满足初始条件

$$\begin{aligned} \Phi(0) = (P(0) - P^0, e_x(0) - e_x^0, e_y(0) - e_y^0, h_x(0) - h_x^0, \\ h_y(0) - h_y^0, L(0) - L^0, p_{t_f}(0) - p_{t_f}^0) = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

和终端边值条件

$$\tilde{\Phi}(1) = \Phi(1, \boldsymbol{x}(1), t_f(1), \boldsymbol{p}(1), p_{t_f}(1)) = 0 \quad (4.16)$$

对于轨道转移、拦截和交会问题，假设满足同样的初始边值条件，而终端边值条件则需要由具体的任务来确定。式4.14中，新的Hamiltonian函数具有如下形式

$$H^* = \left\langle \boldsymbol{p}, t_f \left( \tilde{\boldsymbol{f}}_0(\boldsymbol{x}) + \frac{T_{max}}{m(t_f \tau)} (u_1^* \boldsymbol{f}_1(x) + u_2^* \boldsymbol{f}_2(x) + u_3^* \boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{x})) \right) \right\rangle \quad (4.17)$$

其中最优控制 $\boldsymbol{u}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ 仍然是由4.11定义的函数。至此，将连续推力时间最优轨道机动问题转化为两点边值问题，下一节我们将讨论不同轨道机动使命的终端边值条件。

### 4.3 边值问题和横截条件

应用极大值原理，我们将时间最优轨道机动问题转化为两点边值问题。作为问题出发点，我们首先讨论时间最优轨道转移问题，在此基础上，在统一的框架下研究时间最优轨道转移、拦截与交会问题。首先给出轨道机动方式的简单描述：

- ◆ **轨道转移**：从初始轨道运动到目标轨道，初始轨道和目标轨道已知，但航天器到达目标轨道的位置不确定。
- ◆ **轨道拦截**：初始轨道和航天器在初始轨道上的位置已知，目标轨道已知，要求在终端时刻转移轨道上的航天器与目标轨道上的拦截目标的相对位置为0，相对速度自由。
- ◆ **轨道交会**：初始轨道和航天器在初始轨道上的位置已知，目标轨道已知，要求在终端时刻转移轨道上的航天器与目标轨道上的交会目标的相对位置为0，相对速度也为0。

根据上面对轨道机动方式的定义，可知在初始条件相同的情况下，轨道转移、拦截与交会的差别主要是终端条件。令 $(P^f, e_x^f, e_y^f, h_x^f, h_y^f, L^f)$ 为描述目标轨道根数，接下来，我们分别讨论三种机动方式的终端条件。

### 4.3.1 轨道转移

轨道转移问题得到了广泛研究，其终端目标轨道满足条件 [31,107,108]

$$(P(1) - P^f, e_x(1) - e_x^f, e_y(1) - e_y^f, h_x(1) - h_x^f, h_y(1) - h_y^f) = 0$$

和 $(p_L(1) - p_L^f, p_{t_f}(1) - p_{t_f}^f) = 0$ 。卫星在目标轨道上的位置不确定，因而终端时刻变量 $L$ 是自由的，根据极大值原理横截条件可知

$$p_L^f = 0$$

而系统的性能指标为Mayer型，最小飞行时间为 $t_f$ ，同样根据横截条件可知

$$p_{t_f}^f = -1$$

因此，时间最优轨道转移问题满足终端边界条件

$$\Phi(1) = (P(1) - P^f, e_x(1) - e_x^f, e_y(1) - e_y^f, h_x(1) - h_x^f, h_y(1) - h_y^f, p_L(1), p_{t_f}(1) + 1) = 0 \quad (4.18)$$

**注记 4.2:** 事实上，若终端时刻累积赤经 $L$ 也是固定的，则航天器在目标轨道的位置、速度和绕地球飞行圈数也是固定的。若同时飞行时间 $t_f$ 也预先确定，这

种情况则可以看做是轨道交会问题 [60]。但是在时间最优轨道机动问题中，赤经  $L$  与时间  $t$  一样也是快变量，因此最终赤经也与最大推力幅值相关，并不能随意选取。已有文献研究表明，最小累积赤经和最大推力幅值的乘积近似成常数关系 [32, 112]。因此，对于固定终端累积赤经的时间最优轨道转移问题，并不能简单的看作轨道交会问题。

### 4.3.2 轨道拦截

对于轨道拦截问题，要求拦截星与拦截目标在终端时刻相对位置为  $0$ ，而相对速度自由。假设目标星在固定轨道做无控运动，初始位置给定。因此，拦截星的终端约束不是一个固定轨道而是一个子流形，满足如下条件：

$$\phi_1 \doteq r_1(1) - r_1^f = 0 \quad (4.19a)$$

$$\phi_2 \doteq r_2(1) - r_2^f = 0 \quad (4.19b)$$

$$\phi_3 \doteq r_3(1) - r_3^f = 0 \quad (4.19c)$$

其中  $(r_1, r_2, r_3)$  表示拦截星在惯性坐标系下的位置，可用改进的轨道根数来描述； $(r_1^f, r_2^f, r_3^f)$  是目标星在地球惯性坐标系下的位置，可将  $(P^f, e_x^f, e_y^f, h_x^f, h_y^f, L^f)$  代入公式(2.4a-2.4c)得到。然而，给定初始位置，若飞行时间未知，则目标星在自身轨道上的终端位置也是未知的，位置主要由赤经决定，因此将描述目标星在目标轨道上位置的变量  $L^f$  的无控方程

$$\frac{dL^f}{d\tau} = t_f \sqrt{\frac{\mu}{P^f}} \frac{(1 + e_x^f \cos L^f + e_y^f \sin L^f)^2}{P^f} \quad (4.20)$$

引入系统作为一个方程，则系统状态变量则为  $(\mathbf{x}, t_f, L^f) \in \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ，而将  $L^f(0) - L^f = 0$  引入方程4.15作为一个初始边界条件。根据极大值原理的横截条件，由终端约束4.19，可以得到关于  $\mathbf{x}$  的协状态  $\mathbf{p} = [p_P, p_{e_x}, p_{e_y}, p_{h_x}, p_{h_y}, p_L]^T$  的终端边值条件：

$$p_P(1) = -(\lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial P(1)} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial P(1)} + \lambda_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial P(1)}) \quad (4.21a)$$

$$p_{e_x}(1) = -(\lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial e_x(1)} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial e_x(1)} + \lambda_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial e_x(1)}) \quad (4.21b)$$

$$p_{e_y}(1) = -\left(\lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial e_y(1)} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial e_y(1)} + \lambda_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial e_y(1)}\right) \quad (4.21c)$$

$$p_{h_x}(1) = -\left(\lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial h_x(1)} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial h_x(1)} + \lambda_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial h_x(1)}\right) \quad (4.21d)$$

$$p_{h_y}(1) = -\left(\lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial h_y(1)} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial h_y(1)} + \lambda_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial h_y(1)}\right) \quad (4.21e)$$

$$p_L(1) = -\left(\lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial L(1)} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial L(1)} + \lambda_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial L(1)}\right) \quad (4.21f)$$

$$p_{L^f}(1) = \lambda_1 \frac{\partial r_1^f}{\partial L^f(1)} + \lambda_2 \frac{\partial r_2^f}{\partial L^f(1)} + \lambda_3 \frac{\partial r_3^f}{\partial L^f(1)} \quad (4.21g)$$

其中 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ 是Lagrange乘子。

从非线性代数方程组4.21中任选3个方程求解出 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ ，再代入方程组4.21另外剩余4个方程则可得4个边界条件。因此这4个边界条件，方程4.19再加上 $p_{t_f}^f = -1$ 组成了时间最优拦截问题的8个终端边值条件。

注记 4.3: 终端边值4.21也可根据坐标变换得到。令 $x \in M, y = f(x) \in N$ ，考虑坐标变换， $y$ 表示成 $x$ 。根据极大值原理可知协变量分别为

$$p_x \in T_x^* M, \quad p_y \in T_{f(x)}^* N$$

定义运算

$$\frac{\partial f}{\partial x} : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

若 $q_x \in T_x M$ 则可导出 $\frac{\partial f}{\partial x} q_x \in T_{f(x)} N$ 。而 $\langle p_x, q_x \rangle = 0$ ，因而有

$$\left\langle p_y, \frac{\partial f}{\partial x} q_x \right\rangle = \left\langle \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^* p_y, q_x \right\rangle = 0$$

则有 $\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^* T_{f(x)}^* N \rightarrow T_x^* M$ 由此可以导出

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^* p_y = p_x$$

即

$$p_y = \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^* \right)^{-1} p_x \quad (4.22)$$

考虑位置和速度 $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ 表示的状态变量与MEE之间的转化，对于拦截问题则有速度对应的协状态终端约束为 $p_v(t_f) = 0$ ，因此可根据公式4.22式求得3个对应的轨道根数表示的协状态终端约束条件，避免了求取Lagrange乘子 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ ，再加上3个终端位置约束，则构成了6个终端条件。但是为将上述轨道拦截化成两点边值问题，仍需另外寻找其他合适的终端边值条件。

### 4.3.3 轨道交会

与轨道拦截问题不同，轨道交会问题则要求交会星与交会目标在终端时刻相对位置和相对速度均为0，因此终端约束则需满足如下条件：

$$\phi_1 \doteq r_1(1) - r_1^f = 0 \quad (4.23a)$$

$$\phi_2 \doteq r_2(1) - r_2^f = 0 \quad (4.23b)$$

$$\phi_3 \doteq r_3(1) - r_3^f = 0 \quad (4.23c)$$

$$\phi_4 \doteq v_1(1) - v_1^f = 0 \quad (4.23d)$$

$$\phi_5 \doteq v_2(1) - v_2^f = 0 \quad (4.23e)$$

$$\phi_6 \doteq v_3(1) - v_3^f = 0 \quad (4.23f)$$

同样，式中 $(r_1^f, r_2^f, r_3^f)$ 和 $(v_1^f, v_2^f, v_3^f)$ 表示目标星在惯性坐标系下的终端位置和速度分量，可将 $(P^f, e_x^f, e_y^f, h_x^f, h_y^f, L^f)$ 代入公式(2.4a-2.4f)得到。同样，将描述 $L^f$ 的无控方程4.20引入系统作为系统一个方程，则系统状态变量则为 $(\mathbf{x}, t_f, L^f) \in \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ，而将 $L^f(0) - L^f = 0$ 引入方程4.15作为一个初始边界条件。根据极大值原理的横截条件，由终端约束4.23，可以得到如下终端边值条件：

$$\mathbf{p}(1) = - \sum_{i=1}^6 \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{x}(1)} \quad (4.24)$$

求解上非线性代数方程组求得拉格朗日乘子 $\lambda_i, i = 1, \dots, 6$ ，然后代入关于 $p_{L^f}$ 的协状态终端条件

$$p_{L^f}(1) = \lambda_1 \frac{\partial r_1^f}{\partial L^f(1)} + \lambda_2 \frac{\partial r_2^f}{\partial L^f(1)} + \lambda_3 \frac{\partial r_3^f}{\partial L^f(1)} + \lambda_4 \frac{\partial v_1^f}{\partial L^f(1)} + \lambda_5 \frac{\partial v_2^f}{\partial L^f(1)} + \lambda_6 \frac{\partial v_3^f}{\partial L^f(1)} \quad (4.25)$$

表 4.1 时间最优轨道机动问题的数值条件

变量	初始条件	终端条件
$P$	15.6Mm	32.1Mm
$e_x$	0.75	0.16
$e_y$	0.0	0.30
$h_x$	0.612	0.0
$h_y$	0.0	0.1
$L$	$\pi$	自由
$L^f$	1.507	自由

可以得到一个终端边值条件。因此方程4.23, 4.25和 $p_{t_f}(1) = -1$ . 组成了时间最优交会问题的8个终端边值条件。

#### 4.4 数值仿真

在4.2节, 应用极大值原理设计了时间最优控制律, 而4.3节则讨论了不同轨道机动使命的边值条件, 从而将时间最优轨道机动问题转化为两点边值问题。在这一节, 我们则应用打靶法求解相应的两点边值问题。以轨道转移问题为例, 两点边值问题等价于寻找所谓的打靶函数的零点, 即: 寻找 $(p^0, t_f^0) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}$  使得下式成立

$$b(\Phi^0(x^0, t_f^0, p^0, p_{t_f}^0)) = 0 \quad (4.26)$$

其中的边界函数 $b$ 由式(4.18)确定。

在数值仿真中, 系统的物理常数 $\mu, \beta$ 与第三章数值仿真算例相同, 初始质量为 $m^0 = 1500\text{kg}$ , 后续章节仍采用该数值, 不再另行说明。数值边值条件则如表4.1所示, 表中的单位 $1Mm = 10^6m$ 。

首先在同一幅图中给出时间最优轨道转移、拦截与交会问题最优状态变化轨迹, 如图4.1所示。图示给出了六个轨道根数 $P, e_x, e_y, h_x, h_y, L$  和卫星质量 $m$ 随时间变化轨迹, 横坐标表示时间历程, 实线表示轨道转移, ‘-.’线表示轨道交会, 而‘-’则表示轨道拦截, 图中水平直线则表示目标的轨道根数值。对于同样的最大推力4N, 轨道转移任务的最小飞行时间是322.428h, 交会任务的最小飞行是318.986h, 而轨道拦截任务的最小飞行时间是169.0513h。

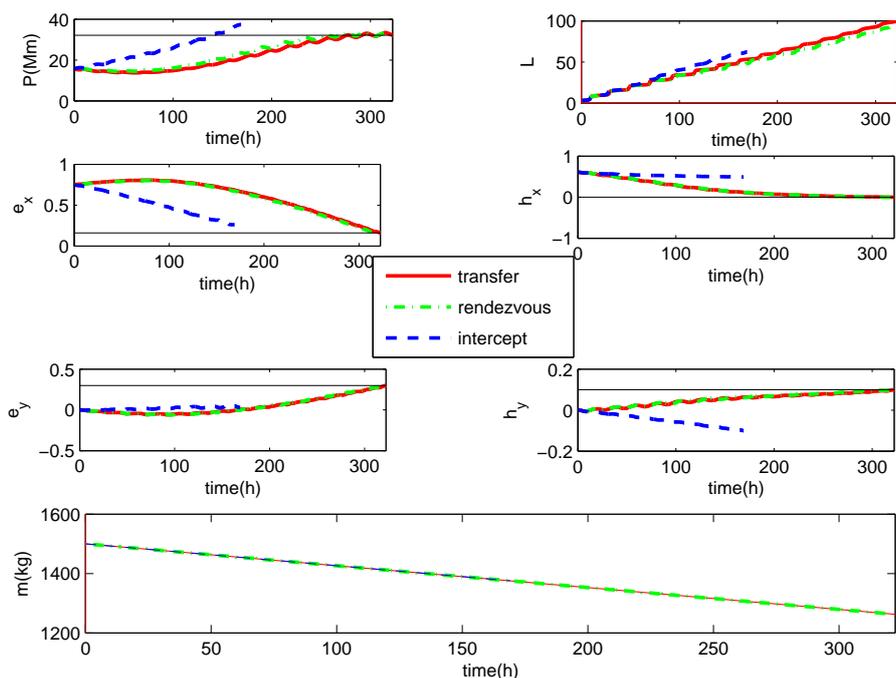


图 4.1 状态最优轨迹, 4N

由图4.1可以看出，状态变量随时间的变化轨迹比较平滑，也可以看出最优交会问题和转移问题几乎具有相同的最优轨迹，状态以几乎相同的轨迹到达目标轨道期望值。然而，轨道拦截问题的最终轨道参数值与目标值相差较大，由图4.2地球坐标系下三维空间轨迹图也可以看出，拦截星的最后运行轨道几乎垂直于目标星轨道。

图4.2所示的是时间最优轨道拦截在地球惯性坐标系下3D空间的最优变化轨迹，箭头代表推力的实时方向。实线表示初始轨道，点划线则表示目标星的固定运行轨道；”\*”表示拦截星的初始点，”o”则表示拦截星与目标星的遭遇点。同样，图4.3所示的是时间最优轨道交会问题的3D最优轨迹，由图8、图9可以看出，轨道拦截情形时的拦截星的运行轨道倾角与轨道交会情形相比则变化较小。由于轨道转移和交会几乎有相同的最优轨迹，轨道转移问题的3D最优轨迹不再给出图示。

调整最大推力幅值大小，重复上述数值实验，三种轨道机动方式的最小飞行时间总结于表4.2，最小飞行时间和最大推力之间的关系则由图4.4所示。由图4.4左图可以看出，对于固定最大推力幅值，轨道转移和轨道交会时的最小

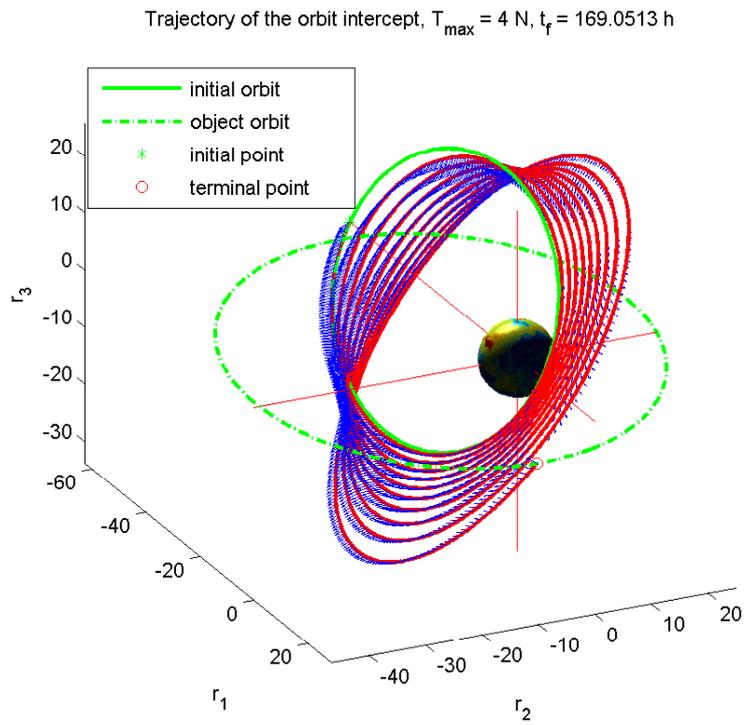


图 4.2 轨道拦截3D最优轨迹，4N

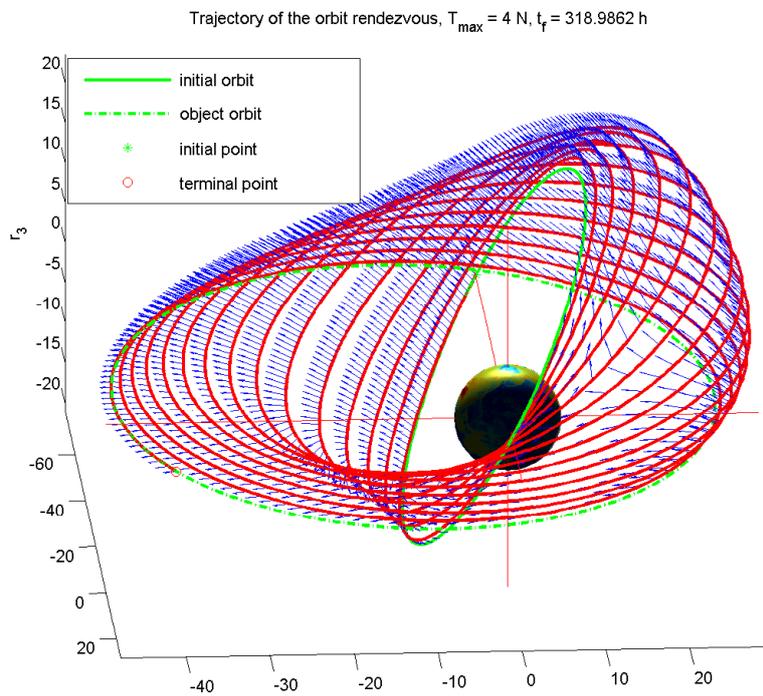


图 4.3 轨道交会的3D最优轨迹，4N

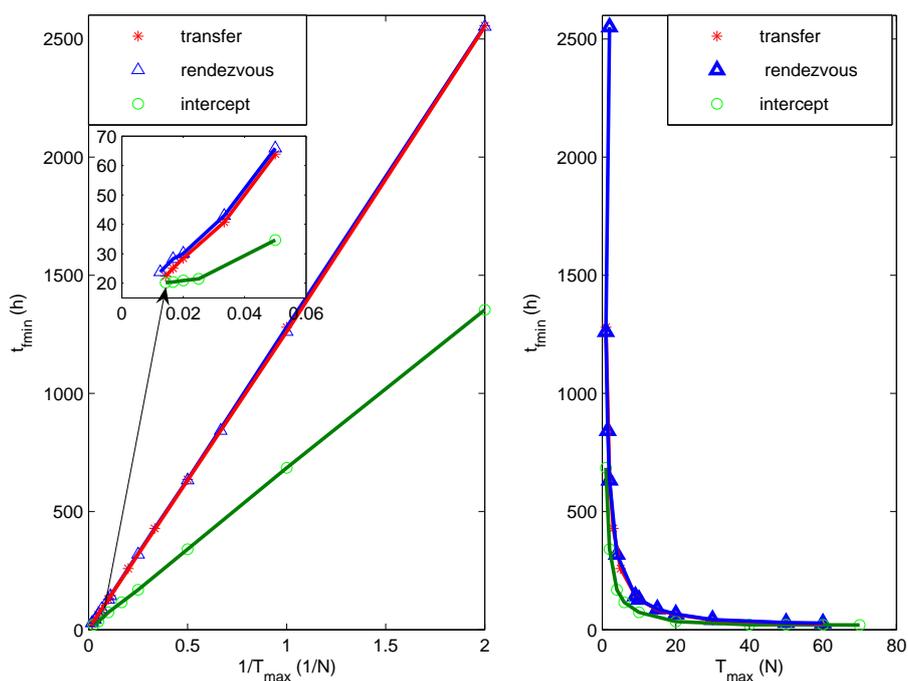
表 4.2 最小飞行时间

$T_{max}(N)$	轨道转移		轨道交会		轨道拦截	
	$t_{fmin}(h)$	$\ b\ $	$t_{fmin}(h)$	$\ b\ $	$t_{fmin}(h)$	$\ b\ $
0.5	2556.1677	1.1E-07	2554.3085	4.6E-09	1354.1545	2.1E-09
1.0	1279.796	2.7E-11	1260.9954	3.4E-09	685.094	4.7E-11
1.5	—	—	842.5645	2.9E-09	436.7368	5.5E-11
2.0	635.9953	6.1E-12	632.504	5.9E-09	—	—
4.0	323.9285	1.7E-12	318.9862	8.3E-10	169.0513	3.1E-12
6.0	216.1717	2.3E-12	213.0968	6.3E-10	111.084	4.6E-12
10	128.3579	2.4E-12	127.6397	5.4E-11	73.542	4.0E-12
20	63.8795	5.2E-13	65.8506	5.1E-12	34.6528	5.1E-13
40	34.9649	1.3E-12	33.217	7.7E-12	21.469	7.2E-13
60	25.0451	1.1E-13	28.2547	1.8E-12	20.4102	4.7E-13

飞行时间几乎相同，而轨道拦截情形的最小飞行时间相比则小。一些学者研究时间最优轨道转移问题时，发现最大推力幅值和最小时间的乘积近似成常数关系： $t_{fmin} \cdot T_{max} \approx c$  [31]，由图4.4也可以看出，该结论同样适用于轨道拦截和交会问题。然而，从左图的局部放大图和右图，我们也可以看出，这个关系不适用于大推力情况。随着推力幅值的增大，到某一值（如60N）时，最小飞行时间并不随最大推力增大而显著减小。因而，自然地可以猜测，脉冲推力可以看作是某种情况下连续推力的极限形式，但是需要理论进一步的证明。另外需要说明的是，对于1500kg的卫星产生60N的推力并不现实，在这里只是为了数值仿真的需要。

对于轨道拦截问题，我们改变拦截星在初始轨道上的出发位置，即分别选择  $L^0 = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ ，重复上述数值实验，相应的最小飞行时间和最大推力的关系如图4.5所示。由图可以看出，对于相同的推力幅值，越早实施轨道拦截，所需时间越少；最小时间和最大推力的乘积值  $c$  与  $L^0$  的选取近似成线性增长方式，对于本算例则可简单归为

$$c = 600 + \frac{80L^0}{\pi}$$

图 4.4  $t_{fmin} \cdot T_{max}$  近似常数关系

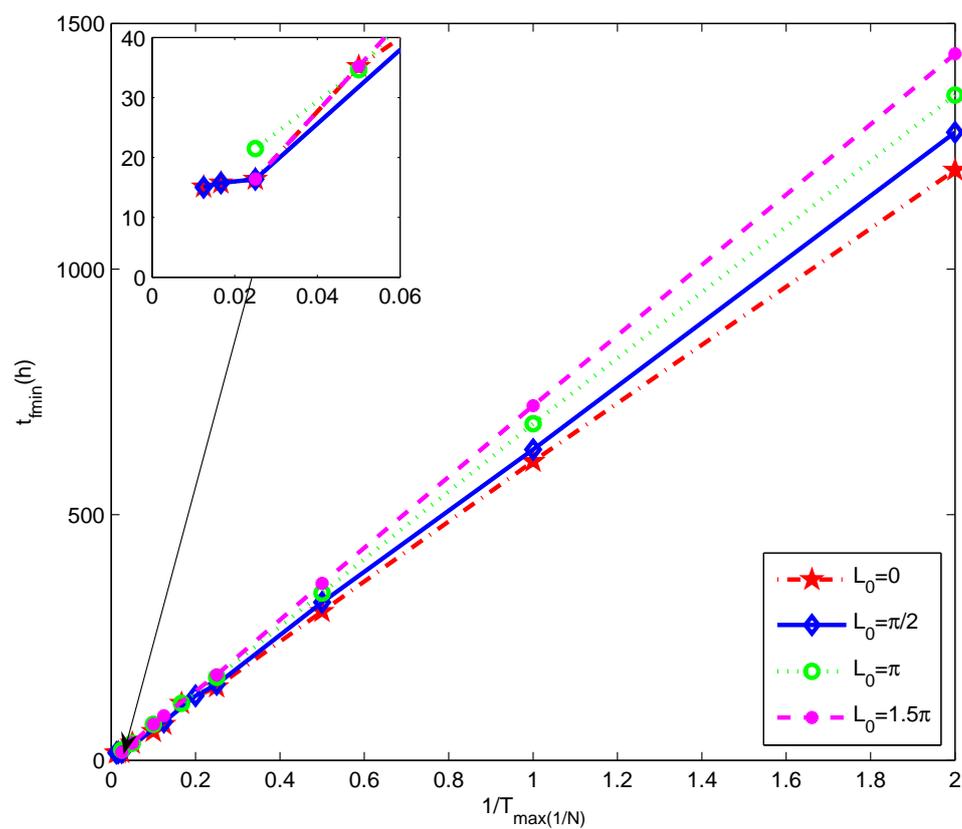
## 4.5 小结

采用改进轨道根数描述卫星轨道运动，应用间接法研究了常值连续推力时间最优轨道转移、拦截与交会问题。应用极大值原理设计最优控制律，理论分析表明，卫星一直以最大推力方式运行，根据极大值原理一阶必要条件将轨迹优化问题转化为两点边值问题。轨道转移、拦截与交会方式的主要差别在于终端约束条件，根据横截条件，分别研究了三种机动方式的终端边值条件。

应用单值打靶法分别研究了相应的两点边值问题，数值仿真结果表明：

- (1) 轨道转移和轨道交会使命对于同一最大推力几乎有相同的最优轨迹；
- (2) 对于相同的最大推力幅值，轨道拦截所需的时间要比轨道转移所需时间短；
- (3) 最小时间与最大推力幅值乘积近似成常数关系，这一数值结论同样适用于轨道拦截与交会问题；
- (4) 对于轨道拦截问题，越早实施变轨机动，所需任务时间越少。

但是上述结论只是数值仿真得到结果，并未得到理论严格的证明，需要进一步

图 4.5 初始时刻 $L$ 对轨道拦截时间的影响

的开展工作，完善上述结论。

## 第五章 近似最优赤经轨道转移

在第四章，我们应用间接法研究了时间最优轨道机动问题，数值结果如图4.1所示表明变量 $L$ 随时间成线性增长；而对于轨道拦截问题，改变拦截星在初始轨道上的出发位置，即选择不同的初始赤经，数值试验也表明最小时间和最大推力的乘积值 $c$ 与 $L^0$ 的选取近似成线性增长方式。这一章，我们应用间接法研究累积赤经最优轨道转移问题。

对于连续推力最小燃料消耗轨道转移问题，由于赤经 $L$ 和时间 $t$ 一样都是快变量，因此该问题根据最终时间 $t_f$ 和最终赤经 $L_f$ 划分为四种情形：1)  $t_f$ 和 $L_f$ 均自由；2)  $t_f$ 自由， $L_f$ 固定；3)  $t_f$ 固定， $L_f$ 自由；4)  $t_f$ 和 $L_f$ 均固定。事实上， $L_f$ 固定意味着卫星在目标轨道的位置和绕地球飞行圈数已确定，该问题则对应着轨道交会问题。J.Gergaud 应用同伦算法研究了 $t_f$ 固定、 $L_f$ 自由以及 $t_f$ 自由、 $L_f$ 固定燃料最优轨道转移问题 [32]。在 $t_f$ 和 $L_f$ 均自由情形，虽没有理论证明，但是事实表明该问题无解 [32, 112]。在最小燃料消耗问题上，最大推力幅值给定时，固定飞行时间 $t_f$ 可通过 $t_{fmin}(h) \cdot T_{max}(N) \approx c$ 来确定 [115, 116]。同样为保证任务可行性，最终 $L_f$ 也不能随意选取，也必须严格大于最小转移赤经。因此研究最小累积赤经轨道转移问题非常有意义，该问题在文献 [32, 112, 118]简单的提到，并给出了最小赤经和最大推力的乘积近似成常数的结论，但是文献作者并没有给出解决该问题的实际方法。

在文献 [118, 119]中。平均近似方法被用来研究连续推力能量最优轨道转移问题，用累积赤经 $L$ 来重新参数化系统，仿射控制系统则转换成无漂移项的次黎曼系统，但是作者并没有考虑卫星质量的变化。而且，文献 [118]仅考虑了推力约束下的共面轨道转移，文献 [119]虽考虑了非共面转移，但却没有考虑输入约束。

本章应用间接最优方法研究了连续推力最小累积赤经轨道转移问题，其中 $L$ 代替时间作为系统的自变量，对于平均化近似系统，应用极大值原理设计最优控制律，并将问题转化为两点边值问题。主要贡献有两点，一是系统研究了连续推力最小赤经轨道转移问题，包括问题的描述和控制律设计；二是用 $L$ 将系统参数化，采用近似平均化方法研究了变质量和带有推力约束的非共面轨道转移问题。

## 5.1 问题描述

采用改进轨道根数描述轨道动力学方程，定义状态变量  $\mathbf{x} = [P \ e_x \ e_y \ h_x \ h_y]^T$ ，卫星发动机产生的推力在轨道坐标系(R,T,N)标架下分解，则卫星轨道转移可由下式描述：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{f}_i(L, \mathbf{x}) \\ \dot{L} &= g_0(L, \mathbf{x}) + \frac{1}{m} g_1(L, \mathbf{x}) u_3\end{aligned}\quad (5.1)$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= \sqrt{\frac{P}{\mu}} \frac{1}{W} (W \sin L \frac{\partial}{\partial e_x} - W \cos L \frac{\partial}{\partial e_y}) \\ \mathbf{f}_2 &= \sqrt{\frac{P}{\mu}} \frac{1}{W} (2P \frac{\partial}{\partial P} + (W \cos L + \eta_x) \frac{\partial}{\partial e_x} + (W \sin L + \eta_y) \frac{\partial}{\partial e_y}) \\ \mathbf{f}_3 &= \sqrt{\frac{P}{\mu}} \frac{1}{W} (-Z e_y \frac{\partial}{\partial e_x} + Z e_x \frac{\partial}{\partial e_y} + \frac{C}{2} \cos L \frac{\partial}{\partial h_x} + \frac{C}{2} \sin L \frac{\partial}{\partial h_y})\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}g_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{P}} \frac{W^2}{P} \frac{\partial}{\partial L} \\ g_1 &= \sqrt{\frac{P}{\mu}} \frac{Z}{W} \frac{\partial}{\partial L}\end{aligned}\quad (5.2)$$

其中的参数为

$$\begin{aligned}W &= 1 + e_x \cos L + e_y \sin L, \eta_x = e_x + \cos L, \eta_y = e_y + \sin L, \\ Z &= h_x \sin L - h_y \cos L, C = 1 + h_x^2 + h_y^2\end{aligned}$$

考虑卫星质量变化，与发动机推力幅值成比例

$$\dot{m} = -\beta \|\mathbf{u}\| \quad (5.3)$$

因此描述卫星运动的状态实际为  $(\mathbf{x}, L, m) \in M \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ 。考虑任务，卫星的

飞行轨迹必须满足安全区域 [62]

$$A = \{(\mathbf{x}, m) | P > 0, \|(e_x, e_y)\| < 1, m \geq m_s\} \quad (5.4)$$

即卫星在椭圆域内飞行，在地心坐标系下位置向量幅值始终大于地球半径， $m_s$  为无燃料的卫星质量。

对于轨道转移问题，描述卫星初始轨道和目标轨道的边界约束为

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, L(0) = L^0, m(0) = m^0, \Phi(\mathbf{x}(t_f)) = 0 \quad (5.5)$$

而控制输入则需满足

$$\|\mathbf{u}\| \leq T_{max} \quad (5.6)$$

其中 $T_{max}$  为发动机最大推力幅值。

接下来，设 $\mathbf{u} = T_{max} * \bar{\mathbf{u}}$ 和 $\epsilon = T_{max}/m$ 。由于变量 $L$  和时间 $t$ 一样是快变量，终端时间 $t_f$ 不固定，因此需重新参数化系统为：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dL} = \frac{\epsilon}{g_0 + \epsilon g_1 \bar{u}_3} \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i \mathbf{f}_i \quad (5.7)$$

卫星质量变化为：

$$\frac{dm}{dL} = -\frac{\beta m \epsilon}{g_0 + \epsilon g_1 \bar{u}_3} \|\bar{\mathbf{u}}\| \quad (5.8)$$

因此最小累积赤经轨道转移任务的性能指标为：

$$J = \int_{L_0}^{L_f} dL \quad (5.9)$$

轨道转移的任务就是寻找绝对连续的状态 $(\mathbf{x}, m)$  和在有界控制输入 $\bar{\mathbf{u}}$  使得指标5.9最小化，同时需要满足动态(5.7)，(5.8)，路径约束(5.4)，边值条件(5.5)和控制约束 $\|\bar{\mathbf{u}}\| \leq 1$ 。

## 5.2 近似最优控制律设计

这一节，我们研究最小累积赤经轨道转移的最优控制问题。应用极大值原

理，最优轨迹就是极值轨迹，相应的Hamiltonian (H) 函数为：

$$H(L, \mathbf{x}, m, p_0, \mathbf{p}, p_m, \bar{\mathbf{u}}) = p_0 + \frac{\epsilon}{g_0 + \epsilon g_1 \bar{u}_3} \left( \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i H_i - \beta m p_m \|\bar{\mathbf{u}}\| \right) \quad (5.10)$$

在(5.10)中,  $p_0 \leq 0$ ,  $H_i = \langle \mathbf{p}, f_i \rangle$  是Hamiltonian提升,  $\mathbf{p}$  是对应 $\mathbf{x}$ 的协状态, 而 $p_m$ 是 $m$ 对应的协状态. 正常情况下,  $p_0$ 是负的且整定为 $-1$ . 为简化问题, 我们假设终端质量是自由的, 因此约束 $m \geq m_s$ 不起作用。

令 $\sigma = \epsilon g_1 \bar{u}_3 / g_0$ , 通过简单的数值计算和量纲匹配, 我们可以确定 $|\sigma| < 1$ , 因此我们把H函数关于 $\sigma$ 用泰勒级数展开有:

$$\begin{aligned} H(L, \mathbf{x}, m, p_0, \mathbf{p}, p_m, \bar{\mathbf{u}}) &= -1 + \frac{\epsilon}{g_0} \frac{1}{1 + \epsilon g_1 \bar{u}_3 / g_0} \left( \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i H_i - \beta m p_m \|\bar{\mathbf{u}}\| \right) \\ &= -1 + \frac{\epsilon}{g_0} (1 - \sigma + \sigma^2 \dots) \left( \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i H_i - \beta m p_m \|\bar{\mathbf{u}}\| \right) \\ &= -1 + \frac{\epsilon}{g_0} \left( \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i H_i - \beta m p_m \|\bar{\mathbf{u}}\| \right) + O(\sigma) \end{aligned} \quad (5.11)$$

忽略 $O(\sigma)$ 项, 则H函数可描述为

$$H(L, \mathbf{x}, m, \mathbf{p}, p_m, \bar{\mathbf{u}}) \approx -1 + \frac{T_{\max}}{m g_0} \left( \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i H_i - \beta m p_m \|\bar{\mathbf{u}}\| \right) \quad (5.12)$$

**命题 5.1:** 在安全区域内, 沿最优解有,

- (I) 质量对应的协变量 $p_m$ 是非正的增函数;
- (II) 令 $\Psi = (H_1, H_2, H_3)$ , 当 $\Psi$ 不为零时, 最优控制输入为

$$\bar{\mathbf{u}}^* = \frac{\Psi}{\|\Psi\|} \quad (5.13)$$

**证明:** 应用柯西-苏瓦兹不等式, 式5.12可写为

$$\begin{aligned} H(L, \mathbf{x}, m, \mathbf{p}, p_m, \bar{\mathbf{u}}) &\leq -1 + \frac{T_{\max}}{m g_0} (\|\Psi\| \|\bar{\mathbf{u}}\| - \beta m p_m \|\bar{\mathbf{u}}\|) \\ &= -1 + \frac{T_{\max}}{m g_0} (\|\Psi\| - \beta m p_m) \|\bar{\mathbf{u}}\| \end{aligned}$$

当  $\bar{\mathbf{u}} = \alpha\Psi, \alpha \geq 0$  时等号成立, 因此使得  $H$  函数取极大的解可写成

$$\bar{\mathbf{u}} = \alpha(y(L)) \frac{\Psi}{\|\Psi\|}, \alpha(y(L)) \in [0, 1]$$

其中  $y(L)$  是系统的最优解。因为在路径约束内,  $g_0$  大于 0, 因此定义切换函数

$$S = \|\Psi\| - \beta m p_m$$

则关于质量的协变量方程为

$$\dot{p}_m = \frac{T_{max}}{m^2 g_0} \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i H_i \quad \blacksquare$$

根据上式可知  $p_m$  是增函数且趋近于  $p_m(L_f)$ , 由于假设终端质量自由, 由横截条件可知  $p_m(L_f) = 0$ , 因此  $p_m$  是非正的。因为  $p_m$  是非正的, 因此当  $\Psi$  不为 0 时, 切换函数  $S$  严格大于 0, 因而  $\alpha(y(L))$ , 论断(II) 成立。

令  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \bar{\mathbf{u}})$  是最优解, 正则极值的分类则根据切换面  $\{\Psi = 0\}$  的接触阶数, 当  $\Psi$  不为 0, 由(5.13)式确定的控制输入  $\bar{\mathbf{u}}$  是光滑的, 极值则称为 0 阶的; 若  $\Psi = 0$  则是奇异的 [30]。接下来, 我们讨论  $\Psi$  的性质。

**命题 5.2:** 沿最优轨迹,  $\Psi$  是连续可微的且仅有有限个孤立零点。

**证明:** 令  $\bar{C}$  表示  $\Psi$  的零点集合

$$\bar{C} = \{L \in [L_0, L_f] \mid \Psi = 0\}$$

令  $k(x) = \frac{T_{max}}{m g_0}$ , 因此相应的  $H$  函数为:

$$H = k(x) \left( \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i H_i - \beta m p_m \|\bar{\mathbf{u}}\| \right)$$

此时的切换面函数  $\Psi = (H_1, H_2, H_3)$  是绝对连续的, 而且  $\dot{\Psi} = (\dot{H}_1, \dot{H}_2, \dot{H}_3)$ , 而

$$\begin{aligned}\dot{H}_i &= \{H_i, H\} = \left\{ H_i, k \left( \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i H_i - \beta m p_m \|\bar{\mathbf{u}}\| \right) \right\} \\ &= \left( \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i H_i - \beta m p_m \|\bar{\mathbf{u}}\| \right) \{H_i, k(x)\} + k(x) \sum_{j \neq i} \bar{u}_j \{H_i, H_j\}\end{aligned}$$

令

$$g_{ij} = \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i H_i \{H_i, k(x)\} + k(x) \sum_{j \neq i} \bar{u}_j \{H_i, H_j\}, L \in [L_0, L_f] \setminus \bar{C}$$

$$g_{ij} = 0, L \in \bar{C}$$

在切换点之外面,  $g_{ij}$  是连续的. 若令  $\bar{L} \in \bar{C}$  是切换点, 则有当  $L \rightarrow \bar{L}$  时

$$|g_{ij}| \leq \|\Psi\| |\{H_i, k(x)\}| + \sum_{j \neq i} |k(x) \{H_i, H_j\}| \rightarrow 0$$

又因为

$$[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j] \in \text{Vect}(\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}), 1 \leq i < j \leq 3$$

则

$$\{H_j, H_i\}(\bar{L}) = H_{[\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_i]}(\bar{L}) = \langle \mathbf{p}(\bar{L}), [\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_i](\mathbf{x}(\bar{L})) \rangle = 0$$

因此  $\dot{\Psi}$  是连续的,  $\Psi$  属于  $\mathbb{C}^1$ . 接下来证明  $\Psi$  仅有有限个孤立零点.

因为  $\bar{L}$  是切换点, 则  $\Psi(\bar{L}) = 0$ , 那么有  $H_i(\bar{L}) = 0$ , 而

$$\dot{H}_i(\bar{L}) = \beta m p_m \|\bar{\mathbf{u}}\| f_i^T \frac{\partial k}{\partial \mathbf{x}} \quad \blacksquare$$

根据命题5.1, 可知  $p_m$  是非正增函数, 因此  $\dot{H}_i(\bar{L}) = 0$  不可能同时满足. 因此,  $\dot{\Psi}(\bar{L}) \neq 0$  而且每个切换点在区间  $[L_0, L_f]$  是孤立的, 也就是说  $\Psi$  仅有有限个零点, 而不存在零值区间.

根据上述命题的结论, 可知最优轨迹是零阶极值, 因而有下述命题.

**命题 5.3:** 对固定推力  $T_{max}$ , 若最优解  $(\mathbf{x}, m)$  在路径约束的内部, 任何最优控制  $\bar{\mathbf{u}}$  几乎处处满足  $\|\bar{\mathbf{u}}\| = 1$ .

### 5.3 数值实验

为简化问题,我们将问题整定在区间 $[0, 1]$ , 取 $L^0 = 0$ , 令 $\tau = \frac{L}{L_f}$ , 则自由的终端值 $L_f$ 作为一个新的系统变量引入系统, 可描述为

$$\frac{dL_f}{d\tau} = 0 \quad (5.14)$$

令 $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, m, L_f)$ ,  $\tilde{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}, p_m, p_{L_f})$ , 新的H函数

$$\tilde{H}(\tau, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{v}) = L_f \frac{\epsilon}{g_0 + \epsilon g_1 \bar{u}_3} \left( \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i H_i - \beta m p_m \|\bar{\mathbf{u}}\| \right) \quad (5.15)$$

根据极大值原理的一阶必要条件, 最优轨迹 $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{v})$  满足方程

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\tau} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}) \\ \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\tau} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

其中 $\bar{\mathbf{u}}$ 满足方程(5.13), 目标是最小化 $L_f$ , 因此连续推力最小累积赤经轨道转移问题转化为两点边值问题。系统由(5.16)确定, 初始和终端边界条件满足

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(0) &= (P^0, e_x^0, e_y^0, h_x^0, h_y^0, m^0) \\ \Phi(\tilde{\mathbf{x}}) &= (P - P^f, e_x - e_x^f, e_y - e_y^f, h_x - h_x^f, h_y - h_y^f) = 0 \end{aligned}$$

由横截条件可知另需满足边值条件

$$p_{L_f}(0) = p_{L_f}(f) = p_m(f) = 0$$

数值仿真算例的边值条件值如表5.1所示。接下来, 应用单值打靶法求解两点边值问题, 打靶函数为

$$S(\tilde{\mathbf{x}}) = (P - P^f, e_x - e_x^f, e_y - e_y^f, h_x - h_x^f, h_y - h_y^f)$$

表 5.1 累积赤经最优转移数值边值

变量	初始条件	终端条件
$P$	15.6Mm	32.1Mm
$e_x$	0.75	0.16
$e_y$	0.0	0.30
$h_x$	0.22	0.0
$h_y$	0.0	0.1

数值仿真结果如图所示，图5.1所示是最大推力0.8牛N对应的最优轨迹，上图显示的是 $(r_1, r_2, r_3)$ 3D轨迹，箭头表示推力的大小和方向；左下图是 $(r_1, r_2)$ 平面中离心率的变化轨迹，右下图则是 $(r_2, r_3)$ 平面轨道倾角的变化轨迹。图中符号‘\*’表示起始点，‘O’则代表终端点。对于0.8N 推力，可以看出卫星完成任务使命需要绕飞地球约88圈。

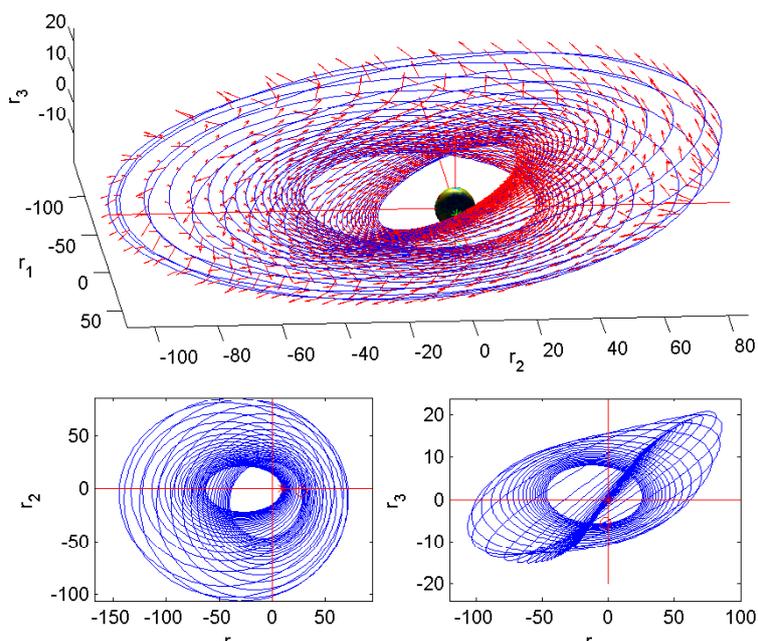


图 5.1 累积赤经最优轨道转移3D最优轨迹，0.8 N

图5.2显示的是状态最优变化轨迹，图5.3则是最优控制输入的结构变化。由图可以看出，状态变量的变化平滑，累积赤经 $L$ 与独立变量 $\tau$ 近似成线性关系。由图5.2，可以看出六个变量 $(P, e_x, e_y, h_x, h_y, m)$ 都达到了期望的目标。我

们也可以由图5.3看出 $\|\bar{\mathbf{u}}\|$ 几乎处处等于1, 而 $\|\Psi\|$ 在本算例中没有零点。

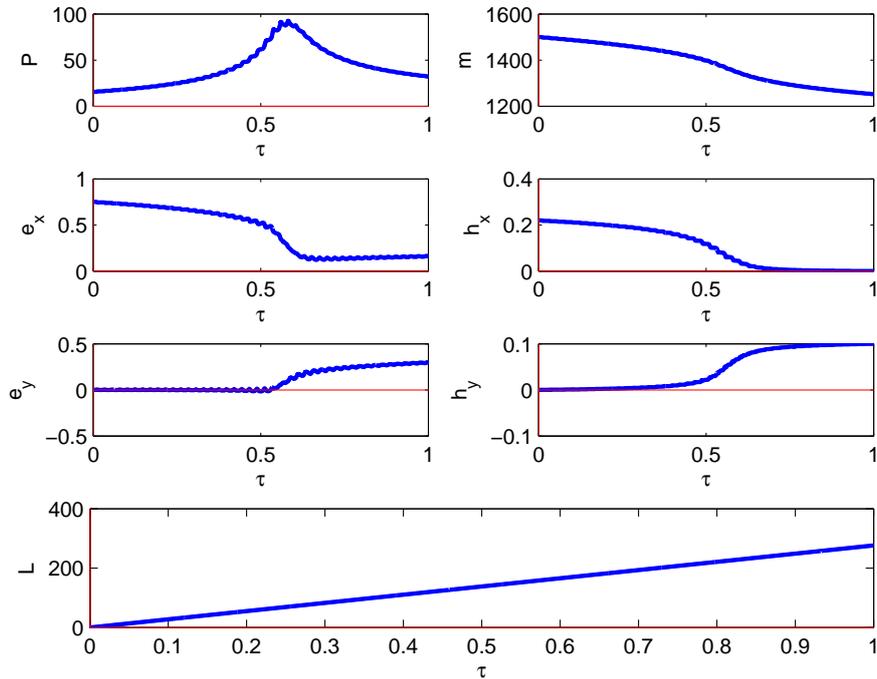


图 5.2 累积赤经最优轨道转移状态的最优解, 0.8N

调整最大推力值, 重复数值实验, 最小累积赤经 $L_f$ 与最大推力幅值 $T_{\max}$ 的关系如图15所示, 可以看出 $L_{f\min} \cdot T_{\max}$ 近似成常数。相同的结论在文献[32, 112, 118]中已提到过, 而在本文中为方便设定 $L(0) = 0$ 。在不同推力下的 $|\sigma|$ 的变化轨迹如图5.5所示, 在数值上证实了 $|\sigma| < 1$ 的假设条件。

## 5.4 小结

本节研究了连续推力最小累积赤经轨道转移问题。累积赤经 $L$ 代替时间 $t$ 作为系统的自变量, 应用极大值原理将轨道转移问题转化为两点边值问题, 数值实验结果表明单值打靶法能够有效解决该问题。本节的主要贡献就是应用近似最优方法系统研究了累积赤经最优轨道转移问题。在数值计算中, 我们同样得出 $L_{f\min} \cdot T_{\max}$ 近似成常数关系的结论, 但是并没有得到数学上的严格证明。另一个问题就是, 在数值实验中, 我们并未发现存在 $\|\Psi\| = 0$ 的切换点或者奇异弧, 但是我们依然不知道是否会在其他算例中出现 $\|\Psi\| = 0$ 的情况, 数值仿真发现的结论和问题将给理论研究提供了有益的启示。

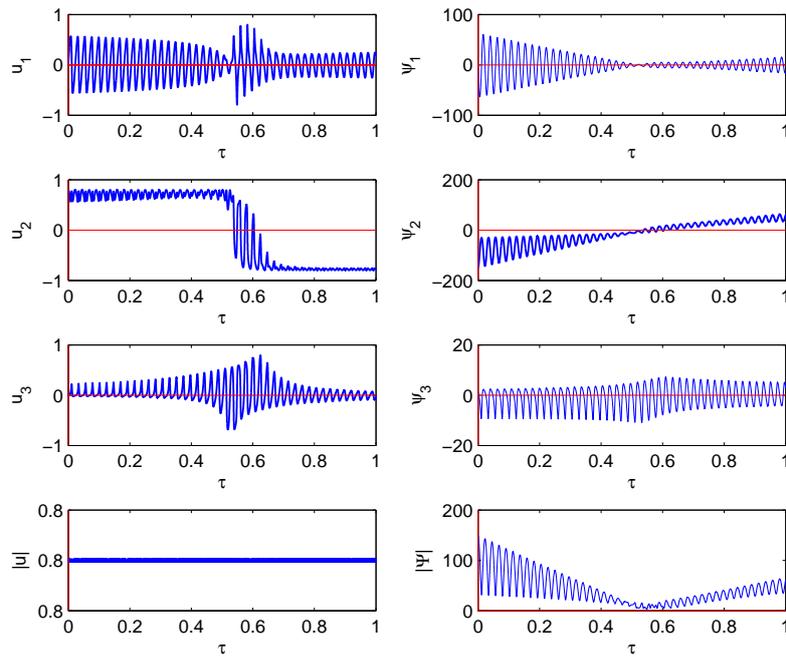


图 5.3 累积赤经最优轨道转移控制输入, 0.8 N

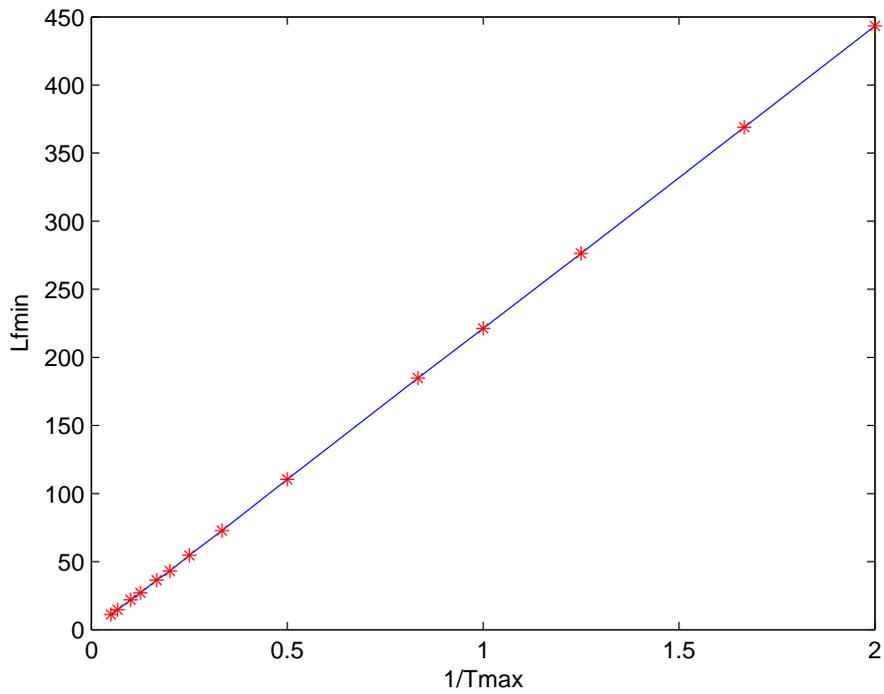
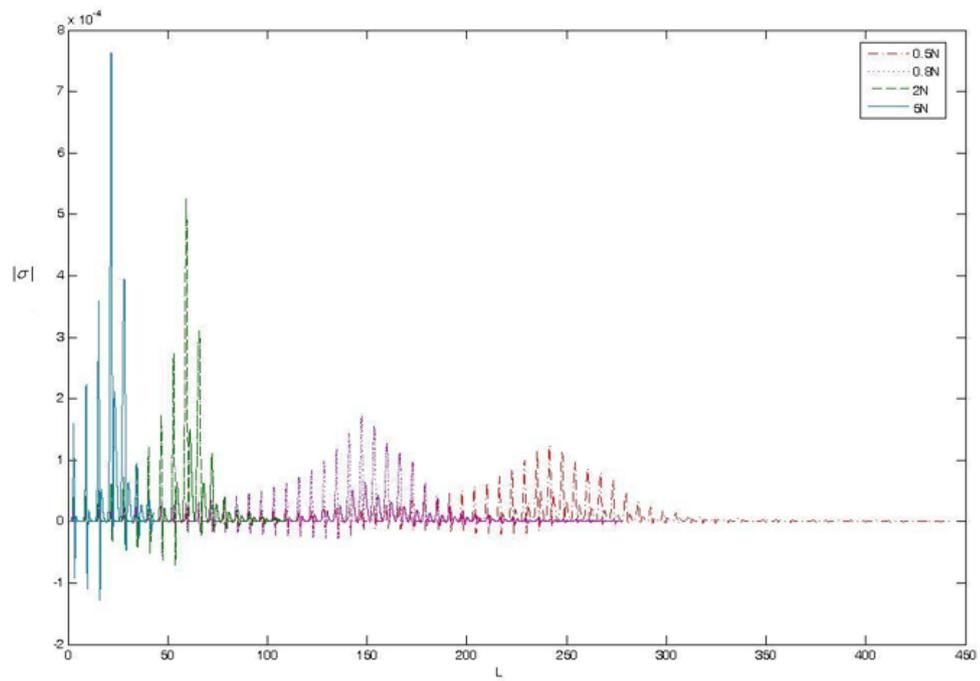


图 5.4  $L_{fmin} \cdot T_{max}$  近似常数关系

图 5.5 不同推力幅值下 $|\sigma|$ 变化轨迹



## 第六章 能量/燃料最优轨道转移

在第三和第四章，我们研究了时间最优轨道机动问题，本章则应用改进轨道根数描述的动力学方程研究燃料最优轨道转移问题。问题同样满足可控性条件，文献 [32,65]则证明了以位置、速度表示的开普勒型方程在共面情况下轨道转移时间固定时燃料最优解的存在性。当转移时间自由且终端赤经 $L$ 固定时问题仍可解，但当终端 $L$ 也自由时虽未得到理论证明，数值计算却表明问题无解 [32,83,83]。

对于固定时间轨道转移任务，通常性能指标要求消耗燃料最少，即终端时刻卫星总质量最大，但是由于奇异弧的控制不易确定，燃料最优不易求解 [32]。文献 [18]则直接研究了燃料最优轨道转移，假设不存在奇异弧即切换函数仅存在孤立零点，应用二分法检测切换点，提高了打靶法的收敛性和运行时间。文献 [15]则基于考虑地球扁率摄动、大气摄动的开普勒型动力学模型，提出了一种基于振荡频率分析称之为采样法的切换算法，能够提高运算速度和切换点的精确度，同时滑行段的切换时间可以作为优化参数。

文献 [77,112,118,119]研究了一种次黎曼(SR)问题，形式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^m u_i \mathbf{f}_i \quad \min \int_0^{t_f} \|\mathbf{u}\| dt$$

根据Maupertuis原理，SR问题等价于最小能量 $\int_0^{t_f} \|\mathbf{u}\|^2 dt$ 问题，其中时间 $t_f$ 是固定的[15-18]。卫星轨道动力学方程是典型的带漂移项的仿射输入非线性系统，可以考虑设法消除漂移项从而将燃料最优问题转化为能量最优问题，文献 [65,77,83,118,119]采用平均化方法研究了卫星质量不变条件下的能量最优轨道转移问题。文献 [119]基于推力在切向-法向分解下的共面高斯方程，将平赤经作为自变量，从而Hamiltonian函数关于 $L$ 是周期的，平均化Hamiltonian函数，将问题转化为SR问题；对极值解进行了几何分析，证明了共面转移的平均化系统是完全可以积的。文献 [118]则基于改进轨道根数(MEE)描述方程考虑了共面和异面转移的平均化方法，根据黎曼测地线的存在与完备性，给出了二维椭圆域任意两点存在能量最优轨迹的条件。文献 [77]则分别分析了推力在单方向、切向-法向(R,T,N)分解、径向-法向(T,C,N)分解等不同情况的平均化系统。

另一种研究燃料最优轨道转移的方法是在性能指标中引入能量指标从而消

除切换函数的奇异性，常用的方法是同伦方法。文献 [32]研究了基于MEE表示的轨道动力学方程燃料最优的同伦方法，文献 [60]则研究了开普勒方程形式。由上述分析可知，能量最优情形相对容易求解，应用同伦方法求解燃料最优的一个关键就是寻求同伦算子 $\lambda$ 由0向1过渡时的零路径跟随(Zero PathFollowing)，文献 [32]介绍了离散连续法、分段线性法和预测校正法三种不同的零路径跟随方法。对于能量最优，当推力小于5N时，单值打靶法也难于求解，文献 [32,112]引入了一种初始化同伦方法。

应用间接法研究基于MEE描述动力学方程的能量最优轨道转移问题，作者目前并未见相关文献。本章仍基于MEE描述的高斯型动力学方程，应用间接法研究燃料最优、能量最优以及能量-燃料混合最优轨道转移，分别设计了最优控制律，并尝试在数值上对这三种形式的最优轨道转移做比较。

## 6.1 问题描述

有限推力下最小燃料消耗轨道转移问题模型可描述如下：

$$\begin{cases} \min J = -m(t_f) \Leftrightarrow \int_0^{t_f} \|\mathbf{u}\| dt \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \frac{T_{\max}}{m} \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \\ \dot{m} = -\beta T_{\max} \|\mathbf{u}\| \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, m(0) = m^0, \Phi(\mathbf{x}(t_f)) = 0 \\ \|\mathbf{u}\| \leq 1 \end{cases}$$

其中 $T_{\max}$ 为发动机推力的最大幅值，控制 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 为推力在轨道坐标系中方向。卫星的轨道动力学方程的状态仍采用MEE形式，定义状态为 $\mathbf{x} = [P \ e_x \ e_y \ h_x \ h_y \ L]^T$ 和质量 $m$ 。若推力在轨道坐标系下沿径向-法向(R,T,N)标架下分解，则定义卫星动态的四个向量场 $\mathbf{f}_i(\mathbf{x})$ 仍由方程4.2描述。

对于轨道转移任务，要求初始轨道和目标轨道是不同的，因而最优控制是非空的。问题满足的初值边界条件可用MEE描述为

$$(\mathbf{x}^0, m^0) = (P^0, e_x^0, e_y^0, h_x^0, h_y^0, L^0, m^0) \in R^7$$

而终端边界条件则为

$$\Phi(\mathbf{x}) = (P - P^f, e_x - e_x^f, e_y - e_y^f, h_x - h_x^f, h_y - h_y^f) = 0$$

为使问题便于求解，我们仍做以下假设：

**A1)** 系统模型的状态始终满足路径约束

$$A = \{(\mathbf{x}, m) | P > 0, \|(e_x, e_y)\| < 1, m \geq m_s\}$$

即卫星在椭圆域内飞行，在地心坐标系下位置向量幅值始终大于地球半径， $m_s$  为不携带燃料时的卫星本体质量。

**A2)** 最终飞行时间 $t_f$  要严格大于最短轨道转移时间 $t_{fmin}$ 。

**A3)** 卫星在终端时的质量是自由的。

至此，我们完成了燃料最优轨道转移最优控制问题的描述，下一节则应用极小值原理设计最优控制律。

## 6.2 轨道转移最优控制律设计

### 6.2.1 燃料最优

燃料最优的性能指标取为Lagrange型，应用极小值原理，系统Hamiltonian (H) 函数为

$$H = (p_0 - \beta T_{\max} p_m) \|\mathbf{u}\| + H_0 + \frac{T_{\max}}{m} \sum_{i=1}^3 u_i H_i \quad (6.1)$$

其中 $p_0$  为大于0的常数，通常取为1； $H_i = \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}_i \rangle, i = 0, \dots, 3$  为Hamiltonian提升， $\mathbf{p}, p_m$  分别为状态 $\mathbf{x}, m$  对应的协状态。根据极值原理可知 $\mathbf{p}(t), p_m(t)$ 不同时为0。应用Cauchy-Schwarz不等式，令 $\Psi = (H_1, H_2, H_3)$ ，取 $p_0 = 1$ ，则6.1式有

$$H \geq (1 - \beta T_{\max} p_m) \|\mathbf{u}\| + H_0 + \frac{T_{\max}}{m} \|\Psi\| \|\mathbf{u}\| \quad (6.2)$$

则当 $\mathbf{u} = -\alpha \Psi, \alpha \geq 0$  时6.2取等号。因此令 $z = (\mathbf{x}, m, \mathbf{p}, p_m)$ ，当 $\Psi =$

( $H_1, H_2, H_3$ )不为0时, 最小化H函数的解可写为

$$\mathbf{u} = -\alpha(z) \frac{\Psi}{\|\Psi\|}, \alpha(z) \in [0, 1] \quad (6.3)$$

定义切换函数

$$S(t, z) = 1 - \beta T_{\max} p_m - \frac{T_{\max}}{m} \|\Psi\| \quad (6.4)$$

则当 $\|\Psi\| \neq 0$ 时, 最优控制为

$$\mathbf{u}^*(t) = \begin{cases} -\frac{\Psi}{\|\Psi\|}, & S(t, z) < 0 \\ -\alpha \frac{\Psi}{\|\Psi\|}, & S(t, z) = 0 \\ 0, & S(t, z) > 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

其中 $\alpha \in [0, 1]$ 。而当 $\|\Psi\| = 0$ 时, 则有 [32]

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) \in S(0, 1), & 1 - \beta T_{\max} p_m < 0 \\ \mathbf{u}(t) \in B(0, 1), & 1 - \beta T_{\max} p_m = 0 \\ \mathbf{u}(t) = 0, & 1 - \beta T_{\max} p_m > 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

由上述分析可知, 最优控制函数是由Bang-Bang弧和奇异子弧 (Singular sub-arc) 所组成。上述问题中当 $\Psi \neq 0, S(t, z) = 0$ 时的奇异控制无法确定, 即使假设 $\Psi \neq 0$ , 即不存在奇异弧时, 在数值上应用打靶法求解燃料最优轨道转移仍然是非常困难。

### 6.2.2 能量最优

能量最优的性能指标为 $\int_0^T \|\mathbf{u}\|^2 dt$ , 同样根据极值原理, 系统Hamiltonian函数为

$$H = \|\mathbf{u}\|^2 - \beta T_{\max} p_m \|\mathbf{u}\| + H_0 + \frac{T_{\max}}{m} \sum_{i=1}^3 u_i H_i \quad (6.7)$$

当 $\Psi = (H_1, H_2, H_3)$ 不为0时, 定义切换函数

$$\alpha(t, z) = \frac{\beta T_{\max} p_m + \frac{T_{\max}}{m} \|\Psi\|}{2} \quad (6.8)$$

则最优控制为

$$\mathbf{u}^*(t) = \begin{cases} -\frac{\Psi}{\|\Psi\|}, & \alpha(t, z) > 1 \\ -\alpha(t, z) \frac{\Psi}{\|\Psi\|}, & \alpha(t, z) \in [0, 1] \\ 0, & \alpha(t, z) < 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

当 $\|\Psi\| \neq 0$ 时, 由于无需处理奇异性, 问题相对燃料最优情况容易求解。由极大值原理的一阶必要条件有 $p_m = -\frac{T_{\max}\|\Psi\|}{m^2}$ , 则可知 $p_m$  是减函数, 而根据假设A3由横截条件则有 $p_m(t_f) = 0$ , 因而 $p_m$  是非负的, 因而切换函数 $\alpha(t, z)$  也是非负的, 则式6.9中的最优控制不会出现为0的情况。

### 6.2.3 $\epsilon$ 算子法求解燃料最优

由于存在奇异性, 直接应用单值打靶法求解燃料最优情形比较困难, 那么自然想到要设法寻找合适的算法消除奇异性。而能量最优控制情形不存在奇异性, 因此可以考虑在燃料性能指标中引入能量指标, 从而消除奇异性。可以考虑 $\epsilon$ 算子法 [53, 120], 即在性能指标的被积函数中增加 $\epsilon_k u^T u$ , 从而将系统的性能指标修改成

$$J(\mathbf{u}, \epsilon_k) = \int_0^T (\|\mathbf{u}\| + \epsilon_k \|\mathbf{u}\|^2) dt \quad (6.10)$$

同样根据极值原理, 定义切换函数

$$\alpha(t, z) = \frac{\beta T_{\max} p_m + \frac{T_{\max}}{m} \|\Psi\| - 1}{2\epsilon_k} \quad (6.11)$$

则最优控制为

$$\mathbf{u}^*(t) = \begin{cases} -\frac{\Psi}{\|\Psi\|}, & \alpha(t, z) > 1 \\ -\alpha(t, z) \frac{\Psi}{\|\Psi\|}, & \alpha(t, z) \in [0, 1] \\ 0, & \alpha(t, z) < 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

文献 [53]证明了 $\epsilon$  算法的收敛性, 同时也表明当 $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$  时, 将收敛于 $\int_0^T \|\mathbf{u}\| dt$  的最小值, 实际上当 $\epsilon_k$  降低到足够小的数值时, 可以得到原奇异解的一个相当好的近似。若取 $\epsilon_k = 1$ , 就是燃料-能量混合最优。

## 6.3 数值计算

6.2节应用讨论了燃料、能量最优轨道转移问题的最优控制设计问题, 应用

表 6.1 燃料/能量最优轨道转移数值边界条件

变量	初始条件	终端条件
$P$	15.6Mm	32.1Mm
$e_x$	0.75	0.16
$e_y$	0.0	0.30
$h_x$	0.0612	0.0
$h_y$	0.0	0.1
$L$	$\pi$	自由
$m$	1500kg	自由

极小值原理一阶必要条件，系统的状态和协状态方程为

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \partial_{\mathbf{p}} H^*(t, \mathbf{x}, m, \mathbf{p}, p_m, \mathbf{u}^*) \\
 \dot{m} &= \partial_{p_m} H^*(t, \mathbf{x}, m, \mathbf{p}, p_m, \mathbf{u}^*) \\
 \dot{\mathbf{p}} &= -\partial_{\mathbf{x}} H^*(t, \mathbf{x}, m, \mathbf{p}, p_m, \mathbf{u}^*) \\
 \dot{p}_m &= -\partial_m H^*(t, \mathbf{x}, m, \mathbf{p}, p_m, \mathbf{u}^*)
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

而在数值算例中，我们考虑目标轨道的 $L_f$ 自由情形，初始轨道和目标轨道的轨道根数如表6.1所示。

根据假设A3，终端卫星质量自由，而终端 $L_f$ 也是自由的，因此根据极值原理的横截条件，质量和 $L$ 对应的协变量仍需满足终端约束条件

$$\begin{aligned}
 p_m(t_f) &= 0 \\
 p_L(t_f) &= 0
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

至此，根据极值原理，系统方程6.13，初始边值条件和终端边界条件6.1以及横截条件6.14将轨迹优化问题转化为两点边值问题。下面则应用单值打靶方法求解相应的两点边值问题，打靶映射为 [61]

$$S(t, p_0) = \exp_{\mathbf{x}_0}(t, p_0) - \mathbf{x}_f \tag{6.15}$$

具体到本问题则为

$$S(t_f, p_0) = (P(t_f) - P^f, e_x(t_f) - e_x^f, e_y(t_f) - e_y^f, h_x - h_x^f, h_y(t_f) - h_y^f, p_m(t_f), p_L(t_f))$$

而对于最短飞行时间，第四章的数值计算结果表明最大推力与最优轨道转移时间有如下关系

$$t_{fmin}(\mathbf{h}) \cdot T_{max}(\mathbf{N}) \approx c \quad (6.16)$$

因此对于固定时间燃料或能量最优轨道转移，假设A2可以由下式来满足

$$t_f = c_{tf} \cdot t_{fmin} \quad (6.17)$$

其中 $c_{tf}$ 为大于1常数。对于表6.1表示的边值条件，根据数值仿真结果式6.16中的常数值为800。

求解6.15式的经典工具是牛顿型算法，本文应用的非线性求解器是More JJ等人开发的HYBRD/HYBRJ [121]，这个求解器使得两点边值问题的变得相对易于求解。通过求解打靶函数确定 $p_0$ ，然后求解初值问题。而对于 $\epsilon$ 算法，我们则采用文献 [32]提到的预测-校正零路径跟随方法， $\epsilon_k : 1 \rightarrow 0$ 变化，从而寻求燃料最优控制。当 $\epsilon_k = 1$ 时，对应的为燃料-能量混合最优情形，而当 $\epsilon_k = 0$ 时则对应燃料最优情形。

以下数值仿真都是最大推力幅值 $T_{max} = 5\text{N}$ 时的结果，根据式6.16可知最短飞行时间约为160h，式6.17中的 $c_{tf}$ 取为1.2。图示中‘-’线表示的是能量最优控制情形，‘-.’表示的是能量-燃料混合最优控制情形，而‘-’则表示的应用 $\epsilon$ 算法求解的燃料最优控制情形。图6.1所示的是状态随时间变化的最优轨迹，由图可以看出状态变化比较平滑，同时也可看出三种情况下的最优轨迹几乎是重合的，那么可以猜测在给定初始轨道和目标轨道、给定轨道转移时间的条件下，无论是燃料最优还是能量最优抑或燃料-能量混合最优，轨道转移的结果都是一样的。但是从图示也可看出，终端 $L$ 存在较大差别，即在目标轨道上终端位置是不同的，图示的 $L$ 整定为

$$\frac{\text{mod}(L, 2\pi)}{\pi} - 1$$

从而可以看出绕飞地球的圈数约为12-13圈。

图6.2为最优控制随时间的变化规律，由图可以看出，卫星运行的初始几圈

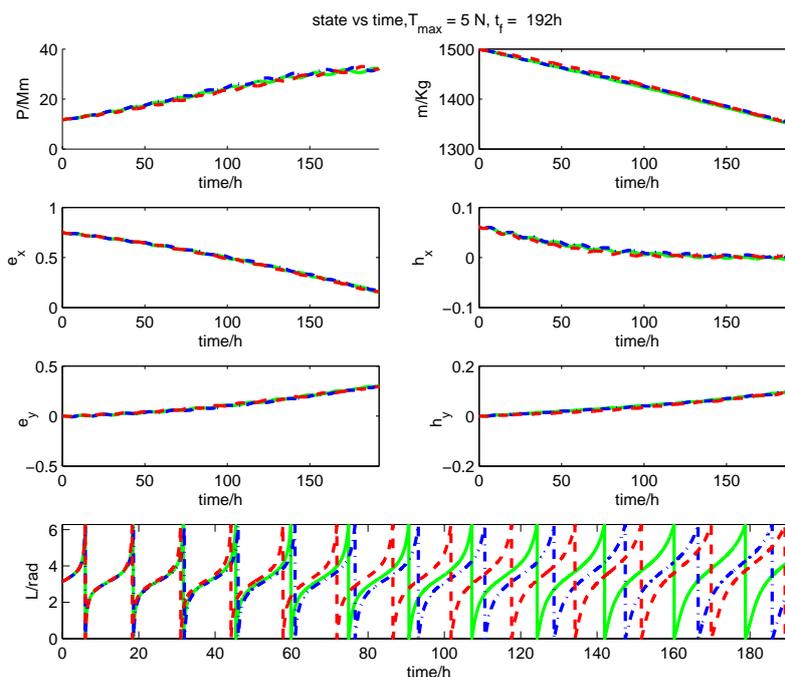


图 6.1 状态随时间变化轨迹

控制规律比较相似，而 $\|u\|$ 的变化轨迹则显示能量最优和能量-燃料混合最优情形都未出现为0的时刻，最优控制是连续的。在能量最优轨道转移情形中，我们已经证明了不会出现 $u = 0$ 的情况；但是在能量-燃料混合最优控制情形，切换函数为 $\alpha(t, z) = \frac{\beta T_{max} p_m + \frac{T_{max}}{m} \|\Psi\|}{2}$ ，并未证明是非负的。而在燃料最优控制情形，未出现奇异弧，即仅存在有限个切换点，最优控制是典型Bang-Bang控制。同时也可看出我们基于的假设 $\|\Psi\| \neq 0$ 是成立的，但是在理论上仍是未解决的开问题。

图6.3图6.4则分别表示是能量最优控制情形和燃料最优控制情形卫星在地心坐标系下的3D飞行轨迹，燃料-能量混合最优则与能量最优情形相似，在此未另行给出。图中红色的箭头代表推力方向，由图可以看出能量最优或能量-燃料混合最优情形发动机一直工作，而在能量最优情形则存在零推力阶段。

改变最大推力幅值重复上述数值实验，结果如图6.5所示，能量最优、燃料最优及能量-燃料最优三种情形下轨道转移任务完成时卫星的质量和发动机最大推力之间的关系，由图可以看出三种情况下的最终质量几乎相同，而对于不同的最优轨道转移任务终端质量也几乎是恒定的。可以猜测给定初始轨道和目标轨道，发动机最大推力的大小只改变轨道转移的圈数，即推力大则圈数少、轨

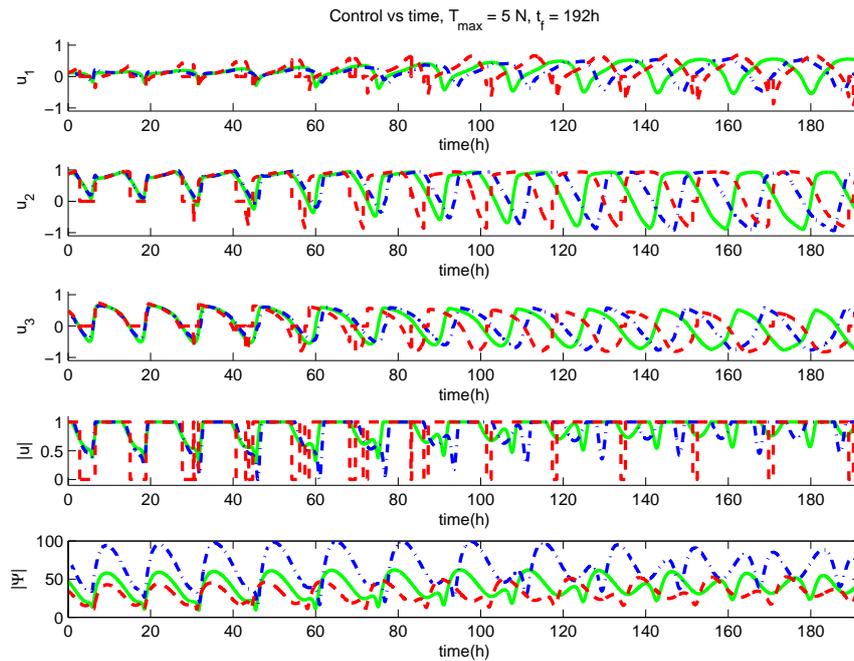


图 6.2 最优控制随时间变化轨迹

道转移时间短，而推力小则圈数多、轨道转移时间长，并不影响燃料的消耗，即  $T_{\max} \|\mathbf{u}\| t_f$  是恒定的。

## 6.4 小结

本文基于间接法分别研究了时间固定下的连续推力能量最优、燃料最优以及燃料-能量混合最优轨道转移控制。燃料最优因存在奇异性而不易数值求解，转而研究能量最优和能量-燃料混合最优，通过在性能指标中引入能量指标消除奇异性来研究燃料最优控制。应用极值原理将轨迹优化问题转化为两点边值问题，采用单值打靶法求解相应的两点边值问题，数值结果表明基于的假设  $\|\Psi\| \neq 0$  是成立的；能量最优或能量燃料混合最优情形最优控制是连续的，而燃料最优情形是典型的 bang-bang 控制；给定初始和目标轨道，轨道转移任务消耗的燃料是确定的，推力大小只改变轨道转移的圈数；能量最优，燃料最优及能量-燃料混合最优三种不同性能指标对应的最优轨迹几乎是相同的。

两点边值问题的数值求解仍是未很好解决的难题，由于数值计算受到计算精度、算法收敛域等影响，上述数值得到的结果并未得到理论证明，结论是否具有普遍性仍需进一步研究。

Trajectory ,  $T_{\max} = 5 \text{ N}$ ,  $t_f = 192 \text{ h}$ ,  $L_f = 79.979 \text{ rad}$ ,  $m_f = 1347.4994 \text{ kg}$ .

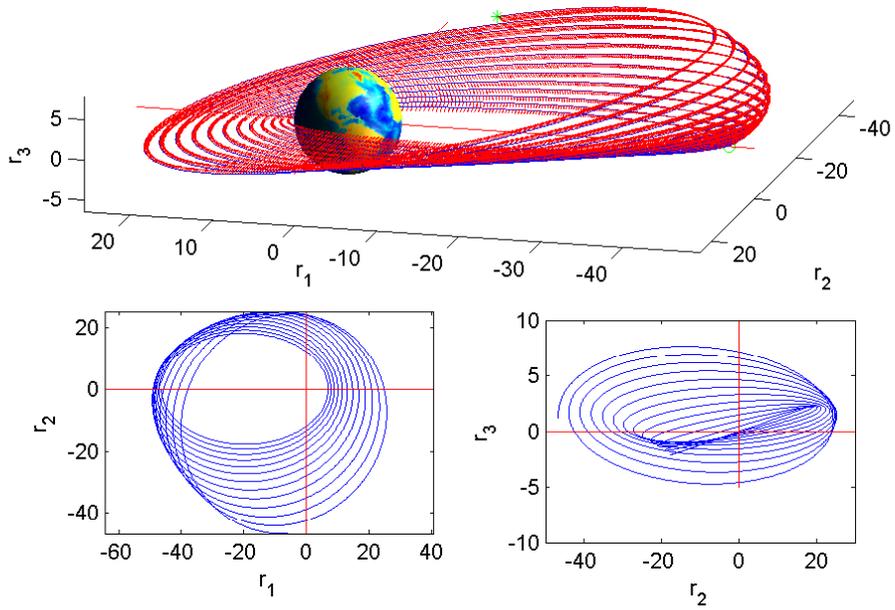


图 6.3 能量最优3D轨迹

Trajectory ,  $T_{\max} = 5 \text{ N}$ ,  $t_f = 192 \text{ h}$ ,  $L_f = 83.5127 \text{ rad}$ ,  $m_f = 1349.064 \text{ kg}$ .

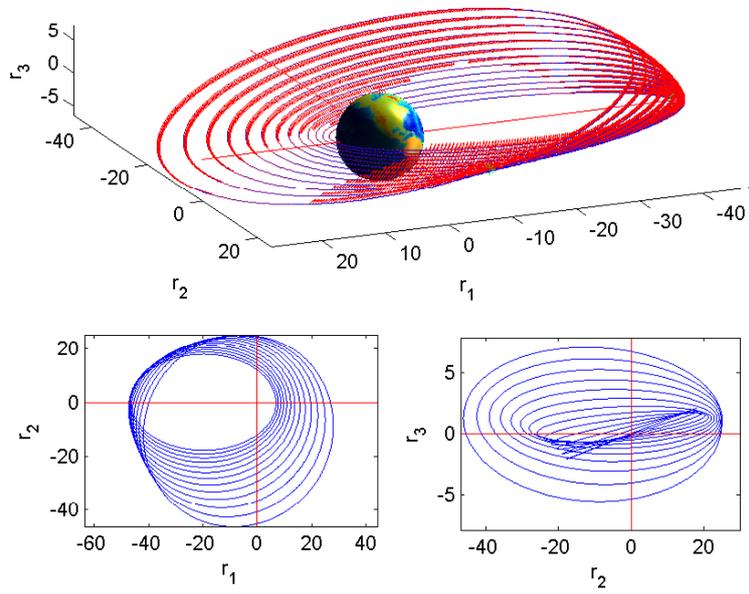


图 6.4 燃料最优3D轨迹

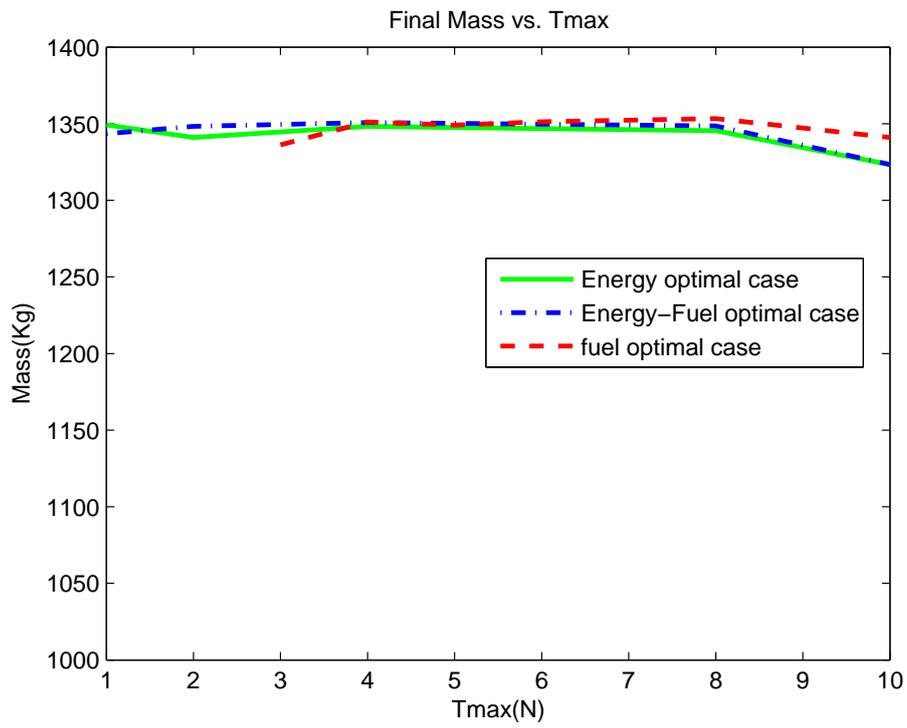


图 6.5 终端时刻卫星质量与最大推力幅值的关系



## 第七章 连续推力最优轨道规避

第三至第六章，我们应用间接法研究了时间或燃料最优轨道机动问题，轨道机动使命包括轨道转移、交会和拦截。在空间任务中，还有一种重要的轨道机动方式是轨道规避，这一章，我们则应用直接法研究时间最优或燃料最优轨道规避问题。

航天器在太空飞行中，存在一定的概率与其他航天器或者空间碎片相撞 [122]。航天器需要采取一定的措施，以避免类似美俄卫星相撞 [123] 这样的事故再次发生，通常有两种方法，一是实施规避，二是发射拦截器实施拦截 [98]。因此，轨道规避问题可描述为：已知航天器和障碍航天器的轨道根数和初始位置，航天器实施轨道机动，要求时间最短或者燃料消耗最小，以与障碍航天器相距一定的安全距离绕开障碍，然后返回到原始轨道。目前的文献调研表明，连续推力规避问题并未得到广泛研究，仅在航天器编队研究中考虑了避障问题或考虑脉冲推力控制 [124]。

应用极大值原理研究规避问题，由于转化后的两点边值问题对初值的敏感性，而且考虑路径约束时需要猜测约束弧的个数和切换点，使得问题求解变得异常困难。文献 [21,66] 应用开普勒型方程，应用极大值原理研究了多段火星探测及返回问题。本文受文献 [21] 启发，应用改进赤道轨道根数描述的动力学方程，在假设给定中间过渡轨道的条件下，将轨道规避问题划分为转移和返回两段非线性规划问题来求解，数值仿真结果表明该方法能够完成时间或燃料最优轨道规避问题。

### 7.1 问题描述

为简化问题研究，假设给定最优中间过渡轨道，航天器从初始轨道转移到过渡轨道，然后再返回到原始轨道，将两段轨道转移统一来考虑，研究时间或燃料最优轨道规避问题。

假设航天器为点质量体，推进系统为固定比冲常值推力发动机，则连续推力最优轨道规避问题则可具体描述为：设计最优控制器使得性能指标

$$J = \int_0^{t_f} 1 dt \quad (7.1)$$

$$J = -m(t_f) \quad (7.2)$$

最小，即最终飞行时间 $t_f$ 最短或任务完成时卫星质量 $m(t_f)$ 最大；同时满足航天器动力学方程 [30]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \frac{T}{m} \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \quad (7.3)$$

和航天器质量 $m$ 变化方程

$$\dot{m} = -\beta T \quad (7.4)$$

其中 $\beta$ 为与发动机比冲相关的常数， $T$ 为发动机推力。

规避问题的初始条件和终端条件分别定义为

$$\Phi_0 = (\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^0, m(0) - m^0) = 0 \quad (7.5)$$

$$\Phi_f = (\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}^0) = 0 \quad (7.6)$$

而中间过渡轨道则满足约束

$$\Phi_s = (\mathbf{x}(t_s) - \mathbf{x}^s) = 0 \quad (7.7)$$

其中 $(\mathbf{x}^0, m^0)$ 为初始状态参数值， $\mathbf{x}^s$ 为中间过渡轨道根数值。同时，控制项推力 $T$ 和推力在轨道坐标系中方向分量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 满足约束

$$\begin{aligned} 0 &\leq T \leq T_{\max} \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad (7.8)$$

航天器的动力学方程常用改进的轨道根数描述， $\mathbf{x} = [h \ e_x \ e_y \ h_x \ h_y \ L]^T$ 前五个刻画轨道的大小和形状，而第六个确定卫星在轨道上的位置，

- $h$ ，角动量
- $(e_x, e_y)$ ，偏心率向量，在轨道平面，指向近地点
- $(h_x, h_y)$ ，旋转向量，在赤道平面，过轨道和赤道平面的交点
- $L$ ，累积赤径

在本章，为数值处理上的方便，采用的轨道根数形式与前几章的主要区别在于第一个根数，本章选取的是角动量，而前几章选取的是半通径。与经典轨

道根数的关系

$$\begin{aligned}
 h &= \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}} \\
 e_x &= e \cos(\omega + \Omega) \\
 e_y &= e \sin(\omega + \Omega) \\
 h_x &= \tan\left(\frac{i}{2}\right) \cos \Omega \\
 h_y &= \tan\left(\frac{i}{2}\right) \sin \Omega \\
 L &= \Omega + \omega + \nu
 \end{aligned}$$

若推力在轨道坐标系下沿径向-法向坐标系下分解, 则式 (7.3) 中定义卫航天器动态的4个向量场为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_0 &= \frac{W^2}{\mu h^3} \frac{\partial}{\partial L} \\
 \mathbf{f}_1 &= \frac{h}{W} \left( W \sin L \frac{\partial}{\partial e_x} - W \cos L \frac{\partial}{\partial e_y} \right) \\
 \mathbf{f}_2 &= \frac{h}{W} \left( 2P \frac{\partial}{\partial h} + (W \cos L + \eta_x) \frac{\partial}{\partial e_x} + (W \sin L + \eta_y) \frac{\partial}{\partial e_y} \right) \\
 \mathbf{f}_3 &= \frac{h}{W} \left( -Z e_y \frac{\partial}{\partial e_x} + Z e_x \frac{\partial}{\partial e_y} + \frac{C}{2} \cos L \frac{\partial}{\partial h_x} + \frac{C}{2} \sin L \frac{\partial}{\partial h_y} + Z \frac{\partial}{\partial L} \right)
 \end{aligned}$$

其中的参数则有如下形式:

$$\begin{aligned}
 W &= 1 + e_x \cos L + e_y \sin L, \eta_x = e_x + \cos L, \eta_y = e_y + \sin L, \\
 Z &= h_x \sin L - h_y \cos L, C = 1 + h_x^2 + h_y^2
 \end{aligned}$$

## 7.2 非线性规划求解最优规避问题

标准的非线性规划问题可描述为: 寻找向量  $\mathbf{x}$ , 使得性能指标  $J$  最小化, 同时满足状态约束  $c_L \leq c(\mathbf{x}) \leq c_u$ , 以及有界约束  $\mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u$  [41]。对于最优控制问题, 通常采用的直接法做法是先将微分方程离散化, 将原最优控制问题转化为一个参数优化问题, 从而利用非线性规划来求解。本文应用配点法, 首先将时间域分成  $n$  等份时间间隔

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_f$$

每个间隔的端点称之为配点（collocation point），从而每个配点上的状态和控制

$$y = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n\}$$

作为非线性规划变量，通过多项式插值得到整个最优控制过程的控制和状态参数，根据这些参数积分状态方程形成约束条件，从而得到一个数学规划问题。

根据上节最优规避问题的描述，将最优规避问题划分为两个阶段：转移阶段（ $p1$ ）和返回阶段（ $p2$ ）。令转移阶段和返回阶段需要的时间分别为 $t_{p1}, t_{p2}$ ，则在转移阶段，非线性规划问题满足的两端边界条件为

$$\begin{aligned} \Phi(0)_{p1} &= (h(0)_{p1} - h^0, e_x(0)_{p1} - e_x^0, e_y(0)_{p1} - e_y^0, h_x(0)_{p1} - h_x^0, h_y(0)_{p1} - h_y^0, \\ &L(0)_{p1} - L^0, m(0)_{p1} - m^0) = 0 \end{aligned}$$

$$\Phi(t_{p1})_{p1} = (h(t_{p1})_{p1} - h^s, e_x(t_{p1})_{p1} - e_x^s, e_y(t_{p1})_{p1} - e_y^s, h_x(t_{p1})_{p1} - h_x^s, h_y(t_{p1})_{p1} - h_y^s) = 0$$

其中 $(h^0, e_x^0, e_y^0, h_x^0, h_y^0)$ 描述航天器初始轨道， $(h^s, e_x^s, e_y^s, h_x^s, h_y^s)$ 描述中间过渡轨道， $L^0$ 确定航天器在原轨道上的初始位置，因为转移到过渡轨道上的位置无法确定，因此终端 $L$ 是自由的。

在返回阶段，满足的终端边界条件为

$$\Phi(t_{p2})_{p2} = (h(t_{p2})_{p2} - h^0, e_x(t_{p2})_{p2} - e_x^0, e_y(t_{p2})_{p2} - e_y^0, h_x(t_{p2})_{p2} - h_x^0, h_y(t_{p2})_{p2} - h_y^0) = 0$$

而初始边界条件则满足转移阶段的终端条件，即两个阶段满足连接条件

$$\begin{aligned} Link &\doteq (h(t_{p1})_{p1} - h(0)_{p2}, e_x(t_{p1})_{p1} - e_x(0)_{p2}, e_y(t_{p1})_{p1} - e_y(0)_{p2}, h_x(t_{p1})_{p1} - h_x(0)_{p2}, \\ &h_y(t_{p1})_{p1} - h_y(0)_{p2}, L(t_{p1})_{p1} - L(0)_{p2}, m(t_{p1})_{p1} - m(0)_{p2}) = 0 \end{aligned}$$

将两个阶段统一来考虑时间最优规避问题，令 $t_f = t_{p1} + t_{p2}$ ，则性能指标为

$$J = \int_0^{t_{p1}} 1 dt + \int_{t_{p1}}^{t_f} 1 dt$$

而对于最小燃料消耗问题，两段历经时间 $t_{p1}, t_{p2}$ 是自由的，其他条件与时间最优情形相同，但性能指标为

$$J = -m(t_f)$$

表 7.1 最优规避问题数值仿真边值条件

变量	初始条件	终端条件
$h/h \cdot \text{Mm}^{-1}$	0.055	0.06
$e_x$	0.2	0.0
$e_y$	0.0	0.0
$h_x$	0.6	0.2
$h_y$	0.0	0.1
$L/\text{rad}$	$\pi/2$	自由
$m/\text{kg}$	1500	自由

另外，将轨道限制为椭圆轨道，则在两个阶段均需满足路径约束

$$0 \leq e_x^2 + e_y^2 \leq 1$$

至此，将时间最优规避问题转化为两段非线性规划问题，接下来采用 TOMLAB/PROPT [125] 进行数值仿真。

### 7.3 数值仿真

系统的动力学方程由式 (7.3) 和式 (7.4) 表示，系统满足的边界条件即原始轨道和过渡轨道的轨道根数如表 7.1 所示。

其中根数  $L$  为累积赤经，确定航天器在轨道上的位置。对于规避问题，已知航天器在原始轨道上初始位置，但是转移到过渡轨道和返回到原始轨道上的位置都无法事先知道，因此终端时刻的  $L$  是自由的。而对于航天器的总质量，假设携带足够的燃料，即燃料满足任务需求，在最大推力模式下，质量变化与历经时间是线性关系，最终质量由时间确定，因此也假设航天器在终端时刻的质量是自由的。

假设地球为半径为 6378 km 的圆球，则当航天器发动机最大推力  $T_{\max} = 30\text{N}$  时，考虑时间最优和燃料最优规避情形时，航天器在地球惯性坐标系下的三维飞行轨迹如图 1 和图 2 所示。由图 7.1 和图 7.1 可以看出，航天器完成了时间最优或燃料最优规避使命，其中时间最优规避时转移轨道和返回轨道的半长轴与原始轨道半长轴相比变化不大，主要通过改变轨道倾角来完成规避；而最小燃料消耗情形时的转移轨道和返回轨道则变化较大。

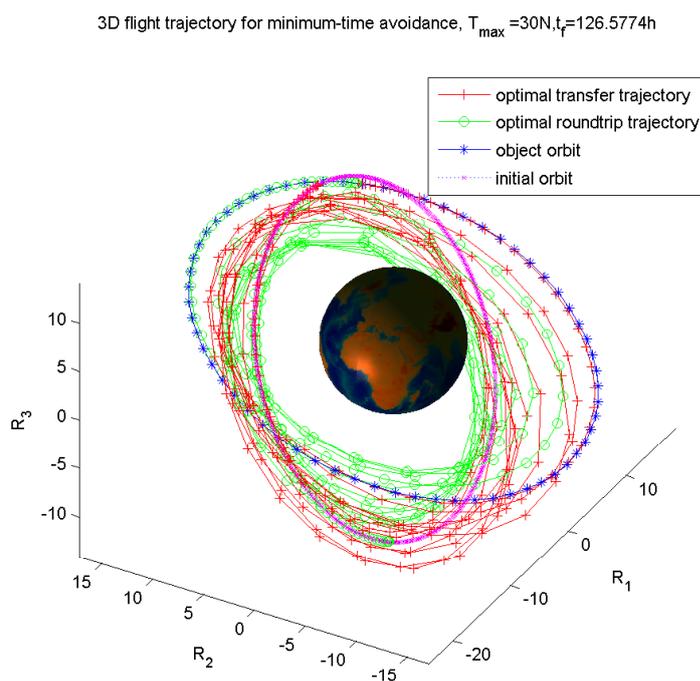


图 7.1 时间最优规避3D最优轨迹, 30N

图7.3和图7.4分别为时间最优和燃料最优情形时的最优状态随时间变化轨迹，虚线代表转移阶段，实线代表返回阶段。对于时间最优规避情形，转移过程历经时间71.77小时，总飞行时间为126.5774小时；而考虑最小燃料消耗时，航天器转移阶段历经时间86.75小时，总飞行时间149.2696小时；由此可以看出，转移阶段要比返回阶段用时较多。

第一个根数 $h$ 可确定航天器飞行轨道的大小， $(e_x, e_y)$  确定椭圆轨道的偏心率， $(h_x, h_y)$  确定轨道倾角。由图7.3和图7.4可以看出，根数 $h$ 在时间最优时的转移阶段变化比较缓慢；而在燃料最优时的转移阶段变化较大，即航天器飞行实时椭圆轨道的半长轴变化较大；由图图7.1和图7.1的三维飞行轨迹也可以明显看出这点。轨道倾角在时间最优和燃料最优时的变化轨迹比较相似，而且转移阶段和返回阶段的变化几乎是对称的。根数 $L$  确定航天器在飞行轨道上的实时位置，根据

$$N = \text{mod} \left( \frac{L_{t_f} - L_0}{2\pi} \right)$$

则可确定航天器绕飞地球的圈数 $N$ ， $\text{mod}$ 表示向下取整。时间最优规避时，终端时刻 $L(t_f) = 148.5\text{rad}$ ，绕飞地球的圈数约为23圈；最小燃料消耗规避时，终端

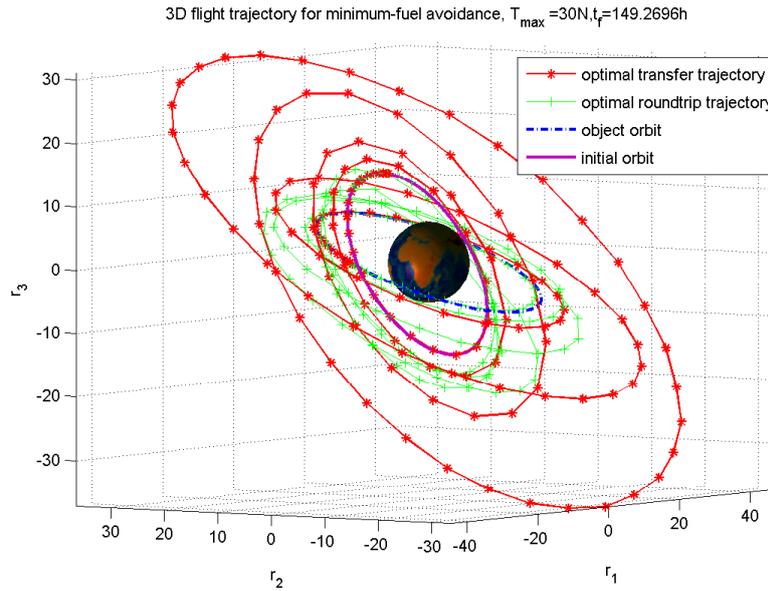


图 7.2 最小燃料消耗规避3D 最优轨迹, 30N

时刻 $L(t_f) = 83.958 \text{ rad}$ ，绕飞地球的圈数约为13圈。

由图7.3和图7.4可以看出，航天器质量与时间成线性关系，根据质量变化方程，可知在时间最优或燃料最优时，航天器均一直以最大推力工作，因此航天器质量可以表示为

$$m(t) = m^0 - \beta T_{\max} t$$

根据上面的表达式可知，时间最优规避时，航天器消耗的燃料也最少，但是在考虑最小燃料消耗时，航天器完成任务的飞行时间不一定是最短的。

## 7.4 小论与展望

研究常值连续推力时间最优和燃料最优规避问题，在中间过渡轨道已知的条件下，将规避问题划分为转移和返回两个阶段，然后应用非线性规划方法统一来考虑时间或燃料最优规避问题。数值仿真结果表明，对于同一最大发动机推力幅值，时间最优情形与燃料最优情形相比较，航天器完成规避任务历经的飞行时间短，飞行轨迹的椭圆轨道半长轴变化较小，但是绕飞地球的圈数多。数值仿真同时也表明，在考虑时间最优或燃料最优轨道规避时，航天器均一直以最大推力工作。但是上述结论仅是数值仿真的结果，并未得到理论证明。由于非线性规划方法本身的局限性，选择配点较多时，运算时间过长，而配

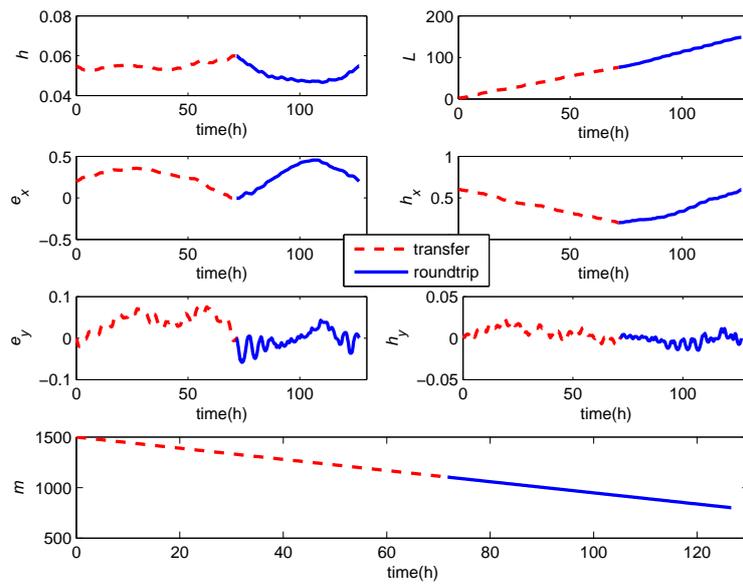


图 7.3 时间最优规避状态最优变化轨迹，30N

点选择较少时，最优轨迹则非常不光滑；对于更小的最大推力幅值（如10 N以下），运用非线性规划方法则无法得到数值仿真结果。因此在非线性规划方法的基础上，寻求改进或者其他算法来研究最优规避问题将是进一步研究的方向。本文的数值仿真算例中，中间过渡轨道的轨道根数只是根据规避要求随机选取的，完成规避任务的中间过渡轨道的优化选取也是一个有意义的研究方向；更进一步的，不预先给定中间轨道，研究最优航天器规避问题在理论与算法上都是一个巨大的挑战。

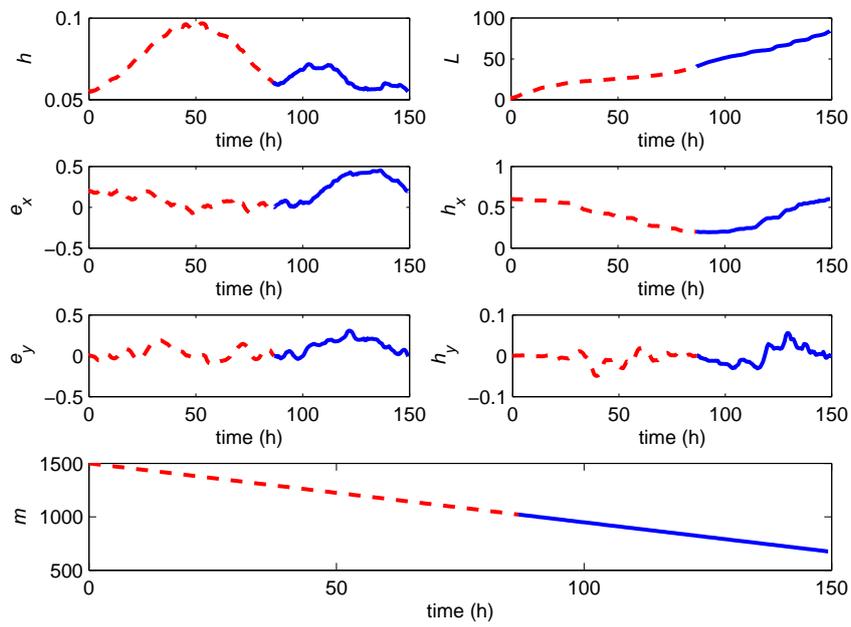


图 7.4 最小燃料消耗规避状态最优变化轨迹, 30N



## 第八章 结论与展望

本论文研究连续推力航天器最优轨道机动问题。考虑航天器为点质量模型和常值推力发动机，在二体轨道基础上，采用位置-速度和改进轨道根数作为状态变量描述了轨道动力学方程。轨道机动模式包括轨道转移、交会和拦截，应用间接法即极大值原理设计了时间或能量最优控制律，并进行了奇异控制分析。根据极大值原理一阶必要条件，将轨迹优化问题转化为两点边值问题，然后在数值上应用打靶法来求解相应的边值问题。论文还研究了最优轨道规避问题，假设给定中间过渡轨道，应用非线性规划方法研究了时间最优和燃料最优轨道规避问题。

1.应用开普勒型动力学方程研究了时间最优轨道拦截问题。考虑控制输入分别在惯性坐标系和轨道坐标系下分解，应用极大值原理设计最优控制律并进行了奇异性分析，根据极大值原理一阶必要条件，从而将轨道拦截问题转化为两点边值问题来求解。数值仿真部分，首先研究了终端位置固定、速度自由情形，结果表明最优解具有振荡性，调整发动机最大推力幅值，发现在数值上同样存在最大推力幅值与最小飞行时间乘积近似常数关系的现象；另外研究了一种新的轨道拦截问题描述，在终端时刻，拦截星与目标星相对位置为零，相对速度自由，从而拦截星的终端位置约束为一流形。

2.应用改进轨道根数描述的高斯型动力学方程，在统一的框架下研究了时间最优轨道转移、交会和拦截问题。应用间接法设计了最优控制律，极大值原理一阶条件将轨迹优化问题转化为两点边值问题。轨道转移、拦截和交会任务的主要区别在于终端条件，应用轨道根数描述了各自终端约束，并由横截条件，给出了详细的终端边值约束条件。数值上，应用单值打靶法求解相应的边值问题，仿真结果表明对于相同的最大推力幅值，轨道转移和交会问题具有几乎相同的最优轨迹；调整最大推力幅值，重复数值实验，结果表明最大推力幅值与最小飞行时间乘积近似成常数关系的猜想同样适用于轨道拦截和交会问题，但是同时也表明，该结论不适用较大推力幅值情形。

3.研究了累积赤经最优轨道转移问题。将累积赤经引入系统作为新的自变量，应用间接法研究考虑变质量和具推力约束下的最优累积赤经轨道转移问题；借鉴平均化方法，设计了近似最优控制律，同样将最优轨道转移问题转化为两点边值问题。数值仿真结果表明，最大推力幅值与最小累积赤经乘积近似

---

成常数关系。

4.研究了燃料最优轨道转移问题。基于改进轨道根数描述轨道动力学方程，应用间接法研究燃料最优控制。由于燃料最优控制律存在奇异性，不易求解，转而考虑能量最优控制。由于能量最优情形相对易于求解，考虑在燃料最优中引入能量指标，应用 $\epsilon$ 算法将燃料最优和能量最优结合起来考虑。根据极小值原理一阶必要条件，将轨迹优化问题转化为两点边值问题，在数值上对这三种形式的最优轨道转移做出比较，结果表明能量最优或能量燃料混合最优情形最优控制是连续的，而燃料最优情形是典型的bang-bang控制；给定初始和目标轨道，轨道转移任务消耗的燃料是确定的，推力大小只改变轨道转移的圈数；能量最优，燃料最优及能量-燃料混合最优三种不同性能指标对应的最优轨迹几乎是相同的。

5.研究常值连续推力时间最优和燃料最优规避问题。在中间过渡轨道已知的条件下，将规避问题划分为转移和返回两个阶段，然后应用非线性规划方法统一来考虑时间或燃料最优规避问题。数值仿真结果表明，对于同一最大发动机推力幅值，时间最优情形与燃料最优情形相比较，航天器完成规避任务历经的飞行时间短，飞行轨迹的椭圆轨道半长轴变化较小，但是绕飞地球的圈数多。数值仿真同时也表明，在考虑时间最优或燃料最优轨道规避时，航天器均一直以最大推力工作。

上述研究内容，某些数值上得到的结果并未得到理论上严格证明，是否具有普适性，仍需进一步开展深入的研究的工作。除此之外，基于博士论文已完成的工作，以下几个方面值得继续开展研究。

1. **状态约束的处理**。我们在研究最优轨道转移问题时，都假设路径约束自然满足，即轨迹位置矢量幅值大于理想地球半径。由于改进轨道根数描述的力学方程的最优解比较平滑，路径约束假设易于满足；但是开普勒型方程的状态约束是非凸的，且最优解具振荡性，虽然仿真结果表明满足路径约束假设，但是我们也发现对于不同的初始条件，可能会出现遭遇地球情况。因此，在实际问题中必须考虑路径约束的影响。应用极大值原理，研究带有路径约束的轨迹优化问题，要考虑角点条件，相应的将问题转化为多点边值问题，数值上不易处理。

2. **连续推力和脉冲推力的联系**。文献 [112]研究了最小燃料消耗问题，理论上，速度脉冲控制要求加速度无穷大，可看作是有限推力下卫星质量趋于0的

极限形式。文献 [126] 的研究则表明对于相同的轨道转移时间，小推力要比脉冲推力消耗的燃料少。因而可以尝试用统一的模型表示连续推力和脉冲推力，将两者有机的结合起来去研究最优轨道机动问题。

**3. 轨道规避问题。**轨道规避研究文献很少见，文献 [21] 研究了中间驻留轨道已知的时间约束下的能量最优轨道规避问题，航天器在驻留轨道上停留时间要求大于一定值，而总飞行时间则小于一定值。轨道规避实质上是两次轨道转移，中间驻留轨道若是固定的则相对容易，若不固定需要优化则难于处理，需要优化的参数较多，如在初始轨道的变轨点、中间目标轨道的参数以及在中间轨道的变轨点等等。因此，轨道规避问题的提法仍有待商榷，在规避空间障碍及太空垃圾任务中很有应用价值，研究前景也比较广阔。



## 参考文献

- [1] 郗晓宁, 王威, 高玉东. 近地航天器轨道基础[M]. 长沙:国防科学技术大学出版社, 2003
- [2] 章任为. 卫星轨道姿态动力学与控制[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 1998
- [3] FW Gobetz, JR Doll. A survey of impulsive trajectories.[J]. AIAA Journal. 1969, **7**(5):801–834
- [4] Lawden D.F. Optimal trajectories for space navigation[M]. London: Butterworths, 1963
- [5] C.A. Kluever. Optimal Earth-moon trajectories using combined chemical-electric propulsion[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics. 1997, **20**(2):253–258
- [6] Rayman M.D., Williams S.N. Design of the first interplanetary solar electric propulsion mission[J]. Journal of Spacecraft and Rockets. 2002, **39**(4):589–595
- [7] Hughes G. W., McInnes C.R. Solar sail hybrid trajectory optimization for non-keplerian orbit transfer[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics. 2002, **25**(3):602–604
- [8] Y. Gao. Advances in low-thrust trajectory optimization and flight mechanics[D]. Ph.D. thesis, University of Missouri-Columbia, 2003
- [9] D.T. James. Optimal continuous-thrust orbit transfers[D]. Ph.D. thesis, Air University, 1996
- [10] M. Kim. Continuous Low-Thrust Trajectory Optimization: Techniques and Applications[D]. Ph.D. thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2005
- [11] Troy Goodson. Fuel-optimal control and guidance for low-and medium-thrust orbit transfer[D]. Ph.D. thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, 1995
- [12] 任远. 星际探测中的小推力转移轨道设计与优化方法研究[D]. Ph.D. thesis, 哈尔滨工业大学, 2007
- [13] J.E. Prussing, B.A. Conway. Orbital mechanics[M]. Oxford University Press, USA, 1993
- [14] RH Battin. An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics[M]. AIAA Education Series, AIAA, New York, 1987
- [15] Y. Xu. Enhancement in Optimal Multiple-Burn Trajectory Computation by Switching Function Analysis[J]. Journal of Spacecraft and Rockets. 2007, **44**(1):264–272
- [16] Y. Ulybyshev. Continuous thrust orbit transfer optimization using large-scale linear programming[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics. 2007, **30**(2):427

- [17] C. CH, L. LA, H.J.G. TD. Optimality and guidance for planar multiple-burn orbit transfers[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1996, **19**(6):709–717
- [18] P. Martinon, J. Gergaud. Using switching detection and variational equations for the shooting method[J]. *Optimal Control Applications and Methods*. 2007, **28**(2):95–116
- [19] Jason C. H. Chuang, Troy D. Goodson, John Hanson. Multiple-Burn Families of Optimal Low- and Medium-Thrust Orbit Transfers[J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1999, **36**(6):866–874
- [20] T. Goodson, J.C.H Chuang. Optimal finite thrust orbit transfer with large numbers of burns[J]. *Journal of guidance, control, and dynamics*. 1999, **22**(1):139–148
- [21] C.L. Ranieri, C.A. Ocampo. Optimization of roundtrip, time-constrained, finite burn trajectories via an indirect method[J]. *Journal of guidance, control, and dynamics*. 2005, **28**(2):306–314
- [22] Paul Williams. Optimal orbital transfer with electrodynamic tether[J]. *Journal of guidance, control, and dynamics*. 2005, **28**(2):369–372
- [23] Jennifer S. Hudson, Daniel J. Scheeres. Reduction of Low-Thrust Continuous Controls for Trajectory Dynamics[J]. *Journal of guidance, control, and dynamics*. 2009, **32**(3):780–787
- [24] C. Colombo, M. Vasile, G. Radice. Semi-analytical solution for the optimal low-thrust deflection of Near-Earth Objects[J]. *JOURNAL OF GUIDANCE, CONTROL, AND DYNAMICS*. 2009, **32**(3):796–809
- [25] Nacozy P.E., Dallas S. S. The geopotential in nonsingular orbital elements[J]. *Celestial Mechanics*. 1977, **15**(2):453–466
- [26] Cohen C.J., Hubbard E.C. A nonsingular set of orbital elements [J]. *Astronomical Journal*. 1962, **67**(1):10–15
- [27] M.J.H Walker, B. Ireland, J. Owens. A set modified equinoctial orbit elements[J]. *Celestial Mechanics*. 1985, **36**(4):409–419
- [28] M.J.H Walker. A set modified equinoctial orbit elements[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1986, **38**(4):391–392
- [29] 刘林. 航天器轨道理论[M]. 国防工业出版社, 2000
- [30] B. Bonnard, J.B. Caillau, E. Trelat. Geometric optimal control of elliptic Keplerian orbits[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*. 2005, **5**(4):929–956

- [31] JB Caillau, J. Gergaud, J. Noailles. 3D geosynchronous transfer of a satellite: Continuation on the thrust[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2003, **118**(3):541–565
- [32] Haberkorn Gergaud, J., T., P. Martinon. Low-thrust minimum-fuel orbital transfer: a homotopic approach[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2004, **27**(6):1046–1060
- [33] W.A. Scheel, B.A. Conway. Optimization of very-low-thrust, many-revolution spacecraft trajectories[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 1994, **17**:1185–1185
- [34] J.A. Kechichian. Optimal low-thrust transfer using variable bounded thrust[J]. *Acta Astronautica*. 1995, **36**(7):357–365
- [35] J.A. Kechichian. Optimal low-thrust rendezvous using equinoctial orbit elements[J]. *Acta Astronautica*. 1996, **38**(1):1–14
- [36] J.A. Kechichian. Reformulation of Edelbaum’s low-thrust transfer problem using optimal control theory[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 1997, **20**:988–994
- [37] J.A. Kechichian. Trajectory Optimization Using Nonsingular Orbital Elements and True Longitude [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 1997, **20**(5):1003–1009
- [38] M.B. McFarland, A.J. Calise. Hybrid Near-Optimal Atmospheric Guidance for Aeroassisted Orbit Transfer[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1995, **18**(1):128–134
- [39] G.A. Rauwolf, V.L. Coverstone-Carroll. Near-optimal low-thrust orbit transfers generated by a genetic algorithm[J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1996, **33**(6):859–862
- [40] A.J. Calise, N. Melamed. Optimal guidance of aero-assisted transfer vehicles based on matched asymptotic expansions[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1995, **18**(4):1310–1316
- [41] J.T. Betts. Survey of numerical methods for trajectory optimization[J]. *Journal of Guidance control and dynamics*. 1998, **21**(2):193–207
- [42] 雍恩米, 陈磊, 唐国金. 飞行器轨迹优化数值方法综述[J]. *宇航学报*. 2008, **29**(2):397–406
- [43] 王明光. 先进航天器轨道快速优化[D]. Ph.D. thesis, 西北工业大学, 2005
- [44] Hull D.G. Conversion of optimal control problems into parameter optimization problems[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1997, **20**(1):57–60
- [45] I.M. Ross, F. Fahroo. A perspective on methods for trajectory optimization[C]. *Proceedings of the AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, Monterey, CA*. 2002, 5–8

- [46] 任远, 崔平远, 栾恩杰. 基于标称轨道的小推力轨道设计方法[J]. 吉林大学学报工学版. 2006, **36**(6):998–1002
- [47] 任远, 崔平远, 栾恩杰. 基于退火遗传算法的小推力轨道优化问题研究[J]. 宇航学报. 2007, **28**(1):162–166
- [48] 尚海滨, 崔祜涛, 崔平远, 栾恩杰. 基于改进配点法的星际小推力轨道设计与优化[J]. 哈尔滨工业大学学报. 2007, **39**(12):1904–1907
- [49] Y.Z. Luo, G.J. Tang, L.N. Zhou. Simulated annealing for solving near-optimal low-thrust orbit transfer[J]. *Engineering Optimization*. 2005, **37**(2):201–216
- [50] 王华, 唐国金, 雷勇军. 有限推力轨迹优化问题的直接打靶法研究[J]. 中国空间科学技术. 2003, **23**(5):51–56
- [51] 梁新刚, 杨涤. 有限推力下时间最优轨道转移[J]. 航天控制. 2007, **25**(1):46–51
- [52] 梁新刚, 杨涤. 应用非线性规划求解异面最优轨道转移问题[J]. 宇航学报. 2006, **27**(3):363–368
- [53] 解学书. 最优控制理论与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1986
- [54] G. Knowles. An introduction to applied optimal control[M]. Academic Pr, 1981
- [55] A.E. Bryson, Y.C. Ho. Applied optimal control: optimization, estimation, and control[M]. Taylor & Francis, 1975
- [56] J.T. Betts. Practical methods for optimal control using nonlinear programming[M]. Society for Industrial Mathematics, 2001
- [57] C.H. Chuang, T.D. Goodson, J. Hanson. Computation of optimal low-and medium-thrust orbit transfers[C]. In: AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Monterey, CA, Aug. 9-11, 1993, Technical Papers. Pt. 3 (A93-51301 22-63), p. 1391-1402. 1993, 1391–1402
- [58] T. Goodson, C.H. Chuang, J. Hanson. Optimal non-impulsive thrust orbit transfers with large numbers of burns[C]. AIAA, Guidance, Navigation and Control Conference, San Diego, CA. 1996, 3706
- [59] HJ Oberle, K. Taubert. Existence and multiple solutions of the minimum-fuel orbit transfer problem[J]. *Journal of Optimization theory and applications*. 1997, **95**(2):243–262
- [60] J. Gergaud, T. Haberkorn. Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem[J]. *ESAIM-COCV*. 2006, **12**:294–310

- 
- [61] B. Bonnard, M. Jabeur, G. Janin. Control of mechanical systems from aerospace engineering[J]. *Advanced topics in control systems theory: lecture notes from FAP*. 2005:65–113
- [62] J.B. Caillau, J. Noailles. Coplanar control of a satellite around the Earth[J]. *Esaim-cocv*. 2001, **6**:239–258
- [63] JB Caillau, J. Noailles. Time optimal orbit transfer[C]. *Nonlinear Sciences on the Border of Milleniums, Conference dedicated to the 275th anniversary of Russian Academy of Sciences*, NS. 1999
- [64] B. Bonnard, M. Chyba. *Singular trajectories and their role in control theory*[M]. Springer, 2003
- [65] VG Petukhov. Optimization of multi-orbit transfers between noncoplanar elliptic orbits[J]. *Cosmic Research*. 2004, **42**(3):250–268
- [66] C.L. Ranieri, C.A. Ocampo. Optimizing Finite-Burn, Round-Trip Trajectories with  $I^*$   $s^*$   $p$  Constraints and Mass Discontinuities[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2005, **28**(4):775–781
- [67] S.Y. Ryzhov, I.S. Grigoriev. On solving the problems of optimization of trajectories of many-revolution orbit transfers of spacecraft[J]. *Cosmic Research*. 2006, **44**(3):258–267
- [68] B. Bonnard, L. Faubourg, E. Trelat. Optimal control of the atmospheric arc of a space shuttle and numerical simulations with multiple-shooting method[J]. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2005, **15**(1):109–140
- [69] David G. Hull. Initial Lagrange Multipliers for the Shooting Method[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 2008, **31**(5):1490–1492
- [70] C.M. Haissig, K.D. Mease, N.X. Vinh. Canonical transformations for space trajectory optimization[C]. *AIAA/AAS Astrodynamics Conference*. 1992, 256–264
- [71] C. Ocampo. Finite Burn Maneuver Modeling for a Generalized Spacecraft Trajectory Design and Optimization System[J]. *Annals of the New York Academy of Sciences*. 2004, **1017**(1):210
- [72] Y. Hui, W. Hongxin. Initial adjoint variable guess technique and its application in optimal orbital transfer[C]. *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*, AIAA Paper. 98–4551
- [73] C. Park. The Hamilton-Jacobi theory for solving optimal feedback control problems with general boundary conditions[D]. Ph.D. thesis, The University of Michigan, 2006

- [74] C. Park, V. Guibout, D.J. Scheeres. Solving optimal continuous thrust rendezvous problems with generating functions[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2006, **29**(2):321–331
- [75] C. Park, D.J. Scheeres. Determination of optimal feedback terminal controllers for general boundary conditions using generating functions[J]. *Automatica*. 2006, **42**(5):869–875
- [76] 王朝珠, 秦化淑. 最优控制理论[M]. 北京:科学出版社, 2003
- [77] B. Bonnard, G. Janin. Geometric Orbital Transfer Using Averaging Techniques[J]. *Journal of Dynamical and Control Systems*. 2008, **14**(2):145–167
- [78] B. Bonnard, J.B. Caillau, E. Trelat. Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control[J]. *Esaim: Control, Optimisation and Calculus of Variations*. 2007, **13**(2):207–236
- [79] B. Bonnard, J.B. Caillau, E. Trelat. Computation of conjugate times in smooth optimal control: the COTCOT algorithm[C]. 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 2005, 929–933
- [80] H. Maurer, H.J. Oberle. Second order sufficient conditions for optimal control problems with free final time: the Riccati approach[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2003, **41**(2):380–403
- [81] J.E. Prussing, S.L. Sandrik. Second-Order Necessary Conditions and Sufficient Conditions Applied to Continuous-Thrust Trajectories[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2005, **28**(4):812–816
- [82] J. Prussing, S.L. Sandrik. Second-order necessary and sufficient conditions applied to continuous-thrust trajectories[C]. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Monterey, CA. 2002, AIAA–2002–4726
- [83] B. Bonnard, J.B. Caillau. Optimality results in orbit transfer[J]. *C R Acad Sci Paris, Ser I*. 2007, **345**(6):319–324
- [84] J.T. Betts. Optimal interplanetary orbit transfers by direct transcription[J]. *Journal of the Astronautical Sciences*. 1994, **42**(3):247–268
- [85] J.T. Betts. Very low-thrust trajectory optimization using a direct SQP method[J]. *Journal of computational and applied mathematics*. 2000, **120**(1-2):27–40
- [86] Betts J T. Using sparse nonlinear programming to compute low thrust orbit transfer[J]. *Journal of the astronautical scienc*. 1993, **41**:349–371

- [87] A.L. Herman, D.B. Spencer. Optimal, low-thrust earth-orbit transfers using higher-order collocation methods[J]. *Journal of guidance, control, and dynamics*. 2002, **25**(1):40–47
- [88] S. Tang, B.A. Conway. Optimization of low-thrust interplanetary trajectories using collocation and nonlinear programming[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1995, **18**(3):599–604
- [89] Y. Shi, R. Nelson, D. Young, P. Gill, W. Murray, M. Saunders. The Application of Nonlinear Programming and Collocation to Optimal Aeroassisted Orbital Transfer Trajectory[C]. *Proceedings of the AIAA 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. 92–0734
- [90] Y. Chen, D. Sheu. Parametric Optimization Analysis for Minimum-Fuel Low-Thrust Coplanar Orbit Transfer[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 2006, **29**(6):1446–1450
- [91] M.R. Sentinella, L. Casalino. Genetic algorithm and indirect method coupling for low-thrust trajectory optimization[C]. *42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit 9 - 12 July 2006, Sacramento, California*. 2006, AIAA 2006–4468
- [92] J. Igarashi, D.B. Spencer. Optimal continuous thrust orbit transfer using evolutionary algorithms[J]. *Journal OF Guidance, Control, and Dynamics*. 2005, **28**:547
- [93] SH Pourtakdoust, MA Jalali. Thrust-limited optimal three-dimensional spacecraft trajectories[J]. *International Journal of Engineering*. 2001, **14**(1):81–90
- [94] C.L. Ranieri, C.A. Ocampo. Indirect Optimization of Two-Dimensional Finite Burning Interplanetary Transfers Including Spiral Dynamics[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 2008, **31**(3):720–728
- [95] Brian Roger Jamison, Victoria Coverstone. Analytical Study of the Primer Vector and Orbit Transfer Switching Function[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2010, **33**(1):235–245
- [96] A.L. Herman, B.A. Conway. Optimal, Low-Thrust, Earth–Moon Orbit Transfer[J]. *JOURNAL OF GUIDANCE, CONTROL, AND DYNAMICS*. 1998, **21**(1):141–147
- [97] Y. Gao, CA Kluever. Low-thrust interplanetary orbit transfers using hybrid trajectory optimization method with multiple shooting[C]. *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit 16 - 19 August 2004, Providence, Rhode Island*. 2004, AIAA–2004–5088
- [98] S.Y. Park, K.H. Choi. Optimal Low-Thrust Intercept/Rendezvous Trajectories to Earth-Crossing Objects[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2005, **28**(5):1049–1055
- [99] D.C. WOFFINDEN, D.K. GELLER. Optimal Orbital Rendezvous Maneuvering for Angles-Only Navigation[J]. *Journal of guidance, control, and dynamics*. 2009, **32**(4):1382–1387

- [100] R. Sharma, P. Sengupta, S.R. Vadali. Near-optimal feedback rendezvous in elliptic orbits accounting for nonlinear differential gravity[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 2007, **30**(6):1803–1813
- [101] Y.Z. Luo, G.J. Tang, H. Li. Optimization of multiple-impulse minimum-time rendezvous with impulse constraints using a hybrid genetic algorithm[J]. *Aerospace Science and Technology*. 2006, **10**(6):534–540
- [102] Y.Z. Luo, G.J. Tang. Rendezvous phasing special-point maneuvers mixed discrete-continuous optimization using simulated annealing[J]. *Aerospace Science and Technology*. 2006, **10**(7):652–658
- [103] Y. Luo, G. Tang. Spacecraft optimal rendezvous controller design using simulated annealing[J]. *Aerospace Science and Technology*. 2005, **9**(8):732–737
- [104] C. Tong, X. Shijie, W. Songxia. Relative Motion Control for Autonomous Rendezvous Based on Classical Orbit Element Differences[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 2007, **30**(4):1003
- [105] Jean Albert Kechichian. Minimum-Time Low-Thrust Rendezvous and Transfer Using Epoch Mean Longitude Formulation[J]. *Journal OF Guidance, Control, AND Dynamics*. 1999, **22**(3):421–432
- [106] G. Mengali, A.A. Quarta. Fuel-optimal, power-limited rendezvous with variable thruster efficiency[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2005, **28**(6):1194–1199
- [107] J.B. Caillau, J. Gergaud, J. Noailles. Tfmin: Short reference manual[J]. *Optimization Online Digest*. 2002, **7**(511):2002
- [108] J.B. Caillau, J. Gergaud, J. Noailles. TfMin Short reference manual. Rapport de recherche RT[R]. Tech. rep., Enseint-Irit,Umr,Cnrs 5505, France, 2001
- [109] J.B. Thevenet, R. Epenoy. Minimum-Fuel Deployment for Spacecraft Formations via Optimal Control[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 2008, **31**(1):101–113
- [110] 耿长福. 航天器动力学[M]. 中国科学技术出版社, 2001
- [111] G.R. Hintz. Survey of Orbit Element Sets[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 2008, **31**(3):785
- [112] J. Gergaud, T. Haberkorn. Orbital transfer: Some links between the low-thrust and the impulse cases[J]. *Acta Astronautica*. 2007, **60**(8-9):649–657
- [113] J.B. Caillau, J. Gergaud, J. Noailles. Minimum time control of the Kepler equation[J]. *Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory*. 2004:89–92

- 
- [114] Y. Chitour, F. Jean, E. Trélat. Singular trajectories of control-affine systems[J]. *SIAM J Control Optim.* 2008, **47**(2):1078–1095
- [115] J.B. Caillau, J. Noailles. Sensitivity analysis for time optimal orbit transfer[J]. *Optimization.* 2001, **49**(4):327–350
- [116] A. Bombrun, J.B. Pomet. Asymptotic behavior of time optimal orbital transfer for low thrust 2-body control system[J]. *Discrete and continuous dynamical systems.* 2007, (supplement):122–129
- [117] J.A. Kechichian. Minimum-Time Constant Acceleration Orbit Transfer with First-Order Oblateness Effect[J]. *Journal OF Guidance, Control, AND Dynamics.* 2000, **23**(4):595–603
- [118] B. Bonnard, J.B. Caillau. Riemannian metric of the averaged energy minimization problem in orbital transfer with low thrust[J]. *Annales de l’Institut Henri Poincare/Analyse non lineaire.* 2007, **24**(3):395–411
- [119] B. Bonnard, J.B. Caillau, R. Dujol. Averaging and optimal control of elliptic Keplerian orbits with low propulsion[J]. *Systems & Control Letters.* 2006, **55**(9):755–760
- [120] M. Popescu. Control of affine nonlinear systems with nilpotent structure in singular problems[J]. *Journal of Optimization Theory and applications.* 2005, **124**(2):455–466
- [121] JJ More, BS Garbow, KE Hillstrom. User guide for MINPACK-1[Z], 1980
- [122] MJ Matney, P. Anz-Meador, JL Foster. Covariance correlations in collision avoidance probability calculations[J]. *Advances in Space Research.* 2004, **34**(5):1109–1114
- [123] U.S. Satellite Destroyed in Space Collision,<http://www.space.com/news/090211-satellite-collision.html>[Z]
- [124] Klinkrad H Sanchez-Ortiz N, Bello-Mora M. Collision avoidance maneuvers during spacecraft mission lifetime: Risk reduction and required  $\Delta V$ [J]. *Advances in Space Research.* 2006, **38**:2107–2116
- [125] P.E. Rutquist, M.M. Edvall. Propt-matlab optimal control software[J]. Tomlab Optimization Inc. 2009, **260**
- [126] P. Gurfil. Nonlinear feedback control of low-thrust orbital transfer in a central gravitational field[J]. *Acta Astronautica.* 2007, **60**(8-9):631–648



## 附录 A 符号与常数示例

## 符号示例

$a$	椭圆轨道半长轴
$e$	偏心率
$i$	轨道倾角
$\Omega$	升交点赤经
$\omega$	近地点幅角
$\theta$	真近地点角
$P$	半通径
$L$	累积赤经
$M$	平近地点角
$E$	偏近地点角
$m$	航天器质量, 单位为kg
$r$	惯性坐标系下位置矢量, 其幅值为 $r$
$v$	惯性坐标系下速度矢量, 其幅值为 $v$
$T_{\max}$	常值发动机最大推力幅值
Mm	长度单位, $1\text{Mm} = 1 * 10^6\text{m}$

## 运算符号

$\ \cdot\ $	欧式空间范数
$ \cdot $	绝对值
$[\cdot, \cdot]$	李括号
$\{\cdot, \cdot\}$	泊松括号

## 物理常数

$\mu$	地球引力常数, $\mu = 398600.44\text{km}^3/\text{s}^2 = 5165.8620912\text{Mm}^3/\text{h}^2$
$\beta$	与发动机比冲 $I_{sp}$ 相关, $\beta = 1/(I_{sp}g_0)$ , 取 $I_{sp} = 2000\text{s}$ , 则 $\beta = 1.42 * 10^{-2} \text{h/Mm}$
$R_e$	理想地球半径, $R_e = 6.378 * 10^3\text{Km}$



## 附录 B 极大值原理

### 轨迹优化问题的一般描述

考虑一般轨迹优化问题，可以描述为：寻找最优控制变量，最小化一般性性能指标：

$$J = K(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt$$

其中状态变量  $x(t_f) \in \mathbb{R}^n$ ，初始时刻  $t_0$  和终端时刻  $t_f$  固定或自由) 满足系统方程约束

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), t \in [t_0, t_f]$$

边界条件

$$g(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) = 0$$

以及等式或不等式约束

$$C(t, x(t), u(t)) \leq 0$$

同时控制满足容许控制集合

$$u \in U \subset \mathbb{R}^m, U = \{u \in \mathbb{R}^m : u_L^i \leq u^i \leq u_R^i\}$$

### 极大值原理 [76]

给定时变最优控制问题  $f(x, u, t)$ ,  $L(x, u, t)$ ,  $g(x(t_f), t_f)$ ,  $K(x(t_f), t_f)$ 。在这里先只考虑初始条件给定，终端约束  $g(x(t_f), t_f)$  变化，且不考虑状态约束。设

- (1)  $f(x, u, t)$ ,  $L(x, u, t)$ ,  $g(x, t)$ ,  $K(x, t)$  关于其变元是连续可微的；
- (2)  $f(x, u, t)$ ,  $\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial L(x, u, t)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial L(x, u, t)}{\partial t}$  都是有界的。

记Hamiltonian函数为

$$H = -L(x, u, t) + p^T f(x, u, t) \quad (\text{B.1})$$

如果  $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $U$  为有界闭集且  $(u^*(t), x^*(t))$  是最优解，则一定存在矢量函数  $p(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^p$  使得  $[x^*(t), u^*(t), p(t), \mu]$  满足

(I) 状态方程

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t)$$

(II) 协状态方程

$$\dot{p}^T(t) = -\frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), p, t)}{\partial x}$$

(III) 边值条件

$$x^*(t_0) = x_0 \quad (\text{B.2a})$$

$$p^T(t_f) = -\frac{\partial K(x^*(t_f), t_f)}{\partial x} - \mu^T \frac{\partial g(x^*(t_f), t_f)}{\partial x} \quad (\text{B.2b})$$

(IV) 对 $u^*(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上的一切连续时刻 $t$ 皆有

$$H(x^*(t), u^*(t), p, t) = \max_{u \in U} H(x^*(t), u(t), p, t) \quad (\text{B.3})$$

(V) Hamiltonian函数沿最优解具有性质

$$H(x^*(t), u^*(t), p(t), t) = H(x^*(t_f), u^*(t_f), p(t_f), t_f) + \int_{t_f}^t \frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), p(t), t)}{\partial t} dt$$

当终端时刻自由时有

$$H(x^*(t_f), u^*(t_f), p(t_f), t_f) = \frac{\partial K(x^*(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \mu^T \frac{\partial g(x^*(t_f), t_f)}{\partial t_f} \quad (\text{B.4})$$

当终端时刻固定时，上式无明确解析表达式。

上述极大值原理是苏联人庞特李亚金发展的，在欧美国家，平行发展起来的理论称之为极小值原理。极小值原理与极大值原理的主要区别在于hamiltonian函数B.1和B.3在极小值原理中分别为

$$H = L(x, u, t) + p^T f(x, u, t) \quad (\text{B.5})$$

$$H(x^*(t), u^*(t), p, t) = \min_{u \in U} H(x^*(t), u(t), p, t) \quad (\text{B.6})$$

而公式B.2b和B.4则相差一个符号

$$p^T(t_f) = \frac{\partial K(x^*(t_f), t_f)}{\partial x} + \mu^T \frac{\partial g(x^*(t_f), t_f)}{\partial x} \quad (\text{B.7})$$

$$H(x^*(t_f), u^*(t_f), p(t_f), t_f) = -\frac{\partial K(x^*(t_f), t_f)}{\partial t_f} - \mu^T \frac{\partial g(x^*(t_f), t_f)}{\partial t_f} \quad (\text{B.8})$$

## 附录 C 两点边值问题与打靶法

## 两点边值问题(Two-point Boundary-value Problem)

给定常微分方程组

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x(t)) \\ a \leq t \leq b, f &\in R^n, n \geq 2 \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

若求解时在区间 $[ab]$ 的两个端点给出 $n$ 个定解条件

$$\varphi(x(a), x(b)) = 0 \quad (\text{C.2})$$

则称(C.1,C.2)描述的为非线性两点边值问题。

当 $f$ 是 $x$ 的线性函数,且 $\varphi$ 为 $x(a), x(b)$ 的线性函数时可表示为

$$\begin{aligned} Lx(t) &= \dot{x}(t) - A(t)x(t) = f(t), a \leq t \leq b \\ Rx(t) &= B_a x(a) + B_b x(b) = \beta \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

则称C.3为线性边值问题。若定解条件在 $[a, b]$ 上的多个点给出,即:

$$\varphi(x(t_1), x(t_2) \cdots, x(t_s)) = 0, a \leq t_i \leq b, 3 \leq s \leq n$$

则称为多点边值问题。

对初值问题求解,只要方程C.1的右端函数 $f$ 满足光滑性条件就能保证解的存在唯一性。而对边值(C.1,C.2),情况就复杂的多,有可能有解也可能无解,可能有唯一解也可能有无穷多解。而且边界条件微小变化都可能引起解的本质变化。边值问题的解的稳定性不易保证。

根据附录B极大值原理,求解最优控制问题的一般解析方法步骤,由

$$\min_{u(t) \in U} H(t, x(t), u(t), \lambda(t))$$

得到最优控制

$$u^*(t) = u(x, \lambda, t)$$

代入状态方程和协态方程中，得到

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u^*(t)) \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)} \end{cases}$$

可将上式化为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, p) \\ \dot{\lambda} = g(t, x, p) \\ x(t_0) = x_0, p(t_f) = p_f \end{cases}$$

这个问题就是两点边值问题。若在初始时刻和终端时刻，状态变量和协态变量都只部分给定时，这类问题即为通常考虑的两点边值问题。

## 打靶法(Shooting Method)

两点边值问题求解的常用方法是打靶法。打靶法的基本思想是，对边值问题(C.1,C.2)，求解时可将其转化为相应的初值问题

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= f(t, z(t)) \quad a \leq t \leq b \\ z(t_0) &= y \quad a \leq t_0 \leq b \end{aligned} \tag{C.4}$$

初值问题C.4的解为 $z = z(t; t_0, y)$ 依赖于初始条件 $y$ 的选取，若其满足方程

$$F(y) \equiv \varphi(z(a; t_0, y), z(b; t_0, y)) = 0 \quad F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \tag{C.5}$$

则 $x(t) = z(t; t_0, y)$ 就是边值问题(C.1,C.2)的解。因此，边值问题(C.1,C.2)的解，等价于初值问题C.4和非线性方程组C.5的解。求解边值问题的打靶法实质上就是通过某种迭代方法求方程组C.5的解，而计算每个 $F(y)$ 的值都要解初值问题C.4，初始条件中的 $y$ 称为打靶点。

求解边值问题(C.1,C.2)的打靶法包含两部分，一是用稳定好、精度高的数值方法求解初值问题C.4；二是选择求解非线性方程组C.5的迭代方法。其简单流程示意如图C.1

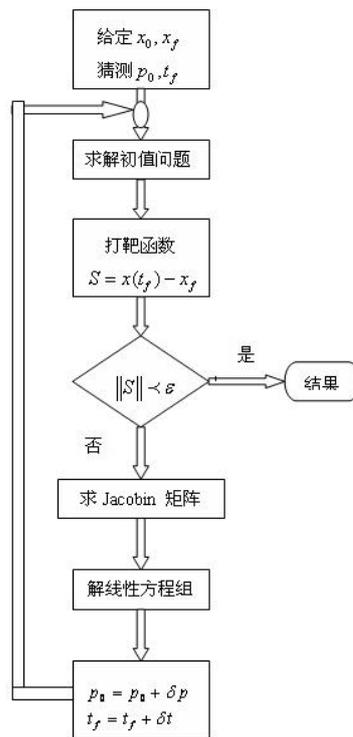


图 C.1 打靶法简单流程示意



## 个人简历、在学期间的研究成果

### 个人简历

1977年10月28日出生于河南信阳；1996年9月携笔从戎，考入解放军第二炮兵工程学院机电工程系电力系统及其自动化专业学习，2000年7月本科毕业并获得工学学士学位；毕业后被分配至河南洛阳部队服役，现为第二炮兵某部少校正营职助理员；2004年9月考入北京大学力学与工程科学系控制理论与控制工程专业攻读硕士学位；2007年9月转为北京大学工学院力学与空天技术系力学系统与控制专业攻读工学博士学位至今。

### 发表论文

- [1] Yue xincheng, Yang ying and Geng zhiyong, Indirect optimization for finite-thrust Time-optimal Orbital Maneuver, AIAA Journal of Guidance, control and Dynamics, Vol. 33, No. 2, pp628-634, March - April 2010 (SCI).
- [2] Yue xincheng, Yang ying and Geng zhiyong, Near-optimal Cumulative Longitude Low-Thrust Orbit Transfer, Journal of Systems Engineering and Electronics, Vol. 20, No. 6, pp.1276-1282, 2009(SCI/EI).
- [3] Yue xincheng, Yang ying and Geng zhiyong, Continuous Low-thrust Time-optimal Orbital Maneuver, Proceedings of the 48th CDC/28th CCC Conference, shanghai, December 16-18, pp1457-1462, 2009 (EI/ISTP)
- [4] 岳新成、杨莹、耿志勇, 连续推力下能量、燃料轨道转移最优控制, 南京航空航天大学学报, Vol.41, No.6, pp715-719, 2009(EI)
- [5] 岳新成, 耿志勇, 连续推力最优轨道规避, 科技导报, Vol.27, No.19, pp19-23, 2009年
- [6] 岳新成, 杨莹, 耿志勇, 基于二步线性化的3-DOF实验室直升机模型跟踪控制, 系统工程与电子技术, Vol.30, No.4, p 705-709, 2008 (EI)
- [7] Xincheng Yue, Ying Yang, Zhisheng Duan, Zhiyong Geng. Parameter-dependent Lyapunov Function Method Applied to Satellite Formation keeping Control. Proceedings of the 27th Chinese Control Conference, pp761-765, 2008(EI/ISTP)
- [8] 岳新成, 杨莹, 耿志勇, 三自由直升机模型的无静差跟踪控制, 系统仿真

学报, 19(18), 4279-4283, 2007(EI)

- [9] Xincheng Yue ,Ying Yang, Trajectory Tracking of a 3-DOF Helicopter System via Integral Control, Proceedings of the 4th International Conference on Impulsive and Hybrid Dynamical Systems, (2007)1396-1401

### 在学期间获得奖励

- [1] 三好学生, 北京市, 2009年12月
- [2] 三好学生标兵, 北京大学, 2009年12月
- [3] 方瑞贤奖学金, 北京大学, 2009年12月
- [4] 三好学生, 北京市, 2009年02月
- [5] 三好学生标兵, 北京大学, 2008年12月
- [6] 苏州工业园区奖学金, 北京大学, 2008年12月
- [7] 奥运会优秀校园安保志愿者, 北京大学, 2008年10月
- [8] 优秀共产党员, 北京大学工学院, 2008年06月

## 致 谢

衷心感谢我的导师黄琳院士、杨莹副教授和耿志勇教授。2004年9月，在工作四年之后，我从八百里伏牛山深处一个偏远的县城北上京城求学，人生从此掀开了新的一页，满怀憧憬又惴惴不安。幸运的是，在北大求学的六年，我遇到了真心关心、帮助我成长的恩师，我将永远感谢他们这几年对我的教育、培养和帮助。黄老师是一位精神矍铄、睿智仁慈的长者，虽年已古稀，仍活跃在科学研究第一线，思维敏锐，高瞻远瞩。每每聆听教诲，随意一点点拨，顿有茅塞顿开之感。随着接触的机会增多，我更是被他老一辈科学家渊博的理论知识、求实创新的治学态度以及对科学的热爱所感动。

杨莹副教授是我的硕士导师和博士副导师，在硕士阶段，在她的指导下，我对实验室直升机模型开展了实验研究。杨老师心地善良，满怀仁爱，对我的学习和生活都给予了莫大的关心和帮助。我也深深被她科学勤奋严谨、不懈追求的精神所感动。

耿志勇教授是我在北大认识的第一位老师，当时他是我们的班主任老师，在入学之初，对我们关于学习、生活上的很多问题给予耐心说明和帮助。他代替杨莹老师将我招至门下，我开始了真正意义上的研究生生涯，我的博士论文也得到他的悉心指导；这几年，他对我的工作、生活和家庭也给予了极大地关心和帮助。耿老师为人正直、刚正不阿，他对科学研究的严谨、细致、求真务实的态度，也必将对我在未来的道路上产生深远影响。耿老师虽表面看起来有点严谨，但是实际上非常平易近人。平时生活中，也不乏幽默之语，如对理论研究的针对性，他要求我们“宁做杀鸡刀，不做屠龙刀”，因为现实生活中根本无龙可屠；对待研究问题的方法，他教育我们“不要拿着锤子，满世界的去找钉子”，问题永远比方法重要；如此真知卓见，不一枚举，每每受听，受用终身。

在读博士期间，还得到了课题组其他老师的悉心指导。段志生教授指导我完成了一篇关于应用参数相依方法研究编队问题的论文，王金枝教授也给予我很多鼓励和帮助。在实验室组织的学术活动中，杨剑影教授、刘才山教授、黄迅副教授等老师们活跃的学术思想也给了我很多有益的启示。

感谢北京大学工学院航空航天动力学与控制实验室和工学院07级博士生班的所有同学，不一一具名。这几年，与他们在一起学习和工作，朝夕相处，交

流思想，互帮互助，结下了深厚的友谊。会永远牢记他们对我的帮助和支持。

感谢工学院的行政岗位的老师，特别是党委邹惠副书记、团委陈征微书记、教务张清平老师、财务办杨洁梅老师、富老师、综合办刘强老师，在北大的几年学习和生活，他们都给予我很多的关心和帮助，再次感谢。

也要感谢所在单位的各级领导和同事，特别是老领导杨传松大校、卢凤林大校、黄轶大校和韩建国上校，在外求学这几年，他们给予我很多鼓励、支持和帮助。

感谢父母的养育之恩，他们含辛茹苦的将我养大成人，支持我学习深造，不断鼓励我取得好的成绩。也要感谢我的两个双胞胎妹妹和妹夫，他们一直在后边默默奉献着，悉心照料双亲，免除了我的后顾之忧。

感谢科技导报社博士生创新计划对论文的研究给予的部分资助。

感谢所有曾给予我鼓励和帮助的朋友们。

# 北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

## 原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名： 日期： 年 月 日

## 学位论文使用授权说明

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：  
按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；  
学校有权保留学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务；  
学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；  
在不以赢利为目的的前提下，学校可以公布论文的部分或全部内容。  
(保密的论文在解密后应遵守此规定)

论文作者签名： 导师签名：

日期： 年 月 日

