



北京大学

## 博士研究生学位论文

题目： 多力学系统镇定与协调控制

姓 名 :	吴 凡
学 号 :	10786827
院 系 :	工学院
专 业 :	力学(力学系统与amp;控制)
研究方向 :	非线性与鲁棒控制
导师姓名 :	耿志勇 教授

二〇一一年六月



# 版权声明

任何收存和保管本论文各种版本的单位和个人，未经本论文作者同意，不得将本论文转借他人，亦不得随意复制、抄录、拍照或以其他方式传播。否则，引起有碍作者著作权之问题，将可能承担法律责任。



## 摘 要

近年来, 针对非线性系统的控制律设计理念逐步从抵消、抑制非线性, 向尊重、利用非线性在系统演化中的作用过渡。这种趋势在力学系统的控制中尤为明显。一方面, 许多力学系统具有的强非线性与特定约束使得抵消、抑制手段难以实施; 另一方面, 力学系统具有明确物理结构性质, 利用这些结构性质在系统演化中的建设作用, 可以辅助控制律设计。本文针对多个力学系统, 利用力学结构性质设计协调运动镇定律与协调运动规划算法。研究成果如下:

1. 根据协调定义, 将多力学系统协调等价于各力学系统间相对构形满足一定条件下系统本体速度的同步问题。利用力学系统所具有的对称性, 进一步将多力学系统满足相对构形约束下的本体速度同步问题转化为多力学系统的相对平衡点镇定问题。

2. 将能量整形思想从镇定单个力学系统推广到多力学系统相对平衡点的镇定。以镇定方式控制多个力学系统间的相对构形满足协调等价定义中的约束条件, 稳定地实现具有相对平衡点形式的协调运动。针对李群上多个简单力学系统, 给出能量可整形条件, 能量整形控制律, 以及用于分析协调运动(相对平衡点)稳定性的李亚普诺夫函数。

3. 将动力学量化组合思想推广到多力学系统的协调运动规划。利用力学系统的对称性, 量化出两类初等运动: 协调平航运动, 机动(两协调平航轨迹之间的有限时间状态转移); 推导组合“平航+机动+平航+...+平航”的状态轨迹, 表明其具有正向运动学形式, 原动力学规划问题可转化为构形空间上的运动学规划问题。这种转化不作任何近似, 能精确获取原动力学的状态轨迹。

4. 将所推广的能量整形镇定, 协调运动规划应用到多个具有不稳定运动模态的水下航行器。分别在全驱动、欠驱动(内置滑块驱动)情形下实现了多航行器的协调镇定。与现有基于一致性思想的协调控制方法相比, 利用系统结构性质, 不作任何线性化, 不依赖构形局部参数化是本文协调镇定律的特色。针对多个全驱动航行器, 设计了机动, 稳定地执行了协调运动规划“平航+机动+平航”。规划轨迹的闭环执行是与现有运动规划算法的区别。

最后总结全文工作, 并给出后续研究方向。

**关键词:** 多力学系统, 协调控制, 镇定, 协调运动规划, 相对平衡点, 能量整形, 水下航行器, 欠驱动



---

# Stabilization and Coordinating Control of Multiple Mechanical Systems

Fan Wu (Mechanics (Dynamics and Control))

Directed by Professor ZhiYong Geng

In recently years, there has been an increasing predominance of control techniques for nonlinear systems that respect, and effectively exploit the nonlinear structure of the system over imposing some predetermined dynamic behavior through nonlinearity cancelation or domination. This tendency is especially evident in mechanical control systems. One reason is that the strong nonlinearity and special constraints of many mechanical systems made it difficult or impossible imposing nonlinearity cancelation or domination. Another reason is that the physical structure of many mechanical systems can be exploited to assist the control design. This dissertation addresses the stabilization and coordinated motion planning issues for multiple mechanical systems, in a way that respects and exploits the mechanical nature of the system. The main results are as follows:

1. By definition, coordination is shown to be equivalent to the consensus of body velocity of each mechanical system under a constraint on relative configurations. Using the symmetry property of mechanical systems, the equivalent constrained consensus problem can be further transformed to a stabilization problem of relative equilibria of multiple mechanical systems.

2. Extend the energy shaping idea to stabilizing relative equilibria of multiple mechanical systems. The relative configurations are stabilized to satisfy the constraint condition of coordination, and the consensus of body velocities is achieved, thus a coordination denoted as a relative equilibrium is stabilized. For multiple mechanical systems on a Lie group, the feasible conditions for energy shaping, the corresponding control law, and the Lyapunov function for analyzing the stability of the relative equilibrium (coordination) are given.

3. Extend the dynamic quantization and combination idea to the coordinated motion planning problem of multiple mechanical systems. By quantizing two motion primitives: coordinated trimming and maneuver (a finite time transition between two trimming trajectories), a motion plan is denoted as a combination “trim+maneuver+trim+...+trim”, and its trajectory is shown to has the structure of a

forward kinematic map. The original motion planning problem can be transformed to a kinematic planning problem in the configuration space. This transformation involves no approximation and the state trajectories of original dynamics can be exactly computed from the kinematic map.

4. Apply the extended stabilizing and coordinated motion planning method to stably coordinating multiple underwater vehicles, each of which has unstable dynamics. For stabilizing, both the fully-actuated case and under-actuated case are considered. Compared with recent coordinating control works based on consensus idea where the individual system dynamics are assumed to be single/double integrators, the proposed method exploits the system's mechanical structure, avoids linearization, and is independent of configuration parameterizations. For motion planning, by designing a stable maneuver, a motion plan "trim+maneuver+trim" is stably executed. The proposed planning method distinguishes itself from other motion planning methods as the resulted plan is executed in a close-loop manner.

This paper concludes with a summary of the results and with a note on several directions in which above results can be extended.

**Key Words:** multiple mechanical systems, coordinating control, stabilization, coordinated motion planning, relative equilibrium, energy shaping, underwater vehicle, under actuation

## 目 录

摘 要.....	I
ABSTRACT (英文摘要) .....	III
第一章 绪 论.....	1
1.1 多力学系统协调控制的研究背景.....	1
1.2 多力学系统协调控制的研究现状.....	3
1.3 本文的工作 .....	7
第二章 基础知识 .....	9
2.1 符号介绍.....	9
2.2 微分流形与李群 .....	10
2.2.1 微分流形介绍 .....	10
2.2.2 李群介绍.....	12
2.3 简单力学系统.....	17
2.4 李群上的简单力学系统 .....	20
2.5 对称性与相对平衡点.....	21
2.6 稳定性相关 .....	25
2.7 受控拉格朗日函数方法回顾 .....	27
第三章 多力学系统的协调控制.....	29
3.1 多力学系统协调控制的问题描述.....	29
3.2 基于能量整形思想的协调镇定 .....	32
3.3 利用初等运动的协调运动规划 .....	36
3.3.1 构造初等运动 .....	37
3.3.2 协调运动规划 .....	41
3.4 应用实例.....	45
3.4.1 数值仿真.....	51
第四章 多个水下航行器的镇定与协调运动规划 .....	57
4.1 水下航行器的动力学.....	57
4.1.1 全驱动模型.....	57

4.1.2 欠驱动模型.....	61
4.2 全驱动情形多航行器的协调平航镇定.....	64
4.2.1 数值仿真.....	68
4.3 欠驱动情形多航行器的协调平航镇定.....	72
4.3.1 数值仿真.....	78
4.4 全驱动情形多航行器的协调运动规划.....	82
4.4.1 数值仿真.....	86
结论.....	91
附录 A 附录.....	95
A.1 受控拉格朗日函数方法介绍.....	95
参考文献.....	101
个人简历、在学期间的研究成果.....	109
致谢.....	111

## 表格

2.1	变量与符号列表 . . . . .	9
3.1	本文所构造的初等运动, 以 $\star$ 表示 . . . . .	41
4.1	水下航行器的物理参数 . . . . .	69

## 插图

2.1	系统的对称群示意 . . . . .	22
3.1	运动规划示意图 . . . . .	42
3.2	运动规划有向图 . . . . .	44
3.3	双圆盘系统示意 . . . . .	45
3.4	系统状态及受控能量的变化 . . . . .	52
3.5	滑块处于非零平衡位置的平航运动镇定 . . . . .	53
3.6	两个平航运动间的机动：滑块位置的演化 . . . . .	54
3.7	两个平航运动间的机动：滑块速度的演化 . . . . .	54
3.8	两个平航运动间的机动：圆盘角速度的演化 . . . . .	55
4.1	水下航行器模型示意 . . . . .	58
4.2	水下航行器一个平航运动示意 . . . . .	61
4.3	内置滑块的水下航行器模型示意 . . . . .	61
4.4	惯性系中两航行器的相对平衡点镇定 . . . . .	70
4.5	相对姿态的动态变化 . . . . .	71
4.6	相对位置的动态变化 . . . . .	71
4.7	竖直平面上的内置滑块水下航行器 . . . . .	72
4.8	情形I：零俯仰角的协调运动 . . . . .	79
4.9	情形II：非零俯仰角的协调运动 . . . . .	81
4.10	情形I中的另一种收敛方式 . . . . .	81
4.11	情形II的另一种收敛方式 . . . . .	82
4.12	相对平衡点的镇定 . . . . .	88
4.13	运动规划I的执行 . . . . .	89
4.14	运动规划II执行中的交叉机动 . . . . .	90

## 第一章 绪 论

### 1.1 多力学系统协调控制的研究背景

近年来，多个力学系统间的协调控制成为研究热点，其动机来源于实际工程应用。在工程应用中，一群具有感知、通信、决策、运动能力的力学系统，如各类无人车辆、飞机，自主水面、水下运载工具，空间飞行器，卫星等，能更好地完成空间上分布的任务，如部署、搜寻、营救、监视、环境监测，探险考察等 [1]。

在地面，多个无人车辆通过信息交互，进行自主导航与协调，可以实现城市现代化中的智能交通，或大范围未知区域内的资源探索，甚至在战场上执行敌方区域内的伤员搜救任务 [2]。

在天空，多个无人机的编队飞行可以减少空气阻力（类似于鸟类群飞迁徙）对无人机的影响，降低能耗。多个无人机在敌对领空侦察时，通过协调控制，可以实现雷达迷惑，增加自身的生存概率；而无需像单个无人机为了躲避敌方雷达的侦测，需要依靠高空（降低了侦察效果）侦察，或外表涂吸收雷达的材料（昂贵） [3]。

在高空，多个热气球的进行探测工作时，协调控制目标是控制热气球间的相对位置，使得多个热气球在各种气流扰动下仍能在探测区域维持均匀分布 [4]。

在太空，多个带有探测器的卫星进行外太空探测时，协调控制目标是同步各卫星的运动，使得多个探测器的共同使用能大大提高探测精度，也降低了任务对单个卫星观测能力的要求 [5]。

在水下，由美国海军研究实验室和多所高校联合实施的AOSN（自适应海洋采样）、ASAP（自适应采样及预测）项目 [6] 展现了携带传感器的水下航行器网络的协调控制在采集数据、信息方面的作用。研究人员设计了队形可重构的航行器编队，每个航行器根据自身采集的数据，以及相邻航行器采集的数据，实时调节自身与相邻航行器的相对构形，使得整个编队能根据当前所处探测区域的信息源分布情况，实时改变队形，以降低采集数据中的噪声，获取最具价值信息。这些优势，是单个航行器所不具有的。

正如生物个体自发的组成群落寻求食物、资源、自身生存一样，人们通过

协调控制多个力学系统寻求信息、功能和效益的最大化 [7]。

力学系统是一类具有明确物理结构性质的非线性系统。在结构上，许多力学系统构形空间往往是一个非线性流形，而非一个平坦的欧氏空间；在动力学上，许多力学系统是一类带有漂移项的仿射输入非线性系统，所谓“漂移”，即控制输入为零时，系统未必静止。尤其当力学系统高速运动时，漂移项对其行为的影响更为显著。此外，力学系统常常存在特定的动力学、运动学约束，如非完整约束，完整约束等。在实际中，许多实际力学系统是欠驱动的，即控制输入空间的维数小于系统构形空间的维数。例如飞行器，地面车辆，水面/水下舰艇通常不安装横向驱动装置。此外，力学系统在与周围环境相互作用时还可能产生不稳定的运动，比如水下刚体的不稳定轴向平移。

力学系统的控制给传统控制理论带来了挑战。一、力学系统的强非线性，以及可能存在的非完整、欠驱动等约束常常导致力学系统在平衡状态附近的线性化模型不可控，从而局部线性化对应的线性系统综合方法和结论失去作用。而当力学系统的控制向量场满足一定的代数条件时，可以小时间局部可控 [8,9]。这正是这类非线性系统吸引大批学者研究的魅力所在，它提供了用较少控制通道对力学系统实施大范围控制的可能性。二、由于漂移项的存在，力学系统运动规划问题的控制输入要考虑漂移项对控制向量场的影响。运动规划问题往往要求在有限的时间内将系统从初始状态驱动到目标状态，并保持在目标状态或目标状态所在的某一子流形上。由于漂移项的存在，对于连续控制向量场而言，这通常意味着控制输入的能量为无穷大，从而难于实现。但力学系统的漂移项具有特定的结构性质，若考虑分段连续的反馈控制输入，使得控制向量场在不同的驱动模式之间切换，与漂移项有效配合，可以借助漂移项来实现运动规划。

协调控制多个力学系统则更具挑战性。协调控制同样涉及到力学系统的镇定，运动规划问题，此外还涉及到力学系统间的通信与避碰。协调控制首先要解决的问题就是通信拓扑的构建，即为了达到给定协调目标，力学系统间需要传递何种信息？谁传给谁？其次是在满足系统间安全避让的前提下，镇定单个力学系统，实现群体协调，这需要综合考虑协调目标以及个体动力学特性。最后要分析协调控制律的复杂度，确保控制律既能实现协调目标，又不会随力学系统的数量增加而失去实时性。

综上所述，对于多个力学系统的协调控制，存在如下值得探索的问题：能否利用力学系统的结构性质将协调目标转化为一个目标子流形的镇定问题？能

否利用力学系统的结构性质辅助镇定的实现？能否在控制输入受限情形下，利用漂移项实现力学系统的运动规划？能否在统一的力学结构分析框架下，综合多力学系统的协调与运动规划？

## 1.2 多力学系统协调控制的研究现状

当前大多数关于协调控制的研究主要集中在分析由简单节点构成的网络的动态行为。主要是提出一种理念，揭示群体的协调行为与个体运动以及个体间信息互联拓扑的内在联系 [10]。针对由多个质点模型（单/双积分器）构成的网络，文献 [11–17] 等把研究重点放在个体间的互联拓扑结构以及群体的协调行为上，利用图论工具将整个网络建模成有向图模型，设计了一系列基于一致性思想的协调控制算法，解决了趋同、入编、编队、主从运动等协调问题。

然而，将针对质点网络的一致性理念应用到多个力学系统的协调，就免为其难了。力学系统的构形空间不同于质点模型的欧氏空间，比如刚体在三维空间中的姿态同步，基于一致性思想的协调控制算法不具有全局收敛性 [18]。即便以质点网络的协调轨迹作为上层规划，多力学系统也很难在动力学层面上实现轨迹跟踪。因为上一节曾提到力学系统在平衡状态附近的线性化模型不能真实地反映原系统真实的动力学特性，而且会出现线性化模型不可控的情况。而反馈线性化的方法则对系统的控制输入提出了较高的要求，其不能广泛适用于各种力学系统的控制；即便可行，所得到的控制律一概抵消了原系统所有的非线性特性（比如漂移项引起的运动），往往造成控制代价过大，控制性能鲁棒性差的问题。

一些学者在研究卫星的姿态同步问题时 [19–21]，将卫星姿态局部参数化成欧拉角或姿态四元素，利用主从（leader-follower）模式，将姿态同步问题转化为从对主的轨迹跟踪问题，进而借助质点模型的协调控制算法实现姿态同步。这类工作存在两个主要缺陷：1. 卫星姿态的坐标表示不是唯一的，得到的协调控制存在奇异；2. 控制没有充分利用系统的姿态动力学特性，存在控制代价大，收敛域小等问题。

然而，如果充分认识并利用力学系统的结构性质在系统演化中的建设作用，可以使控制律设计得到简化，而控制性能却得到提高。由于力学系统的动态行为与其能量密切相关，能量整形（energy shaping）正是利用力学系统结构性质进行控制律设计的一种思想。能量整形考虑一类反馈，使得闭环系统仍具

有简单力学系统的结构形式，但重新塑造闭环系统的动能/势能，即动能/势能整形，使得期望的动态行为是闭环力学系统的一个稳定解。控制力/力矩实现整形能量与原始能量之间的改变。以镇定为例，一个最基本的要求就是闭环系统的能量函数在期望平衡点处取极值。

能量整形最早由Takegaki和Arimoto [22]提出，其思想是利用反馈重塑势能，用于机械臂的控制。这种思想的后续研究在哈密尔顿框架下得到发展，Van der Schaft [23] 利用辛几何研究了力学系统的能量整形，展示了如何利用力学系统的几何结构进行控制律设计。在拉格朗日框架下，Bloch等学者 [24] 利用黎曼几何研究了能量整形，利用系统的对称性，以及切丛上的速度分解，针对一类欠驱动简单力学系统设计了一种算法化的动能整形镇定律，将其命名为“受控拉格朗日函数（Controlled Lagrangians）方法”，简称CL法。在哈密尔顿框架下，Ortega等学者 [25,26] 设计了算法化的能量整形控制方法，将其命名为“互联及阻尼分配的无源化（IDA-PBC）控制”，并应用到电动马达，感应发电机，功率整流器，磁悬浮系统，电力系统的控制中 [27,28]。Chang [29,30] 从本质上证明了CL法与IDA-PBC法的等价性。

能量整形利用了力学系统的结构性质，比如构形（李群）结构、无源性、对称性、守恒量等。与传统控制方法相比，能量整形具有明确物理含义，易于实现，而不依赖于一些纯粹技术上，非自然的方法，如线性化、高增益控制。能量整形控制借助而非抵消、压制系统的非线性。从已有镇定简单力学系统的实例来看（从各类车—摆试验系统 [31,32] 到各类欠驱动水下航行器 [33,34]、卫星 [35,36]等实际系统），基于能量整形获得的稳定性较其他控制方法，如线性LQR、反馈线性化、高增益等，在系统相空间具有更大的收敛域。整形后闭环系统的能量函数，可以作为期望平衡点的李雅普诺夫函数，用于估计收敛域大小，并可进一步研究鲁棒稳定性。

现已有学者尝试以能量整形来解决多力学系统的协调问题，依据是能量的加和性，将多力学系统看成是一个能量为个体能量之和的力学系统。

Belta [37]首先采用动能整形研究了平面上移动式机器人编队的运动规划问题。文中构造了整个编队的动能度量，可由一个参数修改。该度量确定了一个路径优化指标。在该指标下，编队不但能实现最短路径规划，而且通过调节整形参数，还能实现队形变化。Hanßmann [38] 研究了刚体网络的协调运动，作者在网络中引入仅依赖于刚体间相对构形的人工势能，其在同步姿态及给定相对位置处取极值。由该势能耦合的网络是一个具有对称性的哈密尔顿系统，利

用对称性化简，作者证明了当个体动力学稳定时，网络动力学具有稳定的相对平衡点（体现为协调运动）。Nair [39,40]将该结果推广到个体含有不稳定动力学的情形，主要策略是利用动能整形镇定个体系统，同时配合人工势能实现协调，镇定了水下刚体群沿不稳定轴向的同步运动。

从物理上讲，由控制引入的人工势能，所起作用类似于在个体间施加了作用力与反作用力。这样，原先由通信互联的多个力学系统的动态行为变得与多体动力学相似，协调控制转化为针对多体动力学的控制，可以应用基于能量整形的控制方法。与之前提到的通过线性化实现卫星姿态同步的例子相比，能量整形控制不依赖于构形的局部参数化，避免了诸如姿态奇异性等问题的出现。再加上方法本身利用系统非线性的特点，能量整形控制往往代价不大，收敛域大，鲁棒性好。

利用能量整形思想设计协调控制另一个特点就是能够综合考虑个体动力学与协调。当个体动力学较为复杂，比如带有本征不稳定模态或欠驱动时，该特点尤显重要，文献 [41]充分体现这一点。文中研究了平面上的小车—倒立摆网络的同步问题。若独立考虑镇定与同步，则先镇定单个车—摆，再基于车的相对位置实现同步。但仿真表明，如此得到协调控制无法实现预期的稳定同步。当作者针对整个车—摆网络整形能量时，整形势能是同时依赖车的相对位置以及摆的相对角度的函数，配合动能整形，才能证明同步运动的稳定性。鉴于在许多工程应用中，如多个卫星的姿态同步，多个无人直升机、水下航行器的协调运动规划，个体动力学的稳定性至关重要，并与群体协调性存在很强的耦合，基于能量整形思想设计协调控制，是解决这类问题一种有效方法。

据已发表的文献，基于能量整形的协调控制设计主要集中在全驱动情形。对于欠驱动情形，目前只有文献 [41]。主要难点在于欠驱动对可整形势能的限制，进而直接影响到系统间相对构形的控制。虽然能量整形在镇定欠驱动力学系统中具有独特优势，但其可行性，以及可整形闭环能量函数的获取归结为关于闭环动能度量以及势能函数的偏微分方程组（匹配条件）的求解。求解匹配条件仍是一个尚未解决的开问题 [42]，需要利用力学系统自身的结构来求解。能否利用力学系统的结构性质，判断协调的可解性，构造能量整形控制律，目前还未见完备的解答，需要进行深入研究。目前，针对特定类的单个力学系统，已见到若干匹配条件的简化结果 [43–47]。而针对多个力学系统，如何根据协调目标得到、求解匹配条件，除了文献 [41] 考虑了特定一类力学系统（满足简单匹配条件）的同步运动问题外，还未见有相关研究成果。

本文将沿袭利用系统的结构性质简化匹配条件求解的思路，比如利用力学系统对称性将匹配偏微分方程组简化为常微分方程组或代数方程组 [43,48]，利用特定类力学系统的天然稳定性设计整形势能 [49,50]等，针对具体的多力学系统，以能量整形思想实现协调控制。

在力学系统的运动规划方面，当前的规划算法或基于可行性原则或基于最优性原则 [51]。可行性原则给出的规划没有经过优化往往不是一个好的方案，只是对于复杂系统难于求得一个好方案时而为之。最优性原则给出的规划在理论上无疑是最好的，但是这种最优性是假定模型能够精确刻画实际系统的前提下才成立的。当系统存在不确定性时，最优规划方案不具有鲁棒性。上一节曾提及，力学系统的漂移项对运动规划的影响不可忽略。最优规划往往不是利用漂移项的结构性质，而是受其限制，当力学系统带有控制输入约束，或动力学、运动学约束时，最优规划的求解会变得很复杂甚至不可行，而且付出的控制成本也比较高。因此，力学系统的运动规划需要利用系统自身的结构性质。

为了利用力学结构性质，Frazzoli [52]首先提出了基于动力学量化组合思想的运动规划方法，即为力学系统选取若干简单、易于控制的动态行为（量化），比如系统的匀速运动，通过合理拼接这些基本运动（组合），实现力学系统从初始状态到目标状态的运行。

Frazzoli利用力学系统的对称性，量化出两类初等运动：沿相对平衡点的匀速运动，以及相对平衡点之间的有限时间状态转移—受控机动。通过选择、组合两类初等运动，实现力学系统两状态之间的转移。论文 [52]研究了基于量化组合思想的运动规划的可控性，并应用于试验无人机的运动规划中，验证了算法的实时性。在之后的工作 [53,54]中，Frazzoli将该运动规划方法推广到具有对称性的一般非线性系统，论证了该规划方案的鲁棒性，并同样基于无人机开展了试验验证。后续工作 [55]提出了量化组合运动规划方法应用于多个力学系统协调运动的可行性，并作了扼要论述。Bhatta [56]针对内驱动的水下滑翔艇，通过镇定滑翔艇的若干稳态运动，并加以合理拼接，实现了给定路径的近似跟踪，其低能耗性适用于长期水下运动规划。

利用相对平衡点+机动的方式进行运动规划的关键技术是机动的设计。Frazzoli [52]是存储无人机的飞行数据，通过在线调用的方式实现机动。Bhatta [56]是通过镇定律的切换，近似实现机动（非有限时间内）。实际上，力学系统相对平衡点之间的有限时间状态转移仍是一个尚未解决的开问题 [57]。除了类似 [52]中的试验方法 [53,55,58]，以及基于最优控制的一些局部

结果之外 [59–62]，目前还未见到可行的设计方法用于实现相对平衡点之间的稳定、有限时间状态转移。

当前，针对多个力学系统的协调运动规划研究还不多见，尤其未见到明确利用力学系统结构性质进行协调运动规划。本文将动力学量化组合的思想推广到多力学系统的协调运动规划，主要是利用相对平衡点+机动的方式解决一类具有对称性的力学系统的协调运动规划问题。工作重点放在利用系统结构性质设计多力学系统的相对平衡点之间的机动。

总的说来，多个力学系统的协调控制给传统控制理论带来了挑战，而利用力学系统结构性质的思想，比如能量整形、动力学量化组合，则给力学系统的控制带来了一种新的理念，即学会尊重、认识、利用非线性在系统演化中的作用。本文沿用这种设计理念研究多力学系统的协调控制问题，以期获得较传统控制设计更为理想的控制效果。

### 1.3 本文的工作

根据多力学系统协调控制研究现状的综述，本文研究如下协调控制问题：

- 利用能量整形镇定多力学系统的协调运动；
- 利用动力学量化组合，以协调方式实现多力学系统在构形空间上两点之间的转移。

主要研究工作如下：

1. 定义多力学系统的协调为维持相对构形的运动。当各力学系统间相对构形满足一定条件时，多力学系统的协调可等价于系统本体速度的同步问题。利用力学系统所具有的对称性，进一步将多力学系统满足相对构形约束下的本体速度同步问题转化为多力学系统的相对平衡点镇定问题。

2. 将能量整形思想从单个力学系统的镇定推广到多力学系统相对平衡点的镇定。以镇定方式控制多个力学系统间的相对构形满足协调等价定义中的约束条件，稳定地实现具有相对平衡点形式的协调运动。针对李群上多个简单力学系统，给出能量可整形条件（匹配条件），相应的能量整形控制律，以及用于分析协调运动（相对平衡点）稳定性的李亚普诺夫函数。

3. 将动力学量化组合思想推广到多力学系统的协调运动规划。利用力学系统的对称性，量化出两类初等运动：

- i. 协调平航运动，即多力学系统沿相对平衡点的运动。体现为力学系统间保持相对构形，且每个力学系统沿自身相对平衡点运动；
- ii. 机动，即多力学系统在有限时间内从一个协调平航轨迹到另一个协调平航轨迹的状态转移。

本文推导了组合“平航+机动+平航+...+平航”的状态轨迹，表明其具有正向运动学形式，原动力学规划问题可转化为构形空间上的运动学规划问题。这种转化不作任何近似，能精确获取原动力学的状态轨迹。

4. 将所推广的能量整形镇定应用到多个全驱动，具有不稳定运动模态的水下航行器，以及多个欠驱动（内置滑块驱动），具有不稳定运动模态的水下航行器的协调镇定。与现有基于一致性思想的协调控制相比，本文镇定设计：

- 不作任何线性化，不依赖构形局部参数化，避免了控制局部性与奇异性；
- 利用力学系统的结构性质，镇定控制律具有明确物理含义，易于实现；
- 可以构造李亚普诺夫函数，证明协调运动的非线性稳定性。镇定收敛域大，具有鲁棒性。

5. 将所推广的协调运动规划应用到多个全驱动水下航行器，镇定了协调平航运动，设计了机动，稳定地执行了协调运动规划“平航+机动+平航”。与基于最优控制的运动规划方法相比，所设计规划方法：

- 以闭环方式执行，具有鲁棒性；
- 初等运动是航行器天然的运动，确保运动规划可行性；
- 初等运动数据的存储、调用方便，规划执行具有实时性。

本论文安排如下：第二章介绍必要的基础知识，并说明后续各章节将要用到的符号与变量。第三章对应研究工作介绍中的第1、2、3项，将能量整形思想，动力学量化组合思想推广至多力学系统的协调控制。并以一个欠驱动力学系统实例，应用所设计的协调控制方法。第四章对应研究工作介绍中第4、5项，针对多个水下全/欠驱动航行器，进行协调运动镇定，以及协调运动规划。第五章总结全文，并给出后续研究方向。

## 第二章 基础知识

本章为整篇论文提供必要的基础知识，并说明后续各章节将要用到的符号与变量。此部分内容在专著 [63] 中有更为详细的介绍。

### 2.1 符号介绍

本文中统一用斜体表示标量，黑斜体表示向量，黑直体表示矩阵。文中出现的所有向量，若不作特别说明，均为列向量。文中使用Einstein求和表示惯例，即表达式中出现相同指标意味着针对该指标求和，例如 $\alpha_i \beta^i := \sum_i \alpha_i \beta^i$ 。

表 2.1 解释本文所使用的变量与数学符号。

表 2.1 变量与符号列表

表示	含义
$t$	时间变量
$e_i$	$\mathbb{R}^3$ 空间的第 <i>i</i> 个基向量
$\delta_j^i$	$\delta$ 算子，当且仅当 <i>i</i> = <i>j</i> 时取1，否则取0
$CQ$	空间 <i>Q</i> 上所有连续函数
$C^n Q$	空间 <i>Q</i> 上所有 <i>n</i> 次可微函数
$C^\infty Q$	空间 <i>Q</i> 上所有光滑函数
$\mathbb{N}$	全体自然数
$\mathbb{R}^+$	非负实数，即 $[0, +\infty)$
$\mathbb{R}^n$	<i>n</i> 维实数空间
$\mathcal{U}^m$	<i>m</i> 维分段连续的函数空间
$[M_{ij}]$	第 <i>i</i> 行 <i>j</i> 列元素为 $M_{ij}$ 的矩阵
$[M^{ij}]$	$[M_{ij}]$ 的逆矩阵
$\mathbf{I}_n$	<i>n</i> 阶单位矩阵
$\mathbf{M}^T$	矩阵 $\mathbf{M}$ 的转置
$\det(\mathbf{R})$	矩阵 $\mathbf{R}$ 的行列式
$V_{,x}$	<i>V</i> 关于变量 <i>x</i> 的偏导数
$\text{grad}V$	函数 <i>V</i> 的梯度
$\text{Hess}\mathbf{M}$	矩阵 $\mathbf{M}$ 的二阶导数阵（海森矩阵）
$\text{diag}(\mathbf{x})$	以 $\mathbf{x}$ 为对角元素的对角矩阵
$\times$	三维向量间的叉积运算
$\cdot$	向量间的内积运算
const	常量
dim	维数
span	张成

## 2.2 微分流形与李群

### 2.2.1 微分流形介绍

本小节所作概述主要参考专著 [64] 的附录内容，以及专著 [63] 的第三章。一个力学系统的构形往往可由一个光滑流形上的一点描述。一个  $n$  维流形  $M$  是一个具有可数基的 Hausdorff 拓扑空间。直观上，该拓扑空间在局部与  $n$  维欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  相像。严格意义上， $M$  上任意一点的一个开邻域到  $\mathbb{R}^n$  的一个开邻域上存在一个同胚映射 (homeomorphism)，同胚映射系指一个可逆的连续映射，而且其逆映射也是连续的。记  $\phi$  是定义在  $M$  的一个开子集  $U$  上的同胚映射，称  $(\phi, U)$  是流形  $M$  的一个局部坐标卡 (coordinate chart)，并且把象点  $\phi(U)$  在  $\mathbb{R}^n$  中的坐标称为流形上点的局部坐标。记  $\psi$  是定义在  $M$  的另一个开子集  $V$  上的同胚映射，假设  $U$  与  $V$  有重叠，定义  $W = U \cap V$ 。如果映射  $\phi \circ \psi^{-1}$  是一个从  $\psi(W)$  到  $\phi(W)$  微分同胚 (系指具有光滑逆的光滑映射)，则称局部坐标卡  $(\phi, U)$  和  $(\psi, V)$  是  $C^\infty$  相容的 (related)。如果流形  $M$  能被一个  $C^\infty$  相容的坐标卡集合覆盖，那么称  $M$  为光滑流形，称这样的坐标卡集合为一个光滑图册 (atlas)。

记  $p$  为流形  $M$  上一点，所有经过  $p$  点且在  $p$  点相切的曲线构成一个等价曲线类，称该等价曲线类为  $p$  点处的一个切向量。所有在  $p$  点与  $M$  相切的向量构成一个向量空间，称为流形  $M$  在  $p$  点处的切空间，记为  $T_p M$ 。

一个切向量  $\mathbf{X}_p \in T_p M$  还可以从微分算子的角度来定义。记  $C^\infty(p)$  是定义在一点  $p \in M$  的邻域上光滑函数的集合。由所有满足莱布尼茨法则：

$$X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g), \quad f, g \in C^\infty(p)$$

的线性映射  $X_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$  构成的线性空间定义为切空间  $T_p M$ ，这样的线性映射  $X_p$  称为在  $p$  点处的一个导算子。在  $p$  点处的一个导算子确定了  $p$  点处唯一的切向量  $\mathbf{X}_p$ 。如果记流形  $M$  上点  $p$  的局部坐标为  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ，则切空间  $T_p M$  具有一组基  $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})|_p$ ，切向量  $\mathbf{X}_p$  可写为：

$$\mathbf{X}_p = X^i \frac{\partial}{\partial x_i} := X^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + X^n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

以下，本文将使用Einstein求和表示惯例。上述定义突出了切向量的算子作用。在局部坐标下，可以看出一个导算子对应一个方向导数，其方向正是导算子所确定的切向量。

切空间 $T_p M$ 的对偶空间称为余切空间，记作 $T_p^* M$ ，其中元素 $\omega_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ 是 $T_p M$ 上的线性泛函，因此 $\omega_p$ 将 $\mathbf{X}_p$ 映射为实数。通常将这种映射称为切空间与余切空间之间的自然偶对作用(natural pairing):

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p^* M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}.$$

余切空间的一组基为 $(dx^1, \dots, dx^n)$ ，其中基向量满足：

$$\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \delta_j^i, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

一个余切向量 $\omega_p$ 可以写为 $\omega_i dx^i$ 。

流形 $M$ 上所有点处切空间的不交并集构成了一个 $2n$ 维的流形 $TM$ ，称为 $M$ 的切丛；流形 $M$ 上所有点处余切空间的不交并集构成了一个 $2n$ 维的流形 $T^*M$ ，称为 $M$ 的余切丛。如果流形 $M$ 代表一个力学系统的构形空间，那么切丛 $TM$ 代表系统的速度空间，切丛上一点 $(p, \mathbf{X}_p)$ 代表一对构形/速度；余切丛 $T^*M$ 代表系统的动量空间，余切丛上一点 $(p, \omega_p)$ 代表一对构形/动量。

流形 $M$ 上的一个向量场 $\mathbf{X}$ 给每一点 $p \in M$ 分配了一个切向量 $\mathbf{X}_p$ 。如果这种分配方式是光滑的，即在局部坐标 $\mathbf{x}$ 下， $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = (\mathbf{X}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{X}_n(\mathbf{x}))^T$ 中每个元素是流形 $M$ 上的光滑函数，则称向量场 $\mathbf{X}$ 是光滑的。流形 $M$ 上的向量场可以用于描述流形上动态系统，设 $p(t) : \mathbb{R} \rightarrow M$ 是一动态系统在流形 $M$ 上的运动轨迹，其运动方程可由如下微分方程描述：

$$\dot{p}(t) = \mathbf{X}(p(t)), \quad (2.1)$$

其中 $\mathbf{X}$ 为 $M$ 上的向量场。称满足方程(2.1)的曲线 $p(t)$ 为向量场 $\mathbf{X}$ 的一条积分曲线，因此系统的所有运动轨迹都是向量场的积分曲线。以 $\epsilon$ 表示一正常数，在时间段 $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ 上向量场 $\mathbf{X}$ 的流(flow)定义为一组单参数映射 $\phi_t(\mathbf{x}) : M \rightarrow M$ ，其满足 $\phi(\mathbf{x})$ 是唯一一条在 $t = 0$ 时刻经过 $\mathbf{x}$ 的积分曲线。

流形 $M$ 上所有光滑向量场构成一个线性空间 $\mathfrak{X}(M)$ ，若赋予该线性空间一个

双线性、斜对称的二元运算，李括号：

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

其满足雅可比等式：

$$[[\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{w}] + [[\mathbf{w}, \mathbf{u}], \mathbf{v}] + [[\mathbf{v}, \mathbf{w}], \mathbf{u}] = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{X}(M).$$

则 $\mathfrak{X}(M)$ 成为一个李代数(Lie algebra)。

光滑分布(distribution)是将切空间的子空间以光滑的方式分配给流形 $M$ 上的每一个点。由一组光滑向量场 $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m\}$ 定义的分布是一个特例，该分布定义为：

$$\Delta = \text{span}_{C^\infty(M)}\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m\},$$

其中 $C^\infty(M)$ 是 $M$ 上所有的光滑函数的集合。该分布在任意一点 $p \in M$ 定义了切空间 $T_p M$ 的一个线性子空间：

$$\Delta_p = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{X}_1(p), \dots, \mathbf{X}_m(p)\} \subset T_p M.$$

类似地，光滑余分布是将余切空间的子空间光滑地分配给 $M$ 上每一点。由一组光滑余切向量场 $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ 定义的余分布是一个特例，该余分布定义为：

$$\Omega = \text{span}_{C^\infty(M)}\{\omega_1, \dots, \omega_m\}.$$

### 2.2.2 李群介绍

李群作为一类特殊的流形，具有丰富的结构性质，也是研究力学系统对称性的数学工具。

李群 $(G, \star)$ 是一个定义了群运算 $\star$ 的光滑流形，且群运算以及群逆运算都是光滑映射。本文专用 $G$ 表示李群，专用 $e$ 表示群 $G$ 中的单位元素。

给定群元素 $g \in G$ ，利用群运算可以定义 $g$ 对另一群元素 $h \in G$ 的左、右群

作用:

$$\begin{aligned} L_g &: G \rightarrow G; & h &\mapsto g \star h; \\ R_g &: G \rightarrow G; & h &\mapsto h \star g. \end{aligned}$$

如果对于所有的  $g \in G$  满足  $L_g = R_g$ , 则群  $G$  是可交换群, 称为Abelian群。群作用的结果, 即两个群元素在群运算下的结果体现了群的结构。以下为书写方便, 也用  $gh$  代表  $g \star h$ 。

在群作用的基础上可以进一步定义从群上一点的切空间到另一点切空间的切映射:

$$\begin{aligned} T_h L_g &: T_h G \rightarrow T_{gh} G; \\ T_h R_g &: T_h G \rightarrow T_{hg} G. \end{aligned}$$

上面两个映射分别称为左(右)群作用的切提升, 或简称为左(右)切映射。为了显式计算上述映射, 考虑李群  $G$  上的一条曲线  $g(t) : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow G$ , 满足  $g(0) = h$ , 因而有  $\dot{g}(0) \in T_h G$ , 以及:

$$\begin{aligned} T_h L_g(\dot{g}(0)) &= \frac{d}{dt} \left( L_g(g(t)) \right)_{t=0}, \\ T_h R_g(\dot{g}(0)) &= \frac{d}{dt} \left( R_g(g(t)) \right)_{t=0}. \end{aligned}$$

为了帮助理解, 可以考虑这样一类李群, 其元素可以表示为矩阵。那么, 左(右)群作用, 以及左(右)切映射都体现为矩阵的左(右)乘运算。

利用群的左(右)切映射可以比较李群  $G$  上不同点处切空间上的切向量。考虑这样一类向量场, 称李群  $G$  上的向量场  $\mathbf{X}$  在  $G$  作用下不变是指:

$$T_h L_g(\mathbf{X}(h)) = \mathbf{X}(L_g(h)), \quad \forall h \in G.$$

右不变向量场可以类似定义。给定李群  $G$  上的一个左(右)不变向量场, 则仅由任意一点处的向量, 利用左(右)切映射, 便可以完全描述该向量场。不失

一般性，在切空间 $T_e G$ 上任取一向量 $\xi$ ，定义 $G$ 上一个左不变向量场 $\mathbf{X}_\xi$ ，满足：

$$\mathbf{X}_\xi(g) = T_e L_g(\xi), \quad g \in G.$$

通过该方式可以定义李群 $G$ 上所有左不变向量场的集合，该集合是一个线性空间，记为 $\mathfrak{X}_L(G)$ ，可以看出其同构于 $T_e G$ 。

两个左不变向量场的李括号仍是一个左不变向量场，因此 $\mathfrak{X}_L(G)$ 是一个李代数。类似地， $G$ 上所有右不变向量场组成的线性空间也构成一个李代数 $\mathfrak{X}_R(G)$ 。利用向量场的李括号，可以诱导定义切空间 $T_e G$ 上的李括号如下：

$$[\xi, \eta] := [\mathbf{X}_\xi, \mathbf{X}_\eta](e), \quad \xi, \eta \in T_e G,$$

其中 $\mathbf{X}_\eta := T_e L_g(\eta)$ 。在 $T_e G$ 上定义了李括号后，称切空间 $T_e G$ 为李群 $G$ 的李代数，本文专用 $\mathfrak{g}$ 表示。

对于矩阵李群的李代数中的元素，同样表示为矩阵，李括号运算体现为：

$$[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi.$$

下面举例介绍本文将常用到的几个李群。

例:  $\mathbb{R}^3$ 上的旋转群，特殊正交群 $SO(3)$ ：

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T, \det(\mathbf{R}) = 1\}.$$

$SO(3)$ 描述了三维空间中刚体的姿态。 $SO(3)$ 中的单位元是单位矩阵 $\mathbf{I}_3$ 。考虑到 $SO(3)$ 的李代数是在单位矩阵处的切空间，将等式 $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3$ 两边微分：

$$\dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}})^T + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0},$$

其中 $\dot{\mathbf{R}}$ 表示关于时间求导。因此 $\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}$ 是斜对称的。限制在单位元上，可知 $SO(3)$ 的李代数为所有斜对称矩阵的集合：

$$so(3) = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}\}.$$

定义斜对称算子 $\hat{\cdot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow so(3)$ 为 $\hat{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ , 即:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{e}}_i x^i,$$

其中 $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ 为 $so(3)$ 的一组基。 $so(3)$ 中的元素可以表达为 $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , 称 $\mathbf{x}$ 为李代数元素 $\hat{\mathbf{x}}$ 的坐标向量。

记:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{e}}_i \omega^i \in so(3),$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)^T$ 为 $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 的坐标向量, 称 $\boldsymbol{\omega}$ 为刚体的本体角速度。由于 $SO(3)$ 是矩阵李群, 李代数 $so(3)$ 上的李括号运算为矩阵交换乘法运算:

$$[\hat{\boldsymbol{\omega}}_1, \hat{\boldsymbol{\omega}}_2] = \hat{\boldsymbol{\omega}}_1 \hat{\boldsymbol{\omega}}_2 - \hat{\boldsymbol{\omega}}_2 \hat{\boldsymbol{\omega}}_1.$$

因此, 赋予李括号的李代数 $so(3)$ 与赋予向量叉积的线性空间 $\mathbb{R}^3$ 之间是同构的。□

例:  $\mathbb{R}^3$ 空间上的刚性变换群 $SE(3)$ 定义为:

$$SE(3) = \{T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 | T(\mathbf{x}) = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{R} \in SO(3), \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3\}.$$

$SE(3)$ 中一个元素 $g$ 可以表示成 $4 \times 4$ 矩阵:

$$g = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

$SE(3)$ 的李代数记为 $se(3)$ 。 $se(3)$ 的一组基为:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_1 &= \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_4 &= \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{0}} & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_5 = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{0}} & \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_6 = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{0}} & \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$se(3)$ 中一个元素 $\widehat{\xi}$ 可以写成 $4 \times 4$ 矩阵形式:

$$\widehat{\xi} = \begin{pmatrix} \widehat{\omega} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} = \epsilon_i \xi^i,$$

其中 $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^6)^T$ 为 $\widehat{\xi}$ 的坐标向量,  $\widehat{\omega} \in so(3)$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ 。

李代数 $se(3)$ 上的李括号运算为矩阵交换乘法运算:

$$[\widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2] = \widehat{\xi}_1 \widehat{\xi}_2 - \widehat{\xi}_2 \widehat{\xi}_1.$$

李代数 $se(3)$ 通过同构映射 $\widehat{\xi} \mapsto (\omega^T, \mathbf{v}^T)^T$ 与线性空间 $\mathbb{R}^6$ 同构。  $\square$

例: 平面 $\mathbb{R}^2$ 上的刚体运动群 $SE(2)$ , 同构于 $S^1 \times \mathbb{R}^2$ , 其中 $S^1$ 是一维球面:

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}.$$

$SE(2)$ 中任一元素 $g$ 可以表示成一个 $3 \times 3$ 矩阵:

$$g = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\theta \in S^1$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 。 $SE(2)$ 的李代数为 $se(2)$ , 具有一组基:

$$\zeta_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \zeta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \zeta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$se(2)$ 中的一个元素 $\widehat{\xi}$ 可以写成矩阵形式:

$$\widehat{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & v_x \\ \omega & 0 & v_y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \zeta_i \xi^i,$$

其中  $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)^T = (\omega, v_x, v_y)^T$  为  $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$  的坐标向量。

李代数  $se(2)$  上的李括号运算为矩阵交换乘法运算：

$$[\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\xi}}_2] = \widehat{\boldsymbol{\xi}}_1 \widehat{\boldsymbol{\xi}}_2 - \widehat{\boldsymbol{\xi}}_2 \widehat{\boldsymbol{\xi}}_1.$$

李代数  $se(2)$  通过同构映射  $\widehat{\boldsymbol{\xi}} \mapsto (\omega, v_x, v_y)^T$  与线性空间  $\mathbb{R}^3$  同构。  $\square$

李代数上任一元素  $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$  通过左切映射在李群  $G$  上诱导出一个左不变向量场  $\mathbf{X}_\xi$ ，该向量场在  $G$  上产生向量场的流。因此，李代数  $\mathfrak{g}$  中的元素与李群  $G$  中的元素之间是存在联系的。

记  $\phi_\xi(t)$  是在  $t = 0$  时刻经过单位群元素  $e$  关于  $\mathbf{X}_\xi$  的积分曲线，定义指数映射  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ ，将  $\widehat{\boldsymbol{\xi}}t \in \mathfrak{g}$ ， $t \in \mathbb{R}$  映射成  $\phi_\xi(t) \in G$ 。因此，指数映射  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  是从  $\mathbf{0} \in \mathfrak{g}$  的一个邻域到  $e \in G$  的一个邻域的局部微分同胚。

对于矩阵李群，指数映射就是矩阵指数运算：

$$\exp \widehat{\boldsymbol{\xi}}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\widehat{\boldsymbol{\xi}}t)^n}{n!}.$$

前面考虑了李群对自身的作用。更一般的，李群  $G$  对流形  $M$  的左作用记为一个光滑映射  $\Psi : G \times M \rightarrow M$ ，其对于任何  $p \in M$ ，任何  $g, h \in G$  满足  $\Psi(e, p) = p$ ， $\Psi(g, \Psi(h, p)) = \Psi(L_g h, p)$ 。右作用可以类似定义。为书写方便，以下也用  $\Psi_g p$  表示  $\Psi(g, p)$ 。

若对所有非单位元群元素  $g \in G, g \neq e$  以及所有  $p \in M$ ，成立  $\Psi(g, p) \neq p$ ，则称群作用  $\Psi$  是自由的；若由群作用  $\Psi$  定义的映射  $(g, p) \mapsto (p, \Psi(g, p))$  是正则的，即该映射的逆将紧致子集映射成紧致子集，则称该群作用  $\Psi$  是正则的。

流形  $M$  上一点  $p$  在群  $G$  作用下的轨道，即  $G$ -轨道，定义为在  $\Psi$  作用下从  $p$  能达到的所有点组成的集合：

$$\text{Orb}(p) := \{\Psi(g, p) | \forall g \in G\}.$$

## 2.3 简单力学系统

简单力学系统 (simple mechanical system) 是一类有丰富理论内涵，以及广

泛工程应用背景的力学系统，包括引力场中飞行的各类飞行器，各类地面车辆，水面/水下航行器，无人机等。“简单”系指拉格朗日函数为动能减势能，或哈密尔顿函数为动能加势能，源于Smale在文献 [65]中的定义。

对于一个力学系统，首先需要唯一确定系统上每一点在惯性参考坐标系（以下简称惯性系）中的位置。本文所研究的力学系统上每一点在惯性系中的位置都可由一个有限维流形 $Q$ 上一点唯一确定， $Q$ 称为系统构形流形，或构形空间，任一 $q \in Q$ 代表力学系统的一个构形。若 $Q$ 局部同胚于 $\mathbb{R}^n$ ，可以定义一个局部坐标卡 $\phi: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，为流形 $Q$ 上的每一点 $q$ 赋予一组（ $n$ 个）实数 $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n) \in \mathbb{R}^n$ （坐标），称 $n$ 为力学系统的自由度。对于力学系统，切向量 $\mathbf{v} \in T_q Q$ 表示速度，余切向量 $\mathbf{p} \in T_q^* Q$ 表示动量或力（矩）。自然偶对作用 $\langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle$ 对应系统的能量或功率。

为描述力学系统的动能，需要赋予构形流形一个度量。 $Q$ 上一个黎曼度量 $M_q$ 在每个 $q \in Q$ 的切空间 $T_q Q$ 上定义了一个正定内积：

$$\ll \cdot, \cdot \gg_q: T_q Q \times T_q Q \rightarrow \mathbb{R}.$$

黎曼度量在 $TQ$ 与 $T^*Q$ 之间诱导出两个映射，将系统的速度与动量联系起来。定义flat映射 $M^b: TQ \rightarrow T^*Q$ ,

$$\ll \mathbf{v}_q, \mathbf{w}_q \gg = \langle M^b \mathbf{v}_q, \mathbf{w}_q \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_q, \mathbf{w}_q \in T_q Q.$$

定义sharp映射 $M^\sharp: T^*Q \rightarrow TQ$ ,

$$\langle \mathbf{p}_q, \mathbf{w}_q \rangle = \ll M^\sharp \mathbf{p}_q, \mathbf{w}_q \gg, \quad \forall \mathbf{p}_q \in T_q^* Q, \forall \mathbf{w}_q \in T_q Q.$$

以 $(q^1, \dots, q^n) \in \mathbb{R}^n$ 表示构形 $q$ 的局部坐标，以 $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \in \mathbb{R}^n$ 表示速度 $\mathbf{v}_q$ 的局部坐标，则 $M^b$ 的局部坐标是一个 $n \times n$ 阶正定矩阵：

$$\mathbf{M} = [M_{ij}(q)].$$

在不引起混淆时，本文也直接用 $[M_{ij}]$ 表示 $\mathbf{M}$ ，隐含度量矩阵依赖与构形 $q$ 。而 $M^\sharp$ 的局部坐标为 $[M_{ij}]^{-1}$ ，按惯例记作 $[M^{ij}]$ 。

按照Bullo [63]的提法, 简单力学控制系统可由如下几个对象定义:

- (1) 一个 $n$ 维的流形, 称为构形流形, 局部坐标为:  $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ ;
- (2) 构形流形 $Q$ 上的黎曼度量,  $M_q : TQ \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$  称为动能度量;
- (3) 函数 $V : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , 称为势能函数;
- (4) 映射 $F : TQ \rightarrow T^*Q$ , 代表系统所受的外力;
- (5) 一个 $m$ 维余分布 $\mathcal{F} = \text{span}_{CQ}\{\mathbf{F}^1, \dots, \mathbf{F}^m\} \subset T^*Q$ , 代表控制输入力。

简单力学系统的拉格朗日函数 $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ 可写为:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \ll \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \gg_q - V.$$

以局部坐标表示为:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - V.$$

根据哈密尔顿最小作用原理, 简单力学控制系统的运动方程由欧拉—拉格朗日(EL)方程给出:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^k u_k, \quad (2.2)$$

其中分段连续函数 $u_i \in \mathcal{U}$ 是控制信号。EL方程写成局部坐标形式为:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{F} + \mathbf{u}, \quad (2.3)$$

其中 $\mathbf{u} = \mathbf{F}^k u_k$ 代表控制力,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对应度量矩阵 $\mathbf{M}$ 的哥氏力矩阵, 其元素为:

$$C_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^k. \quad (2.4)$$

当 $\dim(\mathcal{F}) < \dim(T^*Q)$ , 即 $m < n$ 时, 称系统是欠驱动的。

EL方程中局部坐标的选取是任意的。当子余切丛 $\mathcal{F}$ 可积时(系指其零化(annihilator)子切丛 $\mathcal{F}^\perp \subset TQ$ 是Frobenius可积的), 可选取局部坐标 $(q^1, \dots, q^m, \dots, q^n)$ ,  $m = \dim(\mathcal{F})$ , 使得 $\mathcal{F} = \text{span}_{CQ}\{dq^1, \dots, dq^m\}$ 。在该局部坐标下, EL方程(2.2)可写为:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = F_i, \quad i = m+1, \dots, n, \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = F_j + u_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

写成坐标形式(2.3)后, 右端控制信号具有形式:  $\mathbf{u} = (0, \dots, 0, u_1, \dots, u_m)^T$ 。

## 2.4 李群上的简单力学系统

对于许多简单力学系统, 尤其是各类人造车辆、航行器, 其构形流形 $Q$ 具有额外的结构性质, 即李群的性质。充分利用李群的结构性质, 往往能简化描述系统运动的EL方程。专著 [63]给出了关于李群上力学系统的精确, 完整, 详细的讨论。

对于李群上的简单力学系统, 通过合理选择参考坐标系, 其EL方程的表示形式可以得到极大的简化。一种常用的坐标系称为本体坐标系(body frame), 其与系统本身刚性地互联。在惯性系中, 力学系统构形流形通常表示为一个矩阵李群 $G$ , 其李代数为 $\mathfrak{g}$ 。系统的构形表示为一个矩阵 $g \in G$ , 记 $g(t)$ 为构形流形上的一条曲线, 其变化率可以表示为 $\dot{g} = g\hat{\xi}^b$ , 其中 $\hat{\xi}^b \in \mathfrak{g}$ 代表系统的本体速度。因此,  $g$ 可以看作是从切空间 $T_e G$ 到切空间 $T_g G$ 的切映射。利用伴随算子 $\text{Ad}_g \hat{\xi} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ 可以将本体速度 $\hat{\xi}^b$ 转化为该速度在惯性系中的表示 $\hat{\xi}^s$ , 称 $\hat{\xi}^s$ 为系统的空间速度。由于构形李群是矩阵群, 伴随算子体现为:

$$\text{Ad}_g \hat{\xi} = g\hat{\xi}g^{-1}.$$

由于李代数是矩阵李代数, 指数映射 $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ 体现为 $\mathfrak{g}$ 上的矩阵指数运算。

定义 $\text{ad}_\xi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 上坐标向量形式的李括号运算, 即 $\text{ad}_\xi \eta$ 表示 $[\hat{\xi}, \hat{\eta}]$ 的坐标向量。在 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 上, 定义 $\text{ad}_\xi^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ 为坐标向量形式的对偶李括号运算:

$$\langle \alpha, \text{ad}_\xi \eta \rangle = \langle \text{ad}_\xi^* \alpha, \eta \rangle, \quad \forall \alpha \in \mathfrak{g}^*, \forall \hat{\xi}, \hat{\eta} \in \mathfrak{g}.$$

仿照Bullo [63]的表示方法, 可以定义李群上的简单力学系统。

**定义 2.1:** 李群 $G$ 上的简单力学系统可由如下几个对象定义:

- (1) 一个 $n$ 维的李群 $G$ , 称为构形流形;
- (2) 李代数 $\mathfrak{g}$ 上的内积 $\mathbb{I}$ , 定义系统动能;

- (3) 函数  $V : G \rightarrow \mathbb{R}$ , 称为势能函数;
- (4) 映射  $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ , 代表在本体坐标系中表示的外力;
- (5) 线性空间  $\mathcal{S} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{f^1, \dots, f^m\} \subset \mathfrak{g}^*$ , 代表在本体坐标系中表示的控制输入力。

评注 2.2: 定义在  $\mathfrak{g}$  上的内积  $\mathbb{I}$  通过左平移诱导出定义在  $TG$  上的黎曼度量即为动能度量 [63],  $\mathbb{I}$  也称为动能张量。由于  $\mathbb{I}$  不依赖于构形, 其诱导出的动能度量是左不变的。在不引起混淆时, 本文也将内积  $\mathbb{I}$  在  $\mathfrak{g}$  的一组基下的矩阵表示记为  $\mathbb{I}$ 。

记  $g^*$  为切向量映射  $g$  的对偶映射 (前面提到  $g$  可以看作是从  $T_e G$  到  $T_g G$  的切映射), 对于势场力  $dV \in T^*G$ , 则成立:  $\langle g^*dV, \xi \rangle = \langle dV, g\xi \rangle$ 。

Bullo [63] 将 EL 方程 (2.2) 推导至李群上简单力学系统的运动方程:

$$\dot{g} = g\widehat{\xi}^b, \quad (2.6)$$

$$\dot{\xi}^b = \Xi(g, \xi^b, \mathbf{u}) = \mathbb{I}^{-1}(\text{ad}_{\xi^b}^* \mathbb{I}\xi^b - g^*dV + f + \mathbf{u}), \quad (2.7)$$

式中  $\mathbf{u} = f^i u_i$  代表控制输入。方程 (2.6) 称为运动学方程; 方程 (2.7) 称为动力学方程, 或欧拉-庞加莱方程。方程 (2.7) 两端的各个元素均以其坐标向量表示。

定义系统的状态为  $\mathbf{x} = (g, \xi^b)$ , 其属于  $2n$  维流形  $\mathcal{X} = G \times \mathfrak{g}$ 。注意,  $\xi^b \in \mathfrak{g}$  系指坐标向量  $\xi^b$  代表的李代数元素  $\widehat{\xi}^b \in \mathfrak{g}$ , 以下雷同。方程 (2.6), (2.7) 可以写为仿射输入非线性系统的形式:

$$\dot{\mathbf{x}} = h(\mathbf{x}) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

## 2.5 对称性与相对平衡点

力学系统的一个重要性质是其动力学具有对称性, 即系统的动力学在某种群对状态作用下的不变性。以系统 (2.8) 为例, 考虑一个李群  $H \subseteq G$ , 其在状态  $\mathbf{x} = (g, \xi^b)$  上的作用表示为:

$$\Psi(h, (g, \xi^b)) = (hg, \xi^b).$$

系统起始于初始状态  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ，在控制输入  $\mathbf{u}$  作用下的状态轨迹  $\mathbf{x}(t)$  记为  $\phi_u(t, \mathbf{x}_0)$ ，称为状态流 (state flow)。

**定义 2.3:** [52] 考虑李群  $G$  上的简单力学系统(2.8)，称群  $H \subseteq G$  是对称群，或称系统在群  $H$  作用下不变，是指对于所有的  $h \in H$ ， $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ ， $t \in \mathbb{R}$ ，以及  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^m$ ，成立：

$$\Psi(h, \phi_u(t, \mathbf{x}_0)) = \phi_u(t, \Psi_h(\mathbf{x}_0)).$$

根据定义，系统在对称群作用下的不变性意味着群对系统状态的作用与状态的流是可交换的。图2.1示意了系统的对称群。这种不变性还意味

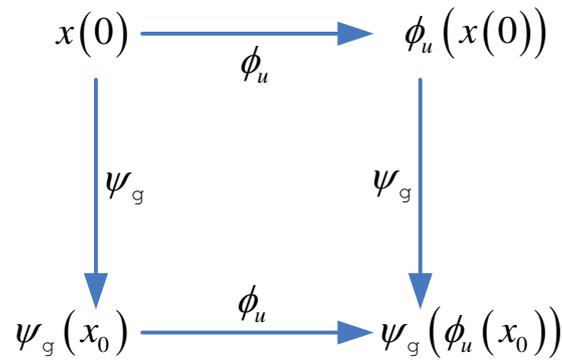


图 2.1 系统的对称群示意

着如果  $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  是系统的一条 (状态与控制) 轨迹，那么对于所有的  $h \in H$ ， $(\Psi_h(\mathbf{x}(t)), \mathbf{u}(t))$  也是系统的一条轨迹。

**命题 2.4:** [52] 系统(2.8)具有  $H$  对称当且仅当欧拉—庞加莱方程(2.7)在  $H$  作用下不变，即对于所有  $h \in H$ ， $g \in G$ ， $\xi^b \in \mathfrak{g}$ ， $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^m$  成立：

$$\Xi(g, \xi^b, \mathbf{u}) = \Xi(hg, \xi^b, \mathbf{u}).$$

对于保守力学系统，如果其拉格朗日函数在对称群作用下不变，则满足上述条件。这种对称性体现为拉格朗日函数不依赖于某些局部坐标  $q^i$ ，此时称坐标  $q^i$  是循环的。循环坐标对应的广义动量  $p_i := \partial L / \partial \dot{q}^i$  是守恒的，这直接导致系统运动方程的简化，因为系统状态空间可以减少  $(q^i, p_i)$ 。

对称性化简是简化力学系统分析时极其有用的工具 [66, 67]。在控制输入允许的前提下，可以设计反馈使得一些原本非循环的坐标变成循环坐标。其实，这是改变系统(2.8) 右端的向量场使其变得可积（类似势能引起的势场力），且不再依赖于某些坐标变量。通过控制实现某些变量循环（对称性）的做法，可以简化某些控制问题的求解，这正是后续章节中利用对称性进行运动规划的核心思想。然而，Frazzoli [52]指出对于对称性的利用，控制界远远不及力学界。对称性是力学系统控制中的一个值得利用的性质。

简单力学系统另一个重要性质是相对平衡点。考虑李群 $G$ 上的简单力学系统(2.8)， $H \subseteq G$ 是对称群， $\mathfrak{h}$ 是其李代数。

**定义 2.5:** [52] 在初始状态 $\boldsymbol{x}_0 = (g_0, \bar{\boldsymbol{\xi}}^b) \in G \times \mathfrak{g}$ 下，如果存在一个常值控制 $\bar{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^m$ ，使得系统本体速度沿受控轨迹恒为 $\bar{\boldsymbol{\xi}}^b \in \mathfrak{g}$ ，空间速度恒为 $\bar{\boldsymbol{\xi}}^s \in \mathfrak{h}$ ，其满足 $\bar{\boldsymbol{\xi}}^s = \text{Ad}_{g_0} \bar{\boldsymbol{\xi}}^b$ ，那么称系统的轨迹：

$$\begin{aligned} g(t) &= \exp(\bar{\boldsymbol{\xi}}^s t) g_0 = g_0 \exp(\bar{\boldsymbol{\xi}}^b t), \\ \boldsymbol{\xi}^b(t) &= \bar{\boldsymbol{\xi}}^b. \end{aligned}$$

为一个相对平衡点。在不引起混淆时，也用速度 $\bar{\boldsymbol{\xi}}^b$ (或 $\bar{\boldsymbol{\xi}}^s$ )指代相对平衡点。

**评注 2.6:** 沿着相对平衡点，系统的本体速度 $\boldsymbol{\xi}^b$ ，以及控制输入 $\boldsymbol{u}$ 均为常值，物理上体现为一种匀速运动；从控制上讲，相对平衡点是系统的稳态运动；在宇航学中，常称相对平衡点为平航轨迹（trim trajectories）。

从定义可以看出，系统的相对平衡点既是系统运动方程的解，又是对称群的作用轨道。对于李群上的力学系统，如果存在相对平衡点，则相对平衡点正是限制在李代数上演化的动力学（欧拉—庞加莱方程）的平衡点。

**例:**（理想流体中的水下航行器）考虑浸没在不可压缩，不可旋转，无粘性，且在无穷远处静止的理想流体中一刚体，该刚体的构形流形为 $SE(3)$ ，其李代数为 $se(3)$ 。刚体的构形 $g \in SE(3)$ ，以及本体速度 $\hat{\boldsymbol{\xi}}^b \in se(3)$ 表示为：

$$g = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\xi}}^b = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} & \boldsymbol{v} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix},$$

其中  $\mathbf{R} \in SO(3)$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  分别表示刚体相对于惯性系的姿态与位置;  $\hat{\boldsymbol{\omega}} \in so(3)$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  分别表示刚体的本体角速度与线速度。刚体的运动学由方程(2.6)得到:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\omega}}, \\ \dot{\mathbf{b}} &= \mathbf{R}\mathbf{v}.\end{aligned}$$

假设刚体受到重力与浮力平衡, 且重心与浮心重合, 因此无势能。刚体的拉格朗日函数为:  $L = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v})$ , 其中  $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ ,  $\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$  是惯量矩阵, 其包含了刚体与流体的相互作用所产生的添加惯量(added masses)。这部分增加惯量是考虑到刚体的运动同样会造成周围流体的运动, 因此等价于增加了系统的惯量。

李代数  $se(3)$  上的李括号运算 (坐标向量形式) 对应的矩阵为:

$$\text{ad}_{(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v})} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{v}} & \hat{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix}.$$

对偶李括号运算 (坐标向量形式) 对应的矩阵为上面矩阵的转置:

$$\text{ad}_{(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v})}^* = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{v}} & \hat{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix}^T.$$

刚体的动力学由欧拉-庞加莱方程(2.7)得到:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{u}_\tau, \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{M}\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}_f,\end{aligned}\tag{2.9}$$

其中  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_\tau^T, \mathbf{u}_f^T)^T \in se^*(3)$  是控制力。

群  $SE(3)$  对状态  $(g, \boldsymbol{\xi}^b)$  的作用为:

$$\Psi_{\tilde{g}}(g, \boldsymbol{\xi}^b) = (\tilde{g}g, \boldsymbol{\xi}^b), \quad \forall \tilde{g} \in SE(3).$$

易见欧拉-庞加莱方程在群  $SE(3)$  的作用下不变, 因此系统具有  $SE(3)$  对称。

相对平衡点可以用使得方程(2.9)右侧为零的常数组 $(\bar{\xi}^b, \bar{u})$ 表示。经计算, 当 $u = \bar{u} = 0$ 时,

$$\widehat{\xi}^b = \begin{pmatrix} \alpha \widehat{e}_i & \beta e_i \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

就是相对平衡点, 相应的轨迹为:

$$\begin{aligned} g(t) &= g_0 \exp \widehat{\xi}^b t, \\ \xi^b(t) &= \bar{\xi}^b. \end{aligned}$$

上式中群 $SE(3)$ 上的指数映射为矩阵的指数映射。 □

物理上讲,  $SE(3)$ 中刚体的相对平衡点包含匀速直线运动、圆周运动、螺旋运动。李群上的简单力学系统包含了许多实际的力学系统, 比如各类人造车辆, 航行器等, 往往具有更加丰富的对称性, 比如空间平移对称性(对应系统的线动量守恒), 沿空间某一方向的旋转对称性(对应系统沿该方向的角动量守恒), 以及时间平移对称性(对应系统的能量守恒)。

## 2.6 稳定性相关

最后回顾关于动力系统稳定性的一些结果, 这部分内容主要参考专著 [68]。考虑在一个 $n$ 维流形上演化的动力系统:

$$\dot{x} = \mathbf{X}(x), \quad x \in M,$$

其中 $\mathbf{X}$ 是 $M$ 上的给定向量场。满足 $\mathbf{X}(x_e) = 0$ 的点 $x_e \in M$ 称为平衡点。一个平衡点是稳定的, 是指所有从该平衡点附近出发的轨迹, 在之后所有时间内, 始终位于平衡点的邻近, 即系统的一个平衡点如果满足:

- (1) 对于任意一个 $\epsilon > 0$ , 存在一个 $\delta$ , 使得所有满足 $\|x(0) - x_e\| \leq \delta$ 的系统轨迹在任意时刻 $t \geq 0$ 同样满足 $\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon$ , 其中 $\|\cdot\|$ 是 $M$ 上点的局部坐标的欧氏范数, 则称平衡点稳定;
- (2) 稳定, 并且满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$ , 则称平衡点渐近稳定;
- (3) 否则, 称平衡点不稳定。

一般称系统稳定，严格意义上讲是指系统平衡点是稳定的。判断一个系统平衡点的稳定性，通常使用李雅普诺夫直接法和间接法。间接法是通过判断原系统在平衡点处的线性化模型的特征值来间接判断原系统的稳定性，直接法是通过构造一个类似能量的李雅普诺夫函数，直接判断稳定性。

假设在平衡点 $x_e$ 的一个邻域 $D$ 内存在一个可微函数 $V(x)$ ，其在 $x_e$ 处取严格极小值，比如 $V(x_e) = 0$ ，并且：

$$V(x) > 0, \quad \forall x \in D - \{x_e\}.$$

如果沿系统轨迹的时间微分：

$$\dot{V}(x) \leq 0,$$

则平衡点 $x_e$ 是稳定的；如果：

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \in D - \{x_e\},$$

则平衡点 $x_e$ 是渐近稳定的。

当 $\dot{V}$ 是半负定时，还可以利用LaSalle不变原理证明渐近稳定性。

对于系统 $\dot{x} = \mathbf{X}(x)$ ，一个集合 $\Omega$ 若满足：

$$x(0) \in \Omega \Rightarrow x(t) \in \Omega, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

则称 $\Omega$ 是系统的不变集；若仅对 $t \geq 0$ 成立，则称 $\Omega$ 为正不变集。LaSalle不变原理陈述如下：

设 $\Omega \subset D$ 是系统的一个紧致的，正不变集合，令：

$$E = \{x \in \Omega | \dot{V}(x) = 0\}.$$

设 $H$ 是 $E$ 中的最大不变子集，则所有从 $\Omega$ 中出发的轨迹当 $t \rightarrow \infty$ 都收敛到 $H$ 。如果 $H = \{x_e\}$ ，则平衡点 $x_e$ 是渐近稳定的。

## 2.7 受控拉格朗日函数方法回顾

受控拉格朗日函数（controlled lagrangians）方法（以下简称CL法）是一种基于能量整形思想，镇定欠驱动力学系统的非线性设计方法。CL法通过反馈，赋予闭环系统新的能量函数，同时保持力学系统的拉格朗日结构（闭环系统仍是一个简单力学系统），这种思想称为“能量整形（energy shaping）”。CL法考虑这样一类反馈控制，其使得闭环系统是对应一个新拉格朗日函数（受控拉格朗日函数）的自由EL方程。受控拉格朗日函数中的动能度量，以及势能函数中含有控制参数，以闭环能量作为李亚普诺夫函数，指导这些控制参数的选择，使得闭环能量在期望的（相对）平衡点处取极值，从而获得李亚普诺夫稳定性。

假设一简单力学系统的EL方程由(2.5)表示，其拉格朗日函数为：

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - V.$$

当系统不受外力时，EL方程(2.5)的坐标形式可写为：

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

如果能成功应用，CL法提供了一个反馈控制 $\mathbf{u}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ，以及一个CL函数：

$$L_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_c \dot{\mathbf{q}} - V_c,$$

式中 $\mathbf{M}_c, V_c$ 分别是通过反馈修改后的动能度量，以及势能函数。闭环系统正是由对应CL函数 $L_c$ 的自由（无外力）EL方程所描述的自由简单力学系统：

$$\mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_c \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial V_c}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (2.11)$$

其中 $\mathbf{C}_c$ 是对应闭环动能度量 $\mathbf{M}_c$ 的哥氏力矩阵。

闭环动能度量 $\mathbf{M}_c$ 以及闭环势能函数 $V_c$ 必须满足一定的条件，使得相应的反馈可由欠驱动控制实现，称该条件为匹配条件。匹配条件确保了闭环系统(2.11)

不需要在无驱动变量上施加控制得到。

从闭环方程(2.11)中求解 $\ddot{\mathbf{q}}$ ，并代入开环方程(2.10)中，便得到 $\mathbf{M}, V$ 与控制改变后的 $\mathbf{M}_c, V_c$ 之间的关联：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \mathbf{M}\mathbf{M}_c^{-1} \left( -\mathbf{C}_c\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial V_c}{\partial \mathbf{q}} \right) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.12)$$

方程(2.12)的上半部分就是匹配条件，这是一组以 $\mathbf{M}_c, V_c$ 为变量的非线性的偏微分方程（PDE）。求解出满足匹配条件的 $\mathbf{M}_c$ 以及 $V_c$ ，代入方程(2.12)的下半部分，便可求出实现 $\mathbf{M}_c, V_c$ 的反馈控制 $\mathbf{u}$ 。通常情况下，匹配的 $\mathbf{M}_c$ 以及 $V_c$ 是一组参数化的函数，其中的参数最终出现在控制 $\mathbf{u}$ 中，体现为控制参数。

匹配之后，闭环系统是一个自由的简单力学系统，其能量：

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_c \dot{\mathbf{q}} + V_c$$

是守恒的，因此可以作为李亚普诺夫函数用于稳定性分析，以及镇定的设计。通过选择控制参数，使得期望的（相对）平衡点位于闭环能量函数 $E_c$ 的极小（极大）处，从而获得稳定性。在稳定的基础上，可以设计反馈阻尼使得 $\dot{E}_c \leq 0$  ( $\dot{E}_c \geq 0$ )，借助LaSalle不变原理来分析渐近稳定性。

附录A.1从几何力学的角度详细介绍了CL法的设计思想，步骤，以及相关应用。

### 第三章 多力学系统的协调控制

绪论中曾提及，在工程应用中，一群具有感知、通信、决策、运动能力的力学系统，能更好地完成空间上分布的任务。在执行这些工程任务时，出于自主性的要求和某些硬件条件的限制，一般只有在物理上邻近的力学系统之间可以交互信息，而不存在一个位于更高层面上的干预者为每个力学系统提供全局信息。因此，单个力学系统需要有基于局部信息，决策自身运动。这种内部建立了分布式信息互联，并据此决策自身运动的力学系统群体称为一个力学系统网络 [4]。当前许多控制学家以及工程师们期望在力学系统网络中模仿生物群落中的协调机制，设计协调控制算法，让网络去实现由单个系统难以完成的工程任务，或降低具体任务对单个系统功能、性能上的要求 [6]。

本章针对李群上多个简单力学系统，定义协调的概念，描述协调控制问题，并设计相应的协调控制策略。

#### 3.1 多力学系统协调控制的问题描述

考虑李群 $G$ 上 $N$ 个简单力学系统， $g_i \in G$ 表示第 $i$ 个系统（以下简称个体 $i$ ）的构形。力学系统之间的相对构形可以利用李群左、右逆作用来刻画。

**定义 3.1:** 个体 $i$ 相对于个体 $j$ 的相对构形定义为 $g_{ij} = g_j^{-1}g_i$ 。

协调的概念可由相对构形定义。

**定义 3.2:** [18]  $N$ 个力学系统处于协调运动系指任意两个个体 $i, j$ ，相对构形 $g_{ij}$ 维持常值。也将协调运动简称协调。

多力学系统之间进行信息交互时，信息流可建模成一个通信连接的集合。以 $j \rightsquigarrow i$ 表示个体 $j$ 向个体 $i$ 发送信息，此时称个体 $j$ 为个体 $i$ 的相邻个体。存在通信连接的多个力学系统称为力学系统网络。

将每个力学系统用一个节点代表，从节点 $j$ 指向节点 $i$ 的一条有向边表示 $j \rightsquigarrow i$ 。那么， $N$ 个系统之间的信息流模型可以用一个有向图 $G$ 来表示。以下论文遵循假设：力学系统网络在双向通信图 $G$ 上进行信息交互。换言之，如果通信图 $G$ 中存在有向边 $j \rightsquigarrow i$ ，那么也存在有向边 $i \rightsquigarrow j$ 。

根据定义3.2, 协调对相对构形提出了要求。接下来, 不妨研究协调对个体速度提出的要求。由于构形流形上的速度属于各自的切空间, 若要比较速度, 必须将一个切空间上的速度转换到另一切空间上。鉴于构形流形是一个李群 $G$ , 利用其结构性质, 各个构形处的速度可以通过群作用的方式转换到 $G$ 的单位元的切空间 $T_e G$ , 即李代数 $\mathfrak{g}$ 上。以 $\hat{\xi}^b \in \mathfrak{g}$ 表示系统的本体速度, 以 $\hat{\xi}^s = \text{Ad}_g \hat{\xi}^b \in \mathfrak{g}$ 表示系统空间速度。为书写方便, 在不引起混淆时, 以下本文也用坐标向量 $\xi$ 代表李代数元素 $\hat{\xi}$ 。

**命题 3.3:** [18] 矩阵李群上 $N$ 个个体的协调等价于每个个体具有相同的空间速度。

**证明:** 对于相对构形 $g_{ij}(t) = g_j(t)^{-1}g_i(t)$ , 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g_j^{-1}g_i) &= L_{g_j^{-1}}^* \frac{d}{dt}g_i + R_{g_i}^* \frac{d}{dt}g_j^{-1} \\ &= L_{g_j^{-1}}^* L_{g_i}^* \xi_i^b - R_{g_i}^* L_{g_j^{-1}}^* \text{Ad}_{g_j} \xi_j^b \\ &= L_{g_j^{-1}}^* (L_{g_i}^* \xi_i^b - R_{g_i}^* \text{Ad}_{g_j} \xi_j^b) \\ &= L_{g_j^{-1}}^* L_{g_i}^* (\xi_i^b - L_{g_i^{-1}}^* R_{g_i}^* \text{Ad}_{g_j} \xi_j^b) \\ &= L_{g_{ij}}^* (\xi_i^b - \text{Ad}_{g_{ij}} \xi_j^b) \\ &= L_{g_{ij}}^* \text{Ad}_{g_i}^{-1} (\xi_i^s - \xi_j^s), \end{aligned}$$

式中 $L^*$ ,  $R^*$ 分别是群左, 右作用的切提升, 对于矩阵李群, 分别表示为矩阵左, 右乘运算。由于 $L_{g_{ij}}^*$ 以及伴随算子 $\text{Ad}_{g_i}^{-1}$ 都是可逆的, 相对构形 $g_{ij}(t) = \text{const}$ 的条件等价于李代数 $\mathfrak{g}$ 上的代数条件 $\xi_i^s = \xi_j^s$ , 从而得证。 ■

**命题 3.4:** [18] 定义 $G_\xi := \{g \in G | \text{Ad}_g \xi = \xi\}$ , 若每个个体具有相同的本体速度 $\xi^b$ , 且对于任意 $i, j$ , 满足 $g_{ij} \in G_\xi$ , 则力学系统网络处于协调。

**证明:** 既然已经有 $\xi_i^b = \xi_j^b = \xi^b$ , 只要证明 $\text{Ad}_{g_i} \xi^b = \text{Ad}_{g_j} \xi^b$ , 便可由命题1得证。显然, 当 $\text{Ad}_{g_{ij}} \xi^b = \xi^b$ 时, 有 $\text{Ad}_{g_i} \xi^b = \text{Ad}_{g_j} \xi^b$ , 即 $\xi_i^s = \xi_j^s$ , 从而得证。 ■

**评注 3.5:** 命题3.3, 3.4 将李群上的协调问题转化为李代数上空间速度的一致性问题, 或相对构形满足一定条件下的本体速度一致性问题。命题3.3 对应于文献 [18]中左协调的等价条件。命题3.4对应于文献 [18]中全协调的等价条件。

相对构形 $g_{ij}$ 在李群 $G$ 的左作用下是不变的, 另外, 如果每个个体都具有对称群 $G$ , 或更一般地, 具有对称群 $H \subseteq G$ , 回忆第二章中基于本体/惯性速度的相对平衡点定义, 则可以利用相对平衡点来定义多力学系统的若干种协调。为了使得后续的分析与设计简洁明了, 本文遵循以下假设:

**假设 3.6:** 多力学系统中每个个体完全相同, 且均具有对称群 $H \subseteq G$ 。

**定义 3.7:** 考虑李群 $G$ 上由 $N$ 个相同的简单力学系统构成的网络, 假设个体存在相对平衡点。若每个个体都沿自身的相对平衡点运动, 同时相对构形保持固定, 则称这类协调为力学系统网络的相对平衡点。

**评注 3.8:** 定义3.7下的相对平衡点, 不同于多个力学系统以一个刚体形式运动的相对平衡点。定义3.7所包含的协调较刚体形式运动的相对平衡点更广, 比如多个刚体保持相对构形, 同时每个刚体沿自身某固定轴的匀速旋转运动。

假设每个个体具有定义2.5下的相对平衡点, 记作 $\bar{\xi}^s \in \mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{h}$ 为对称群 $H$ 的李代数; 或记作 $\bar{\xi}^b \in \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}$ 为李群 $G$ 的李代数。

**相对平衡点I** 在初始状态 $\mathbf{x}_i(0) = (g_i(0), \bar{\xi}^s)$ ,  $i = 1, \dots, N$ 下, 力学系统网络具有相对平衡点:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \exp(\bar{\xi}^s t) g_1(0), \\ g_\alpha(t) &= g_1(t) g_{\alpha 1}(0), \quad \alpha = 2, \dots, N, \\ \xi_1^s(t) &= \dots = \xi_N^s(t) = \bar{\xi}^s. \end{aligned} \quad (3.1)$$

**相对平衡点II** 在初始状态 $\mathbf{x}_i(0) = (g_i(0), \bar{\xi}^b)$ ,  $i = 1, \dots, N$ 满足 $g_{ij}(0) \in G_{\bar{\xi}^b}$ ,  $i \neq j$ 时, 即:

$$\text{Ad}_{g_{ij}(0)} \bar{\xi}^b = \bar{\xi}^b, \quad 1 < i \neq j < N, \quad (3.2)$$

力学系统网络具有相对平衡点:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= g_1(0) \exp(\bar{\xi}^b t), \\ g_\alpha(t) &= g_1(t) g_{\alpha 1}(0), \quad \alpha = 2, \dots, N, \\ \xi_1^b(t) &= \dots = \xi_N^b(t) = \bar{\xi}^b. \end{aligned} \quad (3.3)$$

虽然上述两种相对平衡点都体现为协调，但相对平衡点II所描述的协调比I所描述的协调更显“协同”。按照文献 [18]的定义，相对平衡点II实质是一种全协调，此时每个个体既具有相同的空间速度，又具有相同的本体速度。

相对平衡点是力学系统天然、低能耗的运动。生物界各种群落就广为利用相对平衡点，如大雁编队迁徙飞行能节省个体的能量。研究相对平衡点一方面有利于揭示这些自然群集现象的本质，另一方面可以利用相对平衡点构造初等运动，用于各类力学系统的运动规划。本文所研究的协调控制问题具体化为：

**协调镇定问题:** 针对 $N$ 个在李群 $G$ 上运动，以通信图 $G$ 进行信息交互的简单力学系统，利用个体的自身状态，以及所接收相邻个体的状态，设计个体反馈控制律，使得力学系统网络的相对平衡点(3.1)，或者(3.3)是渐近稳定的。

**协调规划问题:** 针对 $N$ 个在李群 $G$ 上运动，以通信图 $G$ 进行信息交互的简单力学系统，利用个体的自身状态，以及所接收相邻个体的状态，设计个体反馈控制律，使得力学系统网络以协调方式实现李群上两点之间的转移。

## 3.2 基于能量整形思想的协调镇定

本节将能量整形思想推广到多力学系统协调的镇定设计中来。

**定义 3.9:** 协调的 $N$ 个个体间固定的相对位置定义为队形。

基于本体速度定义的相对平衡点(3.3)对个体间相对构形提出了要求。如果对协调所呈现的队形有所要求，则无论是在相对平衡点(3.3)中，还是在基于空间速度描述的相对平衡点(3.1)中，相对构形的初始状态都不能是任意的。

为了在任意初始构形下实现具有特定队形的协调，需要引入相对构形的控制。由于势能是仅依赖于构形的函数，可以在力学系统网络中引入人工势能，通过势场力来控制相对构形。为了不约束整体队形在李群上的运动，人工势能只依赖于相对构形。另一方面，考虑到个体沿自身相对平衡点的运动可能是不稳定的，需要进行个体镇定设计。因此，人工势能需要满足两个假设条件：

**条件 3.10:** 人工势能是仅依赖于个体间相对构形的函数。

**条件 3.11:** 由整个网络的能量（可能已经进行镇定整形），以及人工势能加和而成的总能量，沿着相对平衡点(3.3)取极值。

条件3.10保留了队形在李群上运动的任意性。条件3.11保证了相对平衡点(3.3)的稳定性。构造个体间的人工势能与单个体的能量整形镇定不是相互独立的，需要利用各自的设计自由度互相补充，才能整形出符合条件3.11的总能量函数（参见 [41]中的设计）。

基于个体的运动方程(2.6, 2.7)，记网络的构形为：

$$g = (g_1, \dots, g_N) \in \overbrace{G \times \dots \times G}^N,$$

网络的本体速度为：

$$\xi^b = (\xi_1^b, \dots, \xi_N^b) \in \overbrace{\mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g}}^N.$$

网络的状态空间可写为 $\mathcal{X}^N = G^N \times \mathfrak{g}^N$ ，其中上标 $N$ 代表 $N$ 次笛卡尔积。

第2.3节中提到，在个体的控制输入余分布可积的前提下，可以为其构形 $g_i$ 选取一组局部坐标：

$$\mathbf{q}_i = \begin{pmatrix} [q_i^a] \\ [q_i^c] \end{pmatrix},$$

式中用希腊字母上标表示无控制施加变量，用英文字母上标表示直接施加控制的变量，此时控制输入矩阵具有形式：

$$\mathbf{G}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \end{pmatrix},$$

其中 $m = \dim[q_i^c]$ 是控制维数。

以 $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1^T, \dots, \mathbf{q}_N^T)^T$ 表示力学系统网络的构形局部坐标，无外力时，未耦合（个体间相互独立）网络的EL方程可写为：

$$\mathbf{M}_{\text{op}} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{\text{op}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial V_{\text{op}}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{G} \mathbf{u}, \quad (3.4)$$

式中控制  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^{Nm}$ ,  $\mathbf{G}$  是输入矩阵, 表示为:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{Nm} \end{pmatrix},$$

网络的势能函数为:

$$V_{\text{op}} = \sum_{i=1}^N V_i.$$

$\mathbf{M}_{\text{op}}$  是网络的惯量矩阵, 表示为:

$$\mathbf{M}_{\text{op}} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} [M_{\alpha\beta}^1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{\alpha\alpha}^1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{\alpha\beta}^N] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{\alpha\alpha}^N] \\ \hline [M_{a\alpha}^1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{ab}^1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{a\alpha}^N] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{ab}^N] \end{array} \right). \quad (3.5)$$

矩阵元素中上标  $i$  代表个体  $i$ 。个体  $i$  的惯量矩阵表示为:

$$\mathbf{M}_{\text{op}}^i = \begin{pmatrix} [M_{\alpha\beta}^i] & [M_{\alpha\alpha}^i] \\ [M_{a\alpha}^i] & [M_{ab}^i] \end{pmatrix}.$$

矩阵  $\mathbf{C}_{\text{op}}$  是对应  $\mathbf{M}_{\text{op}}$  的哥氏力矩阵。

根据能量整形思想, 记力学系统网络的闭环动能度量为:

$$\mathbf{M}_{\text{cl}} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} [\tilde{M}_{\alpha\beta}^1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\tilde{M}_{\alpha\alpha}^1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\tilde{M}_{\alpha\beta}^N] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\tilde{M}_{\alpha\alpha}^N] \\ \hline [\tilde{M}_{a\alpha}^1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\tilde{M}_{ab}^1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\tilde{M}_{a\alpha}^N] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\tilde{M}_{ab}^N] \end{array} \right). \quad (3.6)$$

力学系统网络的闭环势能函数为：

$$V_{\text{cl}} = \sum_{i=1}^N (V_i + \tilde{V}_i) + V_{\text{art}},$$

其中 $\tilde{V}_i$ 是个体 $i$ 施加的势能整形， $V_{\text{art}}$ 是引入的仅依赖相对构形的人工势能函数。

力学系统网络的能量整形匹配条件是：

$$\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{M}_{\text{op}}\mathbf{M}_{\text{cl}}^{-1} \left( -\mathbf{C}_{\text{cl}}\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial V_{\text{cl}}}{\partial \mathbf{q}} \right) + \mathbf{C}_{\text{op}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial V_{\text{op}}}{\partial \mathbf{q}}, \quad (3.7)$$

式中 $\mathbf{C}_{\text{cl}}$ 是对应 $\mathbf{M}_{\text{cl}}$ 的哥氏力矩阵。令：

$$\mathbf{G}^{\perp} = \left( \mathbf{I}_{Nn-Nm}, \mathbf{0}_{(Nn-Nm) \times Nm} \right).$$

易于验证有 $\mathbf{G}^{\perp}\mathbf{G} = \mathbf{0}$ 。在方程(3.7)两边同时乘以 $\mathbf{G}^{\perp}$ 可得：

$$\mathbf{G}^{\perp} \left[ \mathbf{M}_{\text{op}}\mathbf{M}_{\text{cl}}^{-1} \left( -\mathbf{C}_{\text{cl}}\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial V_{\text{cl}}}{\partial \mathbf{q}} \right) + \mathbf{C}_{\text{op}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial V_{\text{op}}}{\partial \mathbf{q}} \right] = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

合并提取等式(3.8)中依赖速度的项，可以得到动能整形匹配条件：

$$\mathbf{G}^{\perp} \left( -\mathbf{M}_{\text{op}}\mathbf{M}_{\text{cl}}^{-1}\mathbf{C}_{\text{cl}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{\text{op}}\dot{\mathbf{q}} \right) = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

由于哥氏力(见定义式2.4)既是速度 $\dot{\mathbf{q}}$ 的函数，又涉及到惯量矩阵 $\mathbf{M}_{\text{cl}}$ 对构形坐标 $\mathbf{q}$ 的偏导，因此方程组(3.9)既是 $Nr$ 个关于速度的二次方程（ $r = \dim[q^{\alpha}]$ 为个体欠驱动变量的个数），也是关于闭环惯量矩阵 $\mathbf{M}_{\text{cl}}$ 的偏微分方程。

求解偏微分方程组是困难的，一般得不到解析解。一种很自然的想法就是牺牲能量整形选择的自由度来简化匹配条件的求解，比如通过选择整形参数使得某些偏微分项，以及难以处理项的系数为零，使得偏微分方程组退化成常微分方程组或代数方程组，这种匹配方式需要根据力学系统的结构特性加以确定，且不可避免地带来控制律设计上的保守性。对于匹配条件(3.9)，由于速度的任意性，通过设定速度项的系数为零可以得到匹配的充分条件，从而将偏微分方程组简化为代数方程组。求解该代数方程组，找到匹配的闭环动能度量。

合并提取等式(3.8)中不依赖速度的项，得到势能整形匹配条件：

$$\mathbf{G}^\perp \left( -\mathbf{M}_{\text{op}}\mathbf{M}_{\text{cl}}^{-1} \frac{\partial V_{\text{cl}}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V_{\text{op}}}{\partial \mathbf{q}} \right) = \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

方程组(3.10)是 $Nr$ 个关于闭环势能 $V_{\text{cl}}$ 的偏微分方程，其依赖于闭环动能度量的选取。简化偏微分方程组(3.10) 需要利用开环动能度量以及势能的结构性，选择合适的闭环动能度量。通过求解匹配的闭环势能，最终得到能量整形控制：

$$\mathbf{u} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \left[ \mathbf{M}_{\text{op}}\mathbf{M}_{\text{cl}}^{-1} \left( -\mathbf{C}_{\text{cl}}\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial V_{\text{cl}}}{\partial \mathbf{q}} \right) + \mathbf{C}_{\text{op}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial V_{\text{op}}}{\partial \mathbf{q}} \right]. \quad (3.11)$$

力学系统网络的闭环总能量：

$$E_{\text{cl}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{\text{cl}} \dot{\mathbf{q}} + V_{\text{cl}}$$

可以作为力学系统网络沿相对平衡点协调运动的李亚普诺夫函数，用于稳定性分析以及镇定设计。利用闭环动能度量 $\mathbf{M}_{\text{cl}}$ ，以及闭环势能函数 $V_{\text{cl}}$ 中的设计自由度，使得 $E_{\text{cl}}$ 在给定相对平衡点处取极值，即实现相对平衡点的镇定。

以能量整形解决协调镇定的关键是在闭环动能度量的基础上找到所有匹配的闭环势能函数。归根到底，当闭环动能度量是正（负）定时，是要在所有匹配的闭环势能函数中找到一个解，其满足二阶导数阵在给定相对平衡点处的是正（负）定的。原则上，直接求解匹配条件(3.9, 3.10) 将使得闭环动能度量以及闭环势能函数的选择具有最大自由度，进而易于镇定实现。但考虑到直接求解匹配条件的难度，在后续章节中，本文将利用力学系统的结构特性，以牺牲整形参数选择的自由度来简化匹配条件的求解。

至此，本节针对一般情形下力学系统网络的协调镇定问题，转化为基于能量整形的镇定律(3.11)的求解，其中整形参数的选取依赖于匹配条件(3.9, 3.10)的求解。在后续章节针对具体力学系统网络进行协调镇定时，将应用这些结论。

### 3.3 利用初等运动的协调运动规划

本节研究多力学系统的协调运动规划问题，主要借鉴动力学量化组合思想，这是对Frazzoli在 [55] 中提出的多无人机协调方法的理论扩展。

### 3.3.1 构造初等运动

首先介绍Frazzoli [52, 53] 给具有对称性的力学系统定义的两类初等运动，作为动力学的量化。第一类初等运动由相对平衡点引入，称为平航(trim)运动。

**定义 3.12:** [53] 考虑李群 $G$ 上的简单力学系统(2.8)， $H \subseteq G$ 为对称群，其李代数 $\mathfrak{h}$ ，系统的平航运动由如下三个量定义：

- (1) 常值控制输入 $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m$ ；
- (2) 初始构形 $\bar{g} \in G$ ；
- (3) 常值本体速度 $\bar{\boldsymbol{\xi}}^b \in \mathfrak{g}$ ，满足 $\bar{\boldsymbol{\xi}}^s = \text{Ad}_{\bar{g}}\bar{\boldsymbol{\xi}}^b \in \mathfrak{h}$ 。

以上三个量满足： $\dot{\boldsymbol{\xi}}^b = \Xi(\bar{g}, \bar{\boldsymbol{\xi}}^b, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$ 。称 $\bar{\boldsymbol{\xi}}^b$ 为平航速度，称 $\bar{\mathbf{u}}$ 为平航输入，称 $\mathbf{x}(t) = (g(t), \boldsymbol{\xi}^b)$ 为平航轨迹，其中 $g(t) = \exp(\bar{\boldsymbol{\xi}}^s t)\bar{g} = \bar{g} \exp(\bar{\boldsymbol{\xi}}^b t)$ 。

第二类初等运动：机动，定义为两个平航轨迹之间的有限时间状态转移。

**定义 3.13:** [53] 考虑两条平航轨迹 $\mathbf{x}_1 : [0, \tau_1] \rightarrow \mathcal{X}$ ， $\mathbf{x}_2 : [0, \tau_2] \rightarrow \mathcal{X}$ ，从平航轨迹 $\mathbf{x}_1$ 到平航轨迹 $\mathbf{x}_2$ 的机动由如下三个量定义：

- (1) 持续时间 $T \in \mathbb{R}^+$ ；
- (2) 机动控制 $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ；
- (3) 对称群位移 $h = h_1^{-1}h_2 \in H$ ， $\exists h_1, h_2 \in H$ ，

使得控制 $\mathbf{u}$ 作用下的轨迹 $\mathbf{x}(t) = (g(t), \boldsymbol{\xi}^b(t)) : [0, T] \rightarrow \mathcal{X}$ 满足：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \Psi(h_1, \mathbf{x}_1(\tau_1)), \\ \mathbf{x}(T) &= \Psi(h_2, \mathbf{x}_2(0)), \\ g(T) &= L_h g(0). \end{aligned}$$

**评注 3.14:** 这里假定机动控制 $\mathbf{u}$ 存在并已求得（关于机动控制律的求取，是运动规划的重要内容，依赖于具体的力学系统以及控制约束，本文后续章节将针对具体力学系统给出机动控制律的确定）。对称群元素 $h_1, h_2 \in H$ 又称为匹配群位移，以确保机动前后两条平航轨迹可以连接起来。精确地讲，群 $H$ 作用下的位移 $h_1$ 保证平航轨迹 $\mathbf{x}_1$ 的终了状态可以和机动轨迹 $\mathbf{x}$ 的初始状态连接；而群 $H$ 作用下的位移 $h_2$ 保证平航轨迹 $\mathbf{x}_2$ 的初始状态可以和机动轨迹 $\mathbf{x}$ 的终了状态连接。

评注 3.15: 机动使得系统构形在对称群 $H$ 上产生位移 $h := h_1^{-1}h_2$ 。由于系统在对称群作用下不变, 机动控制 $\mathbf{u}$ 不依赖平航轨迹上的对称群状态。给定两个平航运动, 机动的对称群位移 $h$ 是一个不变量。因此, 机动是在一个给定时间间隔内, 受给定控制, 使得 $\dot{\xi}^b \neq \mathbf{0}$ , 并且在对称群上产生一个固定位移的运动。

对于李群上具有对称性的简单力学系统, 可以将初等运动分为两个集合: 平航运动集合 $S_T$ , 以及机动集合 $S_M$ 。对于集合 $S_T$ 中的任一平航运动, 可以用数据 $(\xi^b, g(0))$ 唯一确定该平航运动的所有信息。对于集合 $S_M$ 中的任一机动, 可以用数据 $(\mathbf{u}, T, h, \mathbf{x}(0))$ 唯一确定该机动的所有信息。基于上述表示方式, 这两类初等运动易于信息数据存储, 实时调用, 可以作为运动基元用于运动规划。

单个力学系统的初等运动可以推广到力学系统网络中来, 相比单个体情形, 需要额外考虑个体间的避碰。网络若协调, 可通过合理的定义相对构形, 使其满足避碰的构形空间约束。假定力学系统网络具有相对平衡点(3.3), 本文定义网络的第一类初等运动: 协调平航运动。

定义 3.16: 力学系统网络的协调平航运动由如下两组量定义:

- (1) 个体1的平航运动 $(\bar{\xi}^b, \bar{g}_1)$ ;
- (2) 个体1与其他个体的相对初始构形 $\bar{g}_{\alpha 1} := \bar{g}_1^{-1}\bar{g}_\alpha$ , 满足 $\bar{g}_{\alpha 1} \in G_{\bar{\xi}^b}$ , 即:

$$\text{Ad}_{\bar{g}_{\alpha 1}} \bar{\xi}^b = \bar{\xi}^b, \alpha = 2, \dots, N.$$

网络的协调平航轨迹可以表示为:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \bar{g}_1 \exp(\bar{\xi}^b t), \\ g_\alpha(t) &= g_1(t) \bar{g}_{\alpha 1}, \quad \text{Ad}_{\bar{g}_{\alpha 1}} \bar{\xi}^b = \bar{\xi}^b, \alpha = 2, \dots, N, \\ \xi_1^b(t) &= \dots = \xi_N^b(t) = \bar{\xi}^b. \end{aligned}$$

评注 3.17: 个体1的选择是任意的, 且与其它个体的相对构形 $\bar{g}_{\alpha 1}$ ,  $\alpha = 2, \dots, N$ 满足避碰要求。由于协调中相对构形保持恒定, 个体 $\alpha$ 的构形轨迹为 $g_\alpha(t) = g_1(t)g_{\alpha 1}(t) = g_1(t)\bar{g}_{\alpha 1}$ 。利用 $G_{\bar{\xi}^b}$  (定义见命题3.4) 的李群结构 [18], 可以证明(2)中的相对构形 $\bar{g}_{\alpha 1} \in G_{\bar{\xi}^b}$ ,  $\alpha = 2, \dots, N$ , 确保了任意两个个体间的初始相对构形 $\bar{g}_{ij} \in G_{\bar{\xi}^b}$ ,  $i \neq j$ , 从而满足协调的条件(命题3.4)。基于个体空间速度的相对平衡点(3.1) 也可定义协调平航运动, 只是不需要(2)中条件的保证了。

根据定义3.16, 网络的协调平航运动可以用数据 $(\bar{\xi}^b, \bar{g}_1, \bar{g}_{\alpha 1})$ ,  $\alpha = 2, \dots, N$ 来存储其全部信息。分配到各个体的存储数据为 $(\xi^b, \bar{g}_1)$ ,  $(\bar{\xi}^b, \bar{g}_{\alpha 1})$ ,  $\alpha = 2, \dots, N$ 。因此, 协调平航运动在数据存储量上等同于个体的平航运动, 不随个体数量增加而增加, 是可扩充的 (scalable)。

本文定义力学系统网络的第二类初等运动: 机动, 为两个协调平航轨迹之间的有限时间状态转移。首先定义保持协调的机动, 以确保机动中的避碰。

**定义 3.18:** 考虑两个协调平航运动:  $(\bar{\xi}^b, \bar{g}_1, \bar{g}_{\alpha 1})$ ,  $(\bar{\eta}^b, \bar{g}_1, \bar{g}_{\alpha 1})$ ,  $\alpha = 2, \dots, N$ , 力学系统网络的协调机动定义为:

$$M_i := (\mathbf{u}_i, T, h_i, \mathbf{x}_i(0)), \quad i = 1, \dots, N,$$

其中 $M_i$ 定义为个体 $i$ 实施的机动,  $T$ 表示统一的机动持续时间,  $\mathbf{u}_i$ 表示个体 $i$ 的机动控制,  $h_i$ 表示机动 $M_i$ 的对称群位移,  $\mathbf{x}_i(0)$ 表示个体 $i$ 的初始状态。网络的机动轨迹满足协调要求:

$$g_\alpha(t) = g_1(t)\bar{g}_{\alpha 1}, \quad t \in [0, T], \quad \alpha = 2, \dots, N.$$

以及如下边值条件:

$$\begin{aligned} \xi_1^b(0) &= \dots = \xi_N^b(0) = \bar{\xi}^b; \\ \xi_1^b(T) &= \dots = \xi_N^b(T) = \bar{\eta}^b; \\ g_1(T) &= L_{h_1}\bar{g}_1; \\ g_\alpha(T) &= L_{h_\alpha}g_\alpha(0) = g_1(T)\bar{g}_{\alpha 1}, \quad \alpha = 2, \dots, N. \end{aligned}$$

**评注 3.19:** 网络协调机动中, 每个个体均执行定义3.13下的单个体机动。这里需要假定在要求机动保持协调时, 个体机动控制 $\mathbf{u}_i$ 存在并已获得, 且均持续 $T$ 时间。需要强调, 机动控制是实现两个平衡状态之间的有限时间转移, 其存在性 (尤其在协调要求下) 不是显然的, 其设计是不简单的。在下一章中, 本文将针对具体力学系统网络, 利用特定力学结构设计机动。

网络的机动还可考虑队形的改变, 则机动中不再保持协调。

定义 3.20: 考虑两个协调平航运动:  $(\bar{\xi}^b, \bar{g}_1, \bar{g}_{\alpha 1})$ ,  $(\bar{\eta}^b, \bar{k}_1, \bar{k}_{\alpha 1})$ , 满足  $\bar{k}_{\alpha 1} = z_{\alpha} \bar{g}_{\alpha 1}$ ,  $\exists z_{\alpha} \in H$ ,  $\alpha = 2, \dots, N$ 。力学系统网络的非协调机动定义为:

$$M_i := (\mathbf{u}_i, T, h_i, \mathbf{x}_i(0)), \quad i = 1, \dots, N,$$

其中  $M_i$  定义为个体  $i$  所实施的机动,  $T$  表示统一的机动持续时间,  $\mathbf{u}_i$  表示个体  $i$  的机动控制,  $h_i$  表示机动  $M_i$  的对称群位移。网络的机动轨迹除满足空间避碰外, 还需满足如下边值条件:

$$\begin{aligned} \xi_1^b(0) &= \dots = \xi_N^b(0) = \bar{\xi}^b; \\ \xi_1^b(T) &= \dots = \xi_N^b(T) = \bar{\eta}^b; \\ g_1(T) &= L_{h_1} \bar{g}_1; \\ g_{\alpha}(T) &= L_{h_{\alpha}} g_{\alpha}(0) = g_1(T) \bar{k}_{\alpha 1}, \quad \alpha = 2, \dots, N. \end{aligned}$$

评注 3.21: 定义 3.20 中将机动前后队形的改变限制在对称群方向上, 这是为了使每个个体都执行定义 3.13 下的单个体机动, 从而网络机动可通过调用个体机动实现。这里需要假定个体机动控制  $\mathbf{u}_i$  存在并已获得, 均持续  $T$  时间, 且各个体在机动中无碰撞。在不发生碰撞情况下, 非协调机动不仅能实现队形的改变, 还能充分发挥个体特性, 提高机动的快速性与灵活性。下一章将针对多个水下航行器分别实现协调/非协调机动, 并对比机动性能。

当个体对称群  $H = G$  时, 定义 3.20 对队形变化没有任何限制; 当  $H \subset G$  时, 若机动前后的队形改变涉及到非对称群方向, 则个体需要额外存储网络非协调机动控制信息。因为在该情形下, 个体不执行定义 3.13 下的机动, 需要根据具体的构形位移 (不再具有不变性), 设计机动控制。造成的影响就是网络机动与个体机动的数据信息不通用, 增加了数据存储的空间需求。类似于协调平航运动数据的存储, 协调/非协调机动数据的存储都是可扩充的。

至此, 本文针对力学系统网络构造的初等运动可由表 3.1 概括:

表 3.1 本文所构造的初等运动，以★表示

	协调	非协调
平航	★	
机动	★	★

### 3.3.2 协调运动规划

利用力学系统网络的两类初等运动，采用Frazzoli [53]提出的组合方法，一个由相对平衡点到相对平衡点的协调运动规划可以表示为组合序列：

$$p := \{(\bar{\xi}_1^b, \tau_1, \bar{g}_1^{\alpha 1}), \pi_1, (\bar{\xi}_2^b, \tau_2, \bar{g}_2^{\alpha 1}), \dots, \pi_W, (\bar{\xi}_{W+1}^b, \tau_{W+1}, \bar{g}_{W+1}^{\alpha 1})\}, \quad (3.12)$$

式中下指标 $W$ 是大于1的自然数，代表序列的长度，即序列由 $W$ 次机动， $W+1$ 次平航组成。 $\pi_i$ 代表第 $i$ 个机动； $\bar{\xi}_i^b$ 代表第 $i$ 个协调平航运动的平航速度； $\tau_i$ 代表第 $i$ 个平航运动时间； $\bar{g}_i^{\alpha 1}$ 代表第 $i$ 个协调平航运动中的个体1与个体 $\alpha$ 固定的相对构形，其中 $\alpha = 2, \dots, N$ 。图3.1示意了平面上一个协调运动规划，两个飞行器在协调平航与（非协调）机动间交替。

将运动规划表示成序列(3.12)的形式，是为了便捷表达出力学系统网络在执行运动规划时的状态信息。以一个简单的运动规划“平航+机动+平航”为例：

$$p = \{(\bar{\xi}_1^b, \tau_1, \bar{g}_1^{\alpha 1}), \pi_1, (\bar{\xi}_2^b, \tau_2, \bar{g}_2^{\alpha 1})\}. \quad (3.13)$$

参考 [53]中的计算步骤，网络起始于初始状态 $\mathbf{x}(0) = (\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_N(0))$ ，执行运动规划(3.13)的状态轨迹可计算为：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \begin{cases} \Psi(\exp(\bar{\xi}_1^b t), \mathbf{x}_1(0)), t \in [0, \tau_1], \\ \Psi(h_{1a}, \mathbf{x}_{1\pi}(t - \tau_1)), t \in [\tau_1, \tau_1 + T], \\ \Psi(h_{1b} \exp(\bar{\xi}_2^b (t - \tau_1 - T)), \mathbf{x}_{1\bar{\xi}_2^b}(0)), t > \tau_1 + T, \end{cases} \\ \mathbf{x}_\alpha(t) &= \begin{cases} \Psi(g_1(t), \bar{g}_1^{\alpha 1}), t \in [0, \tau_1], \\ \Psi(h_{\alpha a}, \mathbf{x}_{\alpha\pi}(t - \tau_1)), t \in [\tau_1, \tau_1 + T], \\ \Psi(g_1(t), \bar{g}_2^{\alpha 1}), t > \tau_1 + T, \alpha = 2, \dots, N, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.14)$$

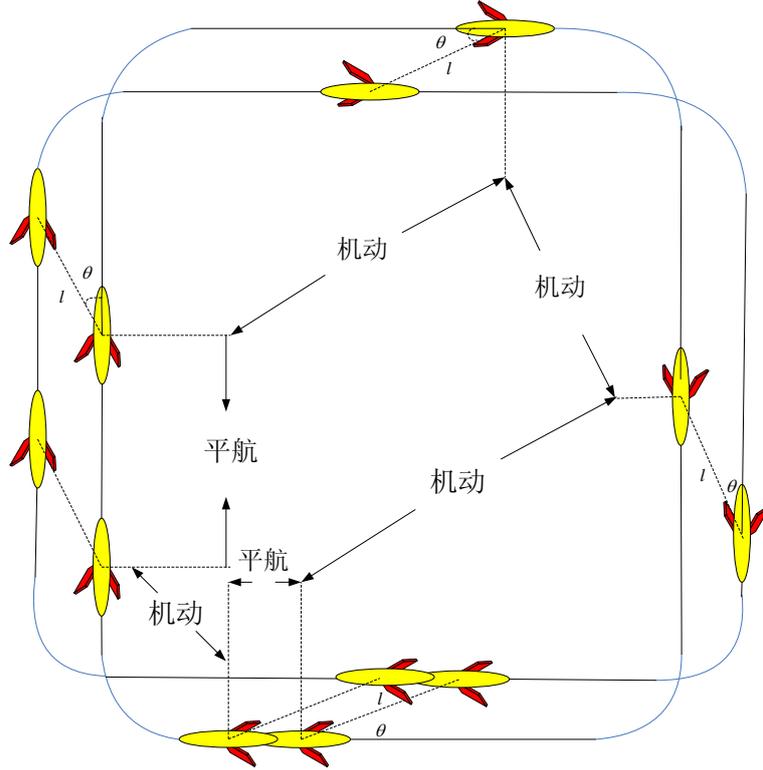


图 3.1 运动规划示意图

式中 $g_1(t)$ 表示个体1的构形轨迹， $T$ 表示机动时间。 $h_{ia}$ ,  $i = 1, \dots, N$ 表示在机动 $\pi_1$ 中，个体 $i$ 与机动前的平航轨迹的匹配群位移， $h_{1b}$ 表示个体1与机动后的平航轨迹的匹配群位移。 $\mathbf{x}_{1\pi}, \mathbf{x}_{2\pi} \dots, \mathbf{x}_{N\pi}$ 表示各个体在各自机动控制下产生的机动轨迹，通过匹配群位移 $h_{ia}$ 与机动前的协调平航轨迹衔接，即满足：

$$\begin{aligned} \Psi(\exp(\bar{\xi}_1^b \tau_1), \mathbf{x}_1(0)) &= \Psi(h_{1a}, \mathbf{x}_{1\pi}(0)), \\ \Psi(g_1(\tau_1), \bar{g}_1^{\alpha 1}) &= \Psi(h_{\alpha a}, \mathbf{x}_{\alpha\pi}(0)), \quad \alpha = 2, \dots, N. \end{aligned}$$

用 $\mathbf{x}_{1\bar{\xi}_2^b}$ 表示个体1机动后的平航轨迹，与机动轨迹 $\mathbf{x}_{1\pi}$ 通过匹配群位移 $h_{1b}$ 衔接：

$$\begin{aligned} \Psi(h_{1b}, \mathbf{x}_{1\bar{\xi}_2^b}(0)) &= \Psi(h_{1a}, \mathbf{x}_{1\pi}(T)), \quad \text{i.e.} \\ \mathbf{x}_{1\pi}(T) &= \Psi(h_{1a}^{-1} h_{1b}, \mathbf{x}_{1\bar{\xi}_2^b}(0)), \quad \text{i.e.} \\ \mathbf{x}_{1\pi}(T) &= \Psi(h_1, \mathbf{x}_{1\bar{\xi}_2^b}(0)), \end{aligned}$$

其中 $h_1 := h_{1a}^{-1} h_{1b}$ 是个体1执行机动 $\pi_1$ 产生的群位移（不变量，见评注3.15）。

表达式(3.14)可以推广至任意长度的运动规划序列。以 $\mathbf{x}_{\xi_{W+1}^b} = (\mathbf{x}_{1\xi_{W+1}^b}, \dots, \mathbf{x}_{N\xi_{W+1}^b})$ 表示网络的第 $W + 1$ 个平航轨迹，以 $\mathbf{x}_{\xi_{W+1}^b}(0) = (\mathbf{x}_{1\xi_{W+1}^b}(0), \dots, \mathbf{x}_{N\xi_{W+1}^b}(0))$ 表示第 $W + 1$ 个平航轨迹的初始状态。

**命题 3.22:** 执行运动规划序列 $p$ (式3.12)后，终了状态计算为：

$$\mathbf{x}_f = \begin{pmatrix} \Psi(g_p^1, \mathbf{x}_{1\xi_{W+1}^b}(0)) \\ \vdots \\ \Psi(g_p^N, \mathbf{x}_{N\xi_{W+1}^b}(0)) \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

式中：

$$g_p^j := \exp(\bar{\xi}_1^b \tau_1) h_j^1 \star \exp(\bar{\xi}_2^b \tau_2) h_j^2 \star \dots \star \exp(\bar{\xi}_{W+1}^b \tau_{W+1}), \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.16)$$

其中 $h_j^i$ 表示个体 $j$ 执行序列 $p$ 中第 $i$ 个机动时产生的对称群位移。

**证明:** 利用李群的乘法运算，按从后向前的顺序将序列 $p$ 中各平航，机动轨迹通过机动对称群位移 $h_j^i$ 依次拼接即得结果(3.16)。 ■

对于个体 $j$ ，定义序列 $p$ 中各机动对称群位移的右乘序列：

$$g_m^j := \prod_{i=1}^W h_j^i = h_j^1 h_j^2 \dots h_j^W,$$

其中下标字母 $m$ 代表机动。

对于个体 $j$ ，定义李代数元素：

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_i^j &= \text{Ad}_{\prod_{k=i}^W (h_j^k)^{-1}} \bar{\xi}_i^b, \quad i = 1, \dots, W, \\ \bar{\eta}_{W+1}^j &= \bar{\xi}_{W+1}^b. \end{aligned}$$

将关系式 $\bar{\xi}_i^b = \text{Ad}_{\prod_{k=i}^W h_j^k} \bar{\eta}_i^j$ ,  $i = 1, \dots, W$ 代入式(3.16)可得：

$$\begin{aligned} g_p^j &= h_j^1 h_j^2 \dots h_j^W \star \exp(\bar{\eta}_1^j \tau_1) \star \exp(\bar{\eta}_2^j \tau_2) \star \dots \star \exp(\bar{\xi}_{W+1}^j \tau_{W+1}), \\ &= g_m^j \star \prod_{i=1}^{W+1} \exp(\bar{\eta}_i^j \tau_i). \end{aligned} \quad (3.17)$$

与文献 [53]的结果相仿，等式(3.15, 3.17)表明，协调运动规划序列 $p$ 对个体 $j$ 的构形引起的群位移可以分解为两部分，一是由序列中所有机动产生的群位移 $g_m^j$ ；一是由 $W$ 个李代数 $\eta_i^j$ 的指数映射带来的群位移。

这样，通过动力学量化组合，可将原二阶动力学规划问题转化为构形李群上的一阶运动学规划问题。这种转化不作任何近似，能精确获取原动力学的状态轨迹。唯一的代价就是将所有可行的轨迹都限制为一系列初等运动的组合。

基于动力学量化组合的规划算法最大的优点就是所产生的轨迹是动力学可行的，并且在平航轨迹上，只需抗扰动的简单轨迹镇定，或无需控制。动力学量化组合思想是将运动规划问题化整为零，各个突破，降低了整体求解运动规划轨迹的难度。这种思想可用一个有向图表示，图3.2中的每一节点代表一个平航运动，节点之间的有向边表示机动。运动规划即寻找一条连接初始状态与终了状态的序列。

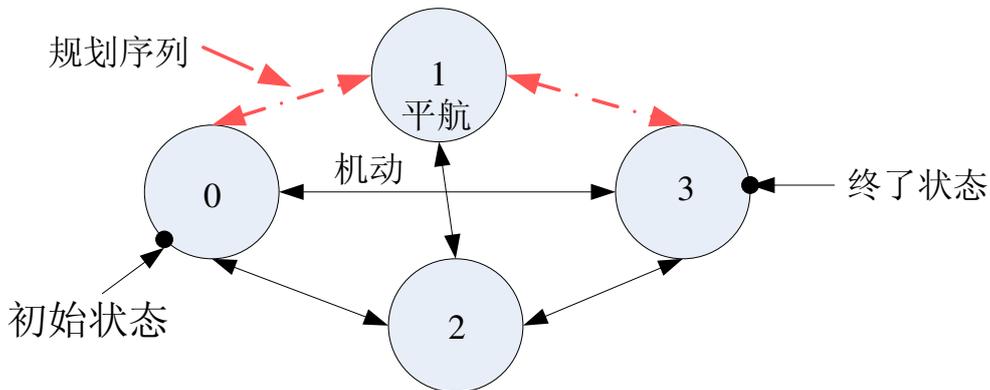


图 3.2 运动规划有向图

至此，本节通过定义力学系统网络的协调运动，在完备的网络通信机制以及个体平航轨迹之间存在有限时间机动控制的假定下，将用于单个力学系统运动规划的量化组合方法 [53]，通过协调机制推广到力学系统网络的协调运动规划。本节构造了协调平航运动(定义3.16)、协调机动(定义3.18)、非协调机动(定义3.13)这三种初等运动；组合了运动规划序列(3.12)并推导了规划轨迹(3.15, 3.17)。这些理论结果将在下一章多个水下航行器的协调运动规划中得到应用。

### 3.4 应用实例

本章最后以一个具体的欠驱动力学系统协调实例来应用所设计的协调镇定律。采用Woolsey [34, 69] 提出的用于研究刚体旋转稳定性的例子，内置滑块的平面旋转圆盘。这里考虑两个相同圆盘的协调控制，如图3.3所示。

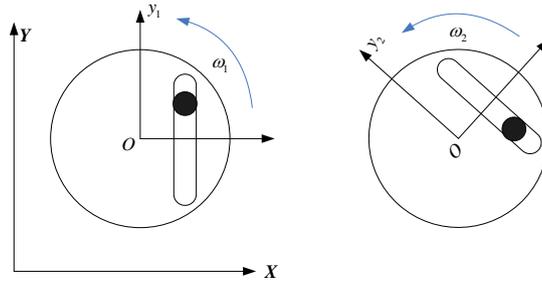


图 3.3 双圆盘系统示意

每个圆盘内嵌一滑槽，里安装一滑块，受控制力作用。圆盘的本体坐标系原点与圆盘几何中心重合，本体坐标系 $\mathbf{b}_y$ 轴与滑槽方向平行， $\mathbf{b}_x$ 轴与其垂直。滑槽在 $\mathbf{b}_x$ 轴上的位置为 $a$ 。滑块在控制 $u$ 作用下沿滑槽运动， $y$ 代表滑块沿 $\mathbf{b}_y$ 轴的位移。单个圆盘的构形为 $(y, \theta) \in \mathbb{R} \times SO(2)$ ，其中 $\theta$ 代表圆盘 $\mathbf{b}_x$ 轴偏离惯性系 $\mathbf{X}$ 轴的角度。

系统的拉格朗日函数即为系统动能，其不依赖于变量 $\theta$ ，因此具有 $SO(2)$ 对称。对称简化后的拉格朗日函数可写为 $l : TQ/SO(2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$l(\omega, y, \dot{y}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega \\ \dot{y} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I + m(a^2 + y^2) & ma \\ ma & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$

为了简化表达，按Reddy [69]的方法定义无量纲量：

$$\tilde{y} = \frac{y}{a}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \tilde{t} = \omega_0 t, \quad \alpha = \frac{I}{ma^2} + 1, \quad \tilde{l} = \frac{l}{ma^2\omega_0^2},$$

其中 $\omega_0$ 是平航角速度。记 $\dot{\tilde{y}} = \mathbf{d}/\mathbf{d}\tilde{t}$ ，并省去上标一弯， $l$ 变为：

$$l(\omega, y, \dot{y}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega \\ \dot{y} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha + y^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \dot{y} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

双圆盘系统的拉格朗日函数 $l_g$ 为 $l_g(\omega_1, y_1, \dot{y}_1, \omega_2, y_2, \dot{y}_2) = l_1(\omega_1, y_1, \dot{y}_1) + l_2(\omega_2, y_2, \dot{y}_2)$ , 其中 $l_1, l_2$ 由(3.18)给出, EL方程为:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l_g}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) &= \mathbf{0}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l_g}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial l_g}{\partial \mathbf{y}} &= \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)^T$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ 。记:

$$\pi_{si} = \frac{\partial l_i}{\partial \omega_i} = (\alpha + y_i^2)\omega_i + \dot{y}_i = \text{const}, \quad i = 1, 2.$$

系统的总角动量 $\pi_{sg} = \pi_{s1} + \pi_{s2}$ 是守恒的, 整个系统在一个等角动量面上运动。

如果两个圆盘具有相同的角动量, 则系统具有如下形式的相对平衡点:

$$e : (\omega_1, y_1, \dot{y}_1, \omega_2, y_2, \dot{y}_2) = (1, \bar{y}, 0, 1, \bar{y}, 0), \quad (3.20)$$

对应的平航运动是每个圆盘以常值角速度 $\omega_0$ 旋转, 并且两个滑块相对于各自圆盘静止于滑槽内的位移 $\bar{y}$ 处。由于EL方程在相对平衡点(3.20)处的线性化方程具有正实部的特征根, 因此相对平衡点(3.20)是不稳定的。为了镇定该平航运动, 需要做出如下假设:

**假设 3.23:** 两圆盘具有相同的初始角动量 $\pi_0$ 。

**假设 3.24:** 两个圆盘能互相传递各自滑块的位置信息。

为便于利用CL法, 将受控EL方程(3.19)写为坐标形式:

$$\mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{C}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{G}\mathbf{u}, \quad (3.21)$$

式中:

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_1 \end{pmatrix},$$

记  $i = 1, 2$ , 上式中:

$$\boldsymbol{\psi}_i = \begin{pmatrix} \omega_i \\ \dot{y}_i \end{pmatrix}, \mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} \alpha + y_i^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} y_i \dot{y}_i & y_i \omega_i \\ -y_i \omega_i & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

记闭环方程为:

$$\mathbf{M}_c \dot{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{C}_c \boldsymbol{\psi} + \frac{\partial V_c}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0},$$

其中  $V_c$  是滑块位置  $\mathbf{y}$  的函数。方程(3.8)给出了匹配条件:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_1^\perp & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_1^\perp \end{pmatrix} \left( \mathbf{M} \mathbf{M}_c^{-1} \left( -\mathbf{C}_c \boldsymbol{\psi} - \frac{\partial V_c}{\partial \mathbf{y}} \right) + \mathbf{C} \boldsymbol{\psi} \right) = \mathbf{0}, \quad (3.22)$$

式中  $\mathbf{G}_1^\perp = (1, 0)$ 。整理(3.22)中依赖速度的项, 得到动能匹配条件:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_1^\perp & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_1^\perp \end{pmatrix} (-\mathbf{M} \mathbf{M}_c^{-1} \mathbf{C}_c \boldsymbol{\psi} + \mathbf{C} \boldsymbol{\psi}) = \mathbf{0}, \quad (3.23)$$

整理(3.22)中独立于速度的项, 得到势能匹配条件:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_1^\perp & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_1^\perp \end{pmatrix} \mathbf{M} \mathbf{M}_c^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial V_c}{\partial y_1} \\ 0 \\ \frac{\partial V_c}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.24)$$

为了镇定形如(3.20)的相对平衡点, 构造如下人工势能  $V_c$ :

$$V_c = \frac{k_1}{2}(y_1 - y_2)^2 + \frac{k_2}{2}(y_1 - \bar{y})^2, \quad (3.25)$$

式中的自由参数  $k_1, k_2$  将在稍后的稳定性分析中进行选取。从物理上讲, 这个人工势能好比在一对圆盘内的滑块之间安装了一个虚拟的弹簧。

为了求得满足匹配条件的闭环动能度量  $\mathbf{M}_c$ , Reddy [69] 利用线性代数运算

得到了匹配解:

$$\mathbf{M}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{c1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{c2} \end{pmatrix}, \mathbf{M}_{ci} = \begin{pmatrix} \alpha + y_i^2 & 1 \\ 1 & \frac{\rho}{\alpha + y_i^2} \end{pmatrix}, i = 1, 2, \quad (3.26)$$

式中 $\rho$ 也是待选取的自由参数。为了使 $\mathbf{M}_c$ 非奇异, 需要有 $\text{Det}(\mathbf{M}_c) \neq 0 \Rightarrow \rho \neq 1$ . Reddy仅实施动能整形, 镇定了单个圆盘在滑块平衡位置 $\bar{y} = 0$ 下的匀速转动。

然而对于滑块平衡位置 $\bar{y} \neq 0$ , 我们无法从匹配解(3.26)中选出一组解使得闭环系统在相对平衡点(3.20)处稳定; 重新寻找其它匹配解需要求解PDEs, 并且同样不能确保能找到稳定解。本文将匹配解(3.26)用于如下系统:

$$\bar{\mathbf{M}}\dot{\boldsymbol{\psi}} + \bar{\mathbf{C}}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{G}\bar{\mathbf{u}}, \quad (3.27)$$

式中 $\bar{\mathbf{M}}$ 与 $\bar{\mathbf{C}}$ 具有在(3.21)中同样的结构, 只是其中元素为:

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \begin{pmatrix} \alpha + (y_i - \bar{y})^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}}_i = \begin{pmatrix} (y_i - \bar{y})\dot{y} & (y_i - \bar{y})\omega_i \\ -(y_i - \bar{y})\omega_i & \frac{-\omega_i(y_i - \bar{y})}{(\alpha + (y_i - \bar{y})^2)^2} \end{pmatrix}.$$

如下引理给出了系统(3.21)与系统(3.27)解之间的关联。

**引理 3.25:** 系统(3.21)与系统(3.27)在局部坐标 $(y_1, y_2, \boldsymbol{\psi})$ 下产生同样的轨迹, 当且仅当各自的控制满足:

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}^T [\mathbf{M}\bar{\mathbf{M}}^{-1} (\mathbf{G}\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{C}}\boldsymbol{\psi}) + \mathbf{C}\boldsymbol{\psi}]. \quad (3.28)$$

**证明:** 由系统EL方程(3.21), 与(3.27)分别求解 $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\psi}} &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{C}\boldsymbol{\psi}), \\ \dot{\boldsymbol{\psi}}_{\text{bar}} &= \bar{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{G}\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{C}}\boldsymbol{\psi}_{\text{bar}}), \end{aligned}$$

式中注有下标“bar”的变量表示其属于系统(3.27)。直接验证 $\dot{\boldsymbol{\psi}} = \dot{\boldsymbol{\psi}}_{\text{bar}}$ 当且仅当(3.28)满足。 ■

将动能度量匹配解(3.26)用于系统(3.27), 若存在稳定解, 则控制(3.28)可

以镇定原系统(3.21)。对系统(3.27)实现(3.25)以及(3.26)的能量整形控制为：

$$\bar{\mathbf{u}}_{\text{es}} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \left( \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{M}}_c^{-1} \left( -\bar{\mathbf{C}}_c \boldsymbol{\psi} - \frac{\partial V_c}{\partial \mathbf{y}} \right) + \bar{\mathbf{C}} \boldsymbol{\psi} \right), \quad (3.29)$$

式中 $\bar{\mathbf{M}}_c$ 与 $\mathbf{M}_c$ 具有相同形式，只是变量 $y_i$ 替换为 $z_i := (y_i - \bar{y})$ ，以及 $\bar{\mathbf{C}}_c = \text{diag}(\bar{\mathbf{C}}_{c1}, \bar{\mathbf{C}}_{c2})$ ，其中：

$$\bar{\mathbf{C}}_{ci} = \begin{pmatrix} z_i \dot{y}_i & z_i \omega_i \\ -z_i \omega_i & \frac{-\rho \omega_i z_i}{(\alpha + z_i^2)^2} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

匹配之后，需要进行系统(3.27)在相对平衡点：

$$\bar{\mathbf{e}} : (\omega_1, z_1, \dot{y}_1, \omega_2, z_2, \dot{y}_2) = (1, 0, 0, 1, 0, 0)$$

处的稳定性分析，其对应系统(3.21)的相对平衡点(3.20)。整形后系统的总能量 $E_c = \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}^T \bar{\mathbf{M}}_c \boldsymbol{\psi} + V_c$ 是守恒的，可用于构造李亚普诺夫函数。

**定理 3.1:** 能量整形控制 $\bar{\mathbf{u}}_{\text{es}}$ 中控制参数取 $\rho < 1, k_1 < 0, k_2 < 0$ 时，镇定 $\bar{\mathbf{e}}$ 。

**证明:** 李亚普诺夫稳定性可由能量—喀什米尔法 [70, 71]分三步证明。一、构造候选李亚普诺夫函数：

$$E_\phi = E_c + \phi(\pi_{sg}), \quad (3.30)$$

式中 $\phi(\cdot)$ 是关于 $\pi_{sg}$ 的待设计光滑函数。由于 $\pi_{sg}$ 是守恒量， $E_\phi$ 也是守恒量。二、构造函数 $\phi(\pi_{sg})$ 使得相对平衡点 $\bar{\mathbf{e}}$ 为 $E_\phi$ 的驻点。三、确定整形参数，使得 $\text{Hess} E_\phi$ 在 $\bar{\mathbf{e}}$ 处定号，则充分证明李亚普诺夫稳定性。

构造函数 $\phi(\pi_{sg})$ 如下：

$$\phi(\pi_{sg}) = \frac{\sigma}{2} (\pi_{s1}^2 + \pi_{s2}^2) - (1 + \sigma \alpha) \pi_{s1} - (1 + \sigma \alpha) \pi_{s2}.$$

通过计算，成立 $\text{grad}(E_\phi)|_{\bar{\mathbf{e}}} = \mathbf{0}$ 。若满足：

$$1 + \alpha \sigma < 0, \quad \rho - 1 < 0, \quad k_1 < 0, \quad k_2 < 0,$$

则成立  $\text{Hess}E_\phi|_{\bar{e}} < 0$ 。因此，相对平衡点变成守恒量  $E_\phi$  的极大值点，从而推知其是李亚普诺夫稳定的。 ■

在能量整形控制(3.29) 增加反馈阻尼设计（类似 [69] 中的步骤）：

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_{\text{es}} + \bar{\mathbf{u}}_{\text{diss}}.$$

闭环方程变为：

$$\bar{\mathbf{M}}_c \dot{\boldsymbol{\psi}} + \bar{\mathbf{C}}_c \boldsymbol{\psi} + \frac{\partial V_c}{\partial \mathbf{y}} = \bar{\mathbf{M}}_c \bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{G} \bar{\mathbf{u}}_{\text{diss}}.$$

总能量不再守恒，其变化率为：

$$\dot{E}_c = \boldsymbol{\psi}^T \bar{\mathbf{M}}_c \bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{G} \bar{\mathbf{u}}_{\text{diss}}.$$

选择  $\mathbf{G} \bar{\mathbf{u}}_{\text{diss}} = \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{M}}_c^{-1} \mathbf{R} \boldsymbol{\psi}$  使得  $\dot{E}_c = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\psi}$ 。记耗散矩阵：

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{\text{diss}} \end{pmatrix},$$

其中  $k_{\text{diss}}$  为耗散系数。反馈阻尼设计为：

$$\bar{\mathbf{u}}_{\text{diss}} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{M}}_c^{-1} \mathbf{R} \boldsymbol{\psi}. \quad (3.31)$$

**定理 3.2:** 反馈控制  $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_{\text{es}} + \bar{\mathbf{u}}_{\text{diss}}$  在  $k_{\text{diss}} > 0$  时，在等动量面  $\pi_{s1} = \pi_{s2} = \pi_{s2}|_{\bar{e}} = \alpha$  上渐近镇定相对平衡点  $\bar{e}$ 。

**证明:** 利用(3.30)定义的  $E_\phi$  为李亚普诺夫函数。在等动量面  $\pi_{s1} = \pi_{s2} = \alpha$  上考虑任何一个含有相对平衡点  $\bar{e}$  的紧致，正不变集  $\Omega$ 。记  $W$  为  $\Omega$  中所有满足  $\dot{E}_\phi = 0$  点的集合。由于  $\pi_{sg}$  守恒且  $k_{\text{diss}} > 0$ ，则有：

$$\dot{E}_\phi = \dot{E}_c = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\psi} = k_{\text{diss}} (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) \geq 0.$$

因此，

$$W = \{(\omega_1, z_1, \dot{y}_1, \omega_2, z_2, \dot{y}_2) \in \Omega | \dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0\}.$$

记 $M$ 为 $W$ 中的最大不变集, 则 $M$ 中的点满足 $(\dot{y}_1, \dot{y}_2) \equiv (0, 0)$ 。

写出 $\dot{y}_1, \dot{y}_2$ 的表达式, 并设 $\dot{y}_i = 0$ , 可得 $\dot{y}_i = 0$ 当且仅当 $z_i = 0$ 。考虑到 $\pi_{s1}$ 与 $\pi_{s2}$ 守恒, 从而有:

$$M = (1, 0, 0, 1, 0, 0).$$

根据LaSalle不变原理, 任何起始于 $\Omega$ 的轨迹都将随着 $t \rightarrow \infty$ 趋近于 $M$ , 从而渐近稳定性得证。 ■

利用引理3.25, 立刻得到定理3.2的推论:

**推论 3.26:** 反馈控制:

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}^T [\mathbf{M}\bar{\mathbf{M}}^{-1} (\mathbf{G}(\bar{\mathbf{u}}_{\text{es}} + \bar{\mathbf{u}}_{\text{diss}}) - \bar{\mathbf{C}}\boldsymbol{\psi}) + \mathbf{C}\boldsymbol{\psi}]$$

在选取参数 $\rho < 1, k_1 < 0, k_2 < 0, k_{\text{diss}} > 0$ 时, 渐近镇定系统(3.21)相对平衡点(3.20)。

### 3.4.1 数值仿真

假设双圆盘系统待镇定的相对平衡点为:

$$(\omega_1, y_1, \dot{y}_1, \omega_2, y_2, \dot{y}_2) = (1, \bar{y}, 0, 1, \bar{y}, 0).$$

选取圆盘的物理参数使得 $\alpha = 2$ , 能量整形控制设计为:

$$\begin{aligned} u_{\text{es1}} &= -\omega_1^2 y_1 + \frac{1}{\rho - 1} \left( -2\omega_1 \dot{y}_1 \left( \frac{\rho}{\alpha + (y_1 - \bar{y})^2} \right) (y_1 - \bar{y}) \right. \\ &\quad + (\alpha - 1 + \bar{y}^2 - 2\bar{y}y_1 + y_1^2) \left( -\bar{y} - \omega_1^2 (\bar{y} - y_1) \right. \\ &\quad \left. \left. + 2y_1 + \frac{\rho\omega_1 \dot{y}_1 (y_1 - \bar{y})}{(\alpha + (\bar{y} - y_1)^2) - y_2} \right) \right), \\ u_{\text{es2}} &= -\omega_2^2 y_2 + \frac{1}{\rho - 1} \left( -2\omega_2 \dot{y}_2 \left( \frac{\rho}{\alpha + (\bar{y} - y_2)^2} - 1 \right) (y_2 - \bar{y}) \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$+ (\alpha - 1 + \bar{y}^2 - 2\bar{y}y_2 + y_2^2) \left( -y_1 - \omega_2^2(\bar{y} - y_2) + y_2 + \frac{\rho\omega_2\dot{y}_2(y_2 - \bar{y})}{(\alpha + (\bar{y} - y_2)^2)^2} \right).$$

反馈阻尼设计为:

$$u_{\text{diss}i} = \frac{1}{\rho - 1} \left( k_{\text{diss}}\bar{y}^2\dot{y}_i + \bar{y}(-\omega_i^2(\rho - 1) - 2k_{\text{diss}}\dot{y}_i y_i) + k_{\text{diss}}\dot{y}_i(\alpha - 1 + y_i^2) \right). \quad (3.33)$$

其中 $i = 1, 2$ , 控制参数 $k_1 = k_2 = -1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $k_{\text{diss}} = 0.5$ 。双圆盘的初始条件应满足假设3.23, 选择具有相同角动量的初始状态:

$$(\omega_1, y_1, \dot{y}_1, \omega_2, y_2, \dot{y}_2)(0) = (0.5, -0.5, 0.875, 0.75, 0, 0.5).$$

系统在等动量面 $\pi_{s1} = \pi_{s1}(0) = 2$ ,  $\pi_{s2} = \pi_{s2}(0) = 2$ 上演化。

令 $\bar{y} = 0$ , 图3.4 示意了镇定平航运动中系统状态, 以及受控能量的变化。

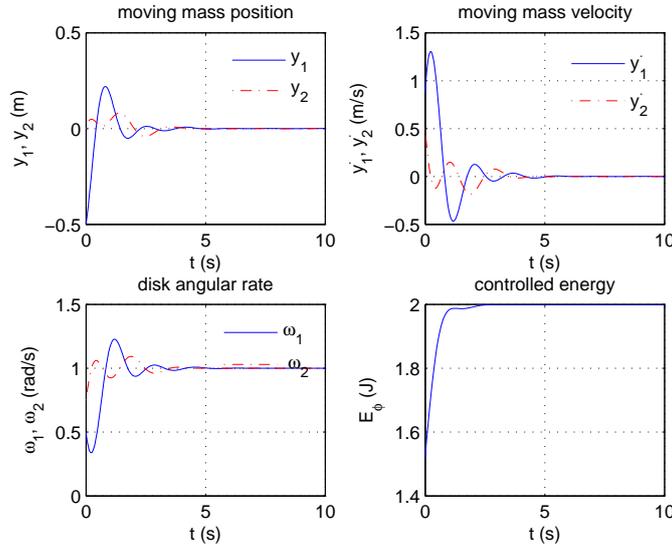


图 3.4 系统状态及受控能量的变化

左上角图示了滑块位置的收敛至 $\mathbf{y} = 0$ , 右上角图示了相应的速度曲线。左下角图示了两圆盘角速度的同步, 右下角图示了系统的受控能量单调递增至最大值, 因为相对平衡点位于受控能量的极大值处。

在相同的动量面上，令  $\bar{y} = 0.5$ 。图3.5 示意了滑块处于非零平衡位置的平航运动镇定。左上角图示了滑块位置的收敛至  $\mathbf{y} = (0.5, 0.5)$ ，右上角图示了相

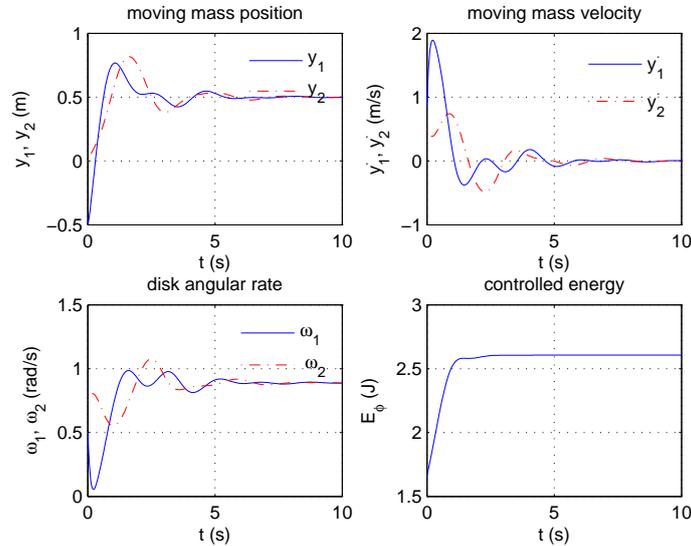


图 3.5 滑块处于非零平衡位置的平航运动镇定

应的速度曲线。左下角图示了两圆盘角速度的同步，只是同步值比前一例中要小，这是因为滑块平衡位置的改变导致系统动能度量的改变，而系统的总动量确没有改变，因此稳态速度值是不同的。右下角图示了系统的受控能量单调递增至最大值，因为相对平衡点位于受控能量的极大值处。

下面考虑从相对平衡点  $(\omega_1, y_1, \dot{y}_1, \omega_2, y_2, \dot{y}_2) = (1, 0.5, 0, 1, 0.5, 0)$  到  $(\omega_1, y_1, \dot{y}_1, \omega_2, y_2, \dot{y}_2) = (1, 0, 0, 1, 0, 0)$  的机动。这里仅通过仿真（真正意义上的机动设计放在下一章中），以控制切换来实现稳态运动的拼接，这样做的前提是切换前的平航轨迹位于切换后平航轨迹的收敛内（通过选取合适的仿真参数）。

切换控制构造如下：

$$\mathbf{u} = \begin{cases} (\mathbf{u}_{\text{es}} + \mathbf{u}_{\text{diss}})|_{\bar{y}=0.5}, & t \in [0, 10), \\ (\mathbf{u}_{\text{es}} + \mathbf{u}_{\text{diss}})|_{\bar{y}=0}, & t \in [10, 20], \end{cases}$$

其中  $\mathbf{u}_{\text{es}} = (u_{\text{es}1}, u_{\text{es}2})$  由式(3.32)给出， $\mathbf{u}_{\text{diss}} = (u_{\text{diss}1}, u_{\text{diss}2})$  由式(3.33)给出。控制参数为  $k_1 = k_2 = -1$ ， $\rho = 0.5$ ， $k_{\text{diss}} = 0.5$ 。

图3.6至图3.8 示意了两个平航运动的拼接。

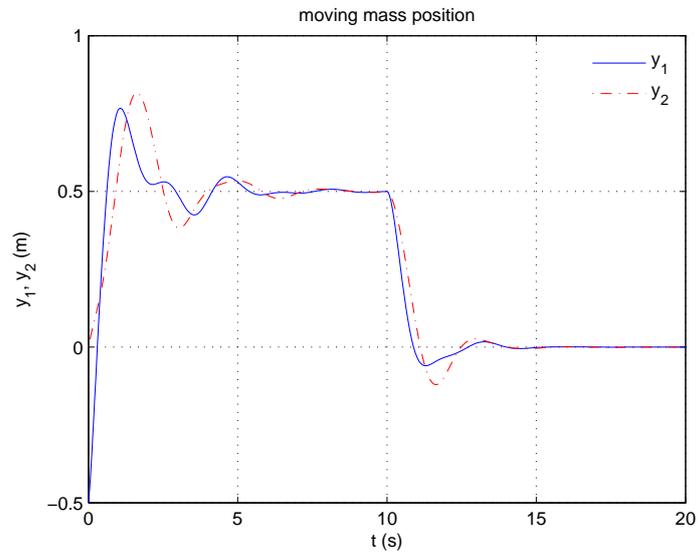


图 3.6 两个平航运动间的机动：滑块位置的演化

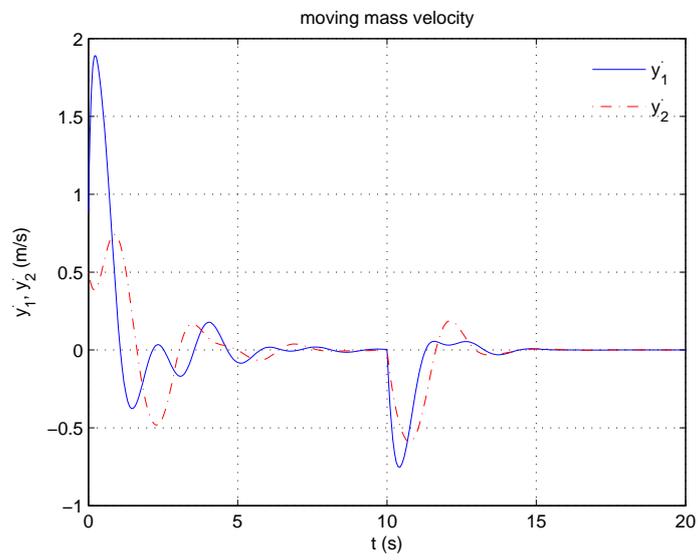


图 3.7 两个平航运动间的机动：滑块速度的演化

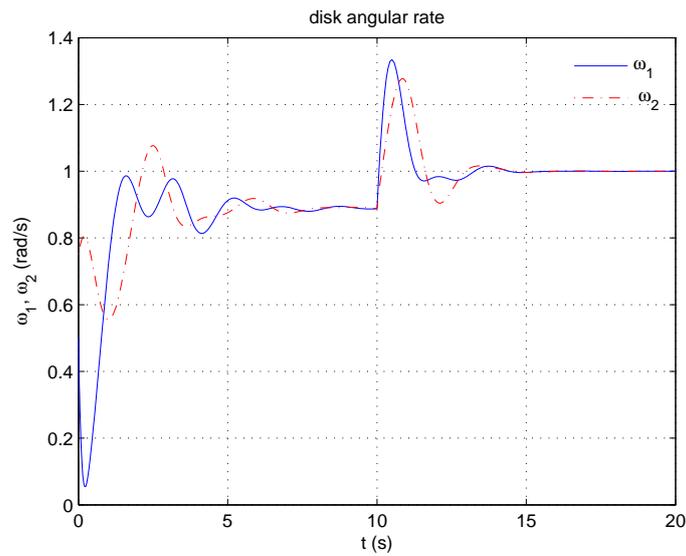


图 3.8 两个平航运动间的机动：圆盘角速度的演化

仿真结果表明，基于能量整形的相对平衡点的镇定设计具有大收敛域，可以直接通过控制的切换来实现相对平衡点的稳定切换。然而，切换处存在较大的速度突变，如滑块速度，这意味着瞬时需要很大的控制力/力矩输入；而且，机动是渐近完成的，不是有限时间完成。这个问题将在下一章的机动设计中得到解决。

至此，本章把能量整形思想推广到多个力学系统协调的镇定，把动力学量化组合思想推广到多力学系统的协调运动规划。这种利用力学系统结构性质的控制设计，及其具体应用以及特点将在下一章中多个水下航行器的协调中得到演示。



## 第四章 多个水下航行器的镇定与协调运动规划

近年来，无人水下航行器（Autonomous Underwater Vehicle）越来越受到广大海洋工程师以及控制理论专家的关注。比如，多个水下航行器以特定的编队运动，可以构建一个有效的移动传感器网络，用于水下环境监测、资源勘测、生物种群探索等任务。另一方面，水下航行器的应用也为控制理论专家提供了一个丰富的测试平台，用于验证最新提出的协调控制技术。在水下航行器动力学和控制方面的代表研究包括 [72–74]，近期针对力学系统网络的协调控制研究可参见 [39,41]。

本章将第三章中基于能量整形的协调镇定律，以及基于动力学量化组合的协调运动规划算法应用于水下航行器网络。本章分别在全驱动，欠驱动情形下研究水下航行器网络协调平航运动的镇定，并在全驱动情形下设计机动，实现协调运动规划。

### 4.1 水下航行器的动力学

#### 4.1.1 全驱动模型

参考Leonard [73]的工作，一个全驱动水下航行器（以下也简称航行器）建模成浸没在不可压缩，不可旋转，无粘滞性，且在无穷远处静止的理想流体中的一个质量均匀分布的椭球形刚体，如图4.1所示。本章假设航行器是悬浮(neutrally buoyant)的，即其所受重力等于所受浮力。

记 $\{O, \mathbf{I}_x, \mathbf{I}_y, \mathbf{I}_z\}$ 为惯性坐标系， $\{O_b, \mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y, \mathbf{b}_z\}$ 为本体坐标系。本体坐标系原点 $O_b$ 位于航行器的浮心，三个坐标轴与椭球刚体的各惯性主轴重合，不失一般性，假设 $\mathbf{b}_x$ 轴为最长轴。在本体坐标系中，从浮心指向重心的向量记为 $\mathbf{r}_g = \gamma \mathbf{b}_z$ ，距离 $\gamma > 0$ 意味着航行器是低重心结构。在本体坐标系中，以 $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{R}^T \mathbf{I}_z$ 表示的重力方向，其中 $\mathbf{R} \in SO(3)$ 是航行器在惯性系中的姿态描述。向量 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ 代表本体坐标系原点在惯性系中的位置向量。以 $\boldsymbol{\xi}^b = (\boldsymbol{\omega}^T, \mathbf{v}^T)^T \in \mathbb{R}^6$ 表示航行器的本体速度，其中 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ 与 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ 分别表示航行器的本体角速度与线速度。以 $g = (\mathbf{R}, \mathbf{b}) \in SE(3)$ 表示航行器的构形，航行器的运动学方程可写为：

$$\dot{g} = g \widehat{\boldsymbol{\xi}}^b. \quad (4.1)$$

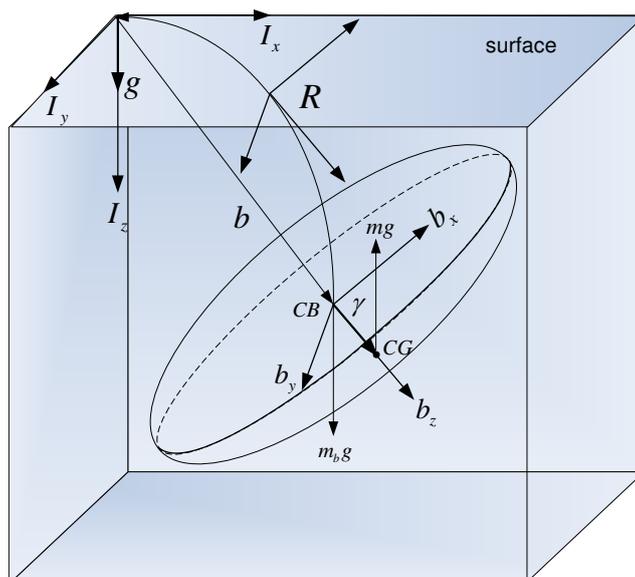


图 4.1 水下航行器模型示意

对于航行器的动力学，浮力与重力起到重要作用。浮力 $-mg\mathbf{I}_z$ 作用在航行器的浮心，其中 $m$ 是航行器排开水的重量， $g$ 是重力加速度。重力 $m_b g\mathbf{I}_z$ 作用在航行器的重心，其中 $m_b$ 是航行器的重量。在悬浮假设下，有 $m_b = m$ 。由于航行器浸没在一理想流体中，航行器的运动势必会引起周围流体的运动（反之亦然）。这种效应可以通过额外惯量(added inertial)来体现，其在航行器运动时，计算激发周围水流运动所需的能量。

本章假设航行器排开的流体的主轴与航行器的主轴是重合的，因此航行器/水流系统的转动惯量矩阵 $\mathbf{J}_{b/f}$ ，以及质量矩阵 $\mathbf{M}_{b/f}$ 具有对角形式。航行器/水流的能量函数，即哈密尔顿函数，为系统动能与势能之和：

$$H = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^{bT} \mathbf{M} \boldsymbol{\xi}^b - m_b g \mathbf{r}_g \cdot \boldsymbol{\Gamma}, \quad (4.2)$$

式中动能度量的矩阵形式为：

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{b/f} & m_b \hat{\mathbf{r}}_g \\ -m_b \hat{\mathbf{r}}_g & \mathbf{M}_{b/f} \end{pmatrix}.$$

在本地坐标系中以 $\mathbf{p}$ 表示航行器/水流系统相对于惯性系的线动量，以 $\boldsymbol{\pi}$ 表示

航行器/水流系统关于本体坐标系原点的角动量。它们和本体速度 $\boldsymbol{\xi}^b$ 的关系为：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\xi}^b} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}.$$

沿着任意方向移动惯性系，或绕重力方向旋转惯性系，哈密尔顿函数(4.2)维持不变。利用对称性化简 [38, 66]，简化在子余切丛 $(\mathbf{M}\boldsymbol{\xi}^b, \boldsymbol{\Gamma})$ 上的航行器/水流系统动力学方程由哈密尔顿方程描述 [73]：

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\pi}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\Gamma}} \end{pmatrix} = \Lambda(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\Gamma}) \text{grad}H(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\Gamma}) + \boldsymbol{u}, \quad (4.3)$$

其中泊松张量 $\Lambda(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\Gamma})$ 定义为：

$$\Lambda(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\Gamma}) := \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\pi}} & \hat{\boldsymbol{p}} & \hat{\boldsymbol{\Gamma}} \\ \hat{\boldsymbol{p}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{\boldsymbol{\Gamma}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

哈密尔顿方程(4.3)具体可写为：

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\pi}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\Gamma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{v} + m_b \mathbf{g} \boldsymbol{r}_g \times \boldsymbol{\Gamma} \\ \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\Gamma} \times \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_\tau \\ \boldsymbol{u}_f \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

其中 $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_\tau^T, \boldsymbol{u}_f^T)^T$  代表控制力，力矩。航行器/水流系统的动力学也可以由拉格朗日函数：

$$L = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^{bT} \mathbf{M} \boldsymbol{\xi}^b + m_b \mathbf{g} \boldsymbol{r}_g \cdot \boldsymbol{\Gamma},$$

对应的EL方程表示，其同样可转化为哈密尔顿方程(4.4)。本章为了表达简明，采用哈密尔顿形式的表达方式，这并不影响基于能量整形的控制设计。

由于航行器/水流系统是悬浮的，当系统不受外力时（自由系统），在惯性系中表示的系统线动量沿着方程(4.4)的解是守恒的。因此，自由系统的动力学

在一个等线动量面上演化。除此之外，在惯性系中沿重力方向的线动量也是守恒的。Woolsey [75]构造了下面几个光滑的函数，称为喀什米尔函数：

$$C_1 = \frac{1}{2}\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}, \quad C_2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{\Gamma}, \quad C_3 = \frac{1}{2}\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma}. \quad (4.5)$$

从构造可以看出喀什米尔函数是守恒的，与哈密顿函数一起，这些守恒量在分析航行器稳态运动的稳定性时将起到重要作用。

动力学方程(4.4) 通过sharp映射 $\mathbf{M}^{-1}$  表达在系统子切丛 $(\xi^b, \mathbf{\Gamma})$ 上：

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{\Gamma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{b/f}^{-1} \mathbf{T} \\ \mathbf{M}_{b/f}^{-1} \mathbf{F} \\ \mathbf{\Gamma} \times \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

其中，

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{J}_{b/f} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}_{b/f} \mathbf{v} \times \mathbf{v} + m_b \mathbf{g} \hat{\mathbf{r}}_g \mathbf{\Gamma} + \mathbf{u}_\tau, \\ \mathbf{F} &= \mathbf{M}_{b/f} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}_f. \end{aligned}$$

描述航行器行为的完整方程由运动学方程(4.1)，以及动力学方程(4.4) 或等价的动力学方程(4.6) 组成。

航行器的相对平衡点为动力学方程(4.4)（或方程(4.6)）的平衡点，同时也是对称群 $SE(2)$ 的作用轨道。一类相对平衡点具有如下形式：

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ m_b \gamma p / m_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_e = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

其中 $m_1$ 为质量矩阵 $\mathbf{M}_{b/f}$  沿 $\mathbf{b}_x$ 轴向的分量，即矩阵的(1,1)元素。 $p$ 为平衡状态下航行器沿 $\mathbf{b}_x$ 轴平移的线动量值。

该相对平衡点对应这样一个平航运动：航行器无旋转，沿最长轴 $\mathbf{b}_x$ 匀速平移，并且 $\mathbf{b}_z$ 轴与重力方向平行，如图4.2所示。但是，一个低重心结构的航行器只有沿其自身最短轴方向的平移运动才是稳定的 [72]，因此，相对平衡点(4.7) 是不稳定的。

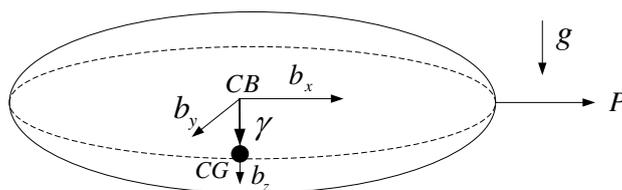


图 4.2 水下航行器一个平航运动示意

### 4.1.2 欠驱动模型

现在考虑一种实际中常用的欠驱动设计，内驱动，即在航行器体内安置若干滑块（如可移动电池组），用于航行器的运动控制。这样设计的好处是一、不受外部水流的腐蚀，适合长期水下任务；二、能耗低，可以在低速时实施有效姿态控制。不足之处在于仅依靠滑块内驱动，航行器的运动局限在一个等动量面上。当需要实现大范围机动时，往往需要与外力配合，比如利用自身可调节的浮力装置。

图4.3示意了带有内置滑块的航行器，该动力学模型受启发于Woolsey提出的刚体/质点多体力学系统 [76]。在长轴 $b_x$ 方向上安装一滑槽，滑块在控制力的

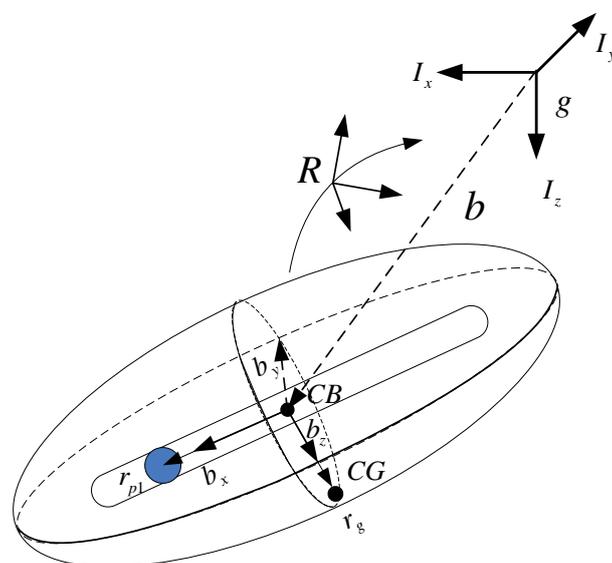


图 4.3 内置滑块的水下航行器模型示意

驱动下沿滑槽运动。在本地坐标系中，以 $r_p = r_{p1}b_x$ 表示滑块相对与浮心的位置，以 $v_p \in \mathbb{R}^3$ 表示滑块相对于惯性系的绝对速度。航行器/水流/滑块系统的运

动学方程为：

$$\begin{aligned}\dot{g} &= g\widehat{\boldsymbol{\xi}}^b, \\ \dot{\mathbf{r}}_p &= \mathbf{v}_p - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p.\end{aligned}\quad (4.8)$$

对于航行器/水流/滑块系统的动力学，需要在全驱动航行器动力学的基础上额外考虑滑块与航行器之间的相互作用。滑块本身受到重力 $m_p \mathbf{g} \mathbf{I}_z$ ，其中 $m_p$ 代表滑块质量。航行器/水流/滑块系统的悬浮意味着 $m = m_b + m_p$ 。记系统的广义本体速度为 $\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\xi}^{bT}, \dot{\mathbf{r}}_p^T)^T$ ，其中 $\boldsymbol{\xi}^b = (\boldsymbol{\omega}^T, \mathbf{v}^T)^T$ ，航行器/水流/滑块系统的哈密顿函数为：

$$H = \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi} - (m_b \mathbf{g} \mathbf{r}_g + m_p \mathbf{g} \mathbf{r}_p) \cdot \boldsymbol{\Gamma}, \quad (4.9)$$

式中动能度量的矩阵形式为：

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{b/f} - m_p \widehat{\mathbf{r}}_p \widehat{\mathbf{r}}_p & m_b \widehat{\mathbf{r}}_g + m_p \widehat{\mathbf{r}}_p & m_p \widehat{\mathbf{r}}_p \\ -m_b \widehat{\mathbf{r}}_g - m_p \widehat{\mathbf{r}}_p & \mathbf{M}_{b/f} + m_p \mathbf{I}_3 & m_p \mathbf{I}_3 \\ -m_p \widehat{\mathbf{r}}_p & m_p \mathbf{I}_3 & m_p \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}.$$

在本体坐标系中，以 $\mathbf{p}_p$ 表示滑块相对于惯性系的线动量，则航行器/水流/滑块的动量与速度之间存在关系：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{p}_p \end{pmatrix} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\psi}} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{r}}_p \end{pmatrix}.$$

与全驱动情形的航行器/水流系统一样，哈密顿函数(4.9)同样具有 $SE(2)$ 对称性。利用对称性化简，简化在子余切丛 $(\mathbf{M}\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{p}_p)$ 上的航行器/水流/滑块系统动力学方程由哈密顿方程描述：

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\pi}} \\ \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\Gamma}} \\ \dot{\mathbf{p}}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{p} \times \mathbf{v} + (m_b \mathbf{g} \mathbf{r}_g + m_p \mathbf{g} \mathbf{r}_p) \times \boldsymbol{\Gamma} \\ \mathbf{p} \times \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\Gamma} \times \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{p}_p \times \boldsymbol{\omega} + m_p \mathbf{g} \boldsymbol{\Gamma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ u \mathbf{b}_x \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

其中  $\mathbf{u} = u\mathbf{b}_x$  代表由航行器本体施加给滑块的控制力。

由于航行器/水流/滑块系统是悬浮的，施加的控制又是内力，所以沿着动力学方程(4.10)，对于任意控制  $\mathbf{u}$ ，系统线动量是守恒的，其动力学在一个等动量面上演化。与全驱动情形相同，Woolsey [76]指出航行器/水流/滑块系统同样具有喀什米尔函数  $C_1, C_2, C_3$  (见式4.5)。

系统动力学方程(4.10) 还可以表达为：

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\Gamma}} \\ \dot{\mathbf{p}}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{b/f}^{-1} \mathbf{T} \\ \mathbf{M}_{b/f}^{-1} \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\Gamma} \times \boldsymbol{\omega} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

式中，

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= (\mathbf{J}_{b/f} \boldsymbol{\omega} + \hat{\mathbf{r}}_p \mathbf{p}_p) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}_{b/f} \mathbf{v} \times \mathbf{v} + (m_p \mathbf{g} \hat{\mathbf{r}}_p + m_b \mathbf{g} \hat{\mathbf{r}}_g) \boldsymbol{\Gamma} - \hat{\mathbf{r}}_p \bar{\mathbf{u}}, \\ \mathbf{F} &= (\mathbf{M}_{b/f} \mathbf{v} + \mathbf{p}_p) \times \boldsymbol{\omega} - \bar{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

这里，

$$\bar{\mathbf{u}} = m_p \mathbf{g} \boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{p}_p \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}$$

代表滑块所受的合力，其包括滑块的重力，航行器旋转所产生的哥氏力，以及航行器本体施加的控制力。描述航行器/水流/滑块运动的完整方程包括运动学方程(4.8)，以及动力学方程(4.10)，或等价动力学方程(4.11)。

内置滑块驱动的水下航行器的相对平衡点为动力学方程(4.10)（或方程(4.11)）的平衡点，同时又是群  $SE(2)$  的作用轨道。一类相对平衡点可表示为  $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{r}_p, \mathbf{p}_p) = (\boldsymbol{\pi}_e, \mathbf{p}_e, \boldsymbol{\Gamma}_e, \mathbf{r}_{pe}, \mathbf{p}_{pe})$ ：

$$\boldsymbol{\pi}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ m_b \gamma v_e \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_e = \begin{pmatrix} m_1 v_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Gamma}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_{pe} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_{pe} = \begin{pmatrix} m_p v_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

式中  $m_1$  为质量矩阵  $\mathbf{M}_{b/f}$  沿  $\mathbf{b}_x$  轴的分量， $v_e$  为平衡状态下航行器沿  $\mathbf{b}_x$  轴平移的线速度值。

该相对平衡点对应这样一个平航运动：航行器无旋转，沿最长轴 $\mathbf{b}_x$ 以速率 $v_e$ 匀速平移，并且 $\mathbf{b}_z$ 轴与重力方向平行；滑块相对于航行器静止，位于本体坐标系原点。

但是，除了最长轴为不稳定平移轴外，如果滑块不施加控制，其在航行器内的自由运动与航行器相互作用，也会造成不稳定性，这种不稳定性类似于空间飞行器运动中由于燃料晃动带来的不稳定性 [77]。因此，相对平衡点(4.12)也是不稳定的。

## 4.2 全驱动情形多航行器的协调平航镇定

针对全驱动航行器模型(4.1, 4.4)，考虑 $N$ 个相同个体基于一个双向连通拓扑图 $\mathbb{G}$ 进行通信，利用交互信息设计个体反馈控制律，使得航行器网络协调，且每个个体处于相对平衡点(4.7)的协调平航运动是渐近稳定的。

以 $g_i = (\mathbf{R}_i, \mathbf{b}_i)$ 表示个体 $i$ 的构形，以 $\xi_i^b = (\boldsymbol{\omega}_i^T, \mathbf{v}_i^T)^T$ 表示个体 $i$ 的本体速度。个体 $i$ 的运动学方程由(4.1)描述。未协调时，网络的哈密顿函数为个体哈密顿函数之和。由单个体的哈密顿函数具有 $SE(2)$ 对称，未协调的网络哈密顿函数具有 $N$ 个 $SE(2)$ 对称。协调后的航行器网络应像单个航行器一样具有 $SE(2)$ 对称，这就需要引入人工势能打破 $N - 1$ 个 $SE(2)$ 对称。

为了使得协调呈现给定队形，考虑一种特殊的通信拓扑图 $\mathbb{G}_1$ ， $\mathbb{G}_1$ 中仅个体1与其它个体存在双向通信。定义：

$$\tilde{\mathbf{R}}_i := \mathbf{K}_{i1}\mathbf{R}_i, \quad \tilde{\mathbf{b}}_i := \mathbf{b}_i - \mathbf{d}_{i1}, \quad i = 2, \dots, N,$$

其中 $\mathbf{K}_{i1} \in SO(3)$ ， $\mathbf{d}_{i1} \in \mathbb{R}^3$ 分别是常数矩阵与常数向量。引入如下具有 $SE(3)$ 对称性的人工势能函数：

$$V_{\text{art}} = \sigma_1 \text{trace} \left( \sum_{i=2}^N \mathbf{R}_1^T \tilde{\mathbf{R}}_i \right) + \frac{\sigma_2}{2} \sum_{i=2}^N \left\| \tilde{\mathbf{b}}_i - \mathbf{b}_1 \right\|^2, \quad (4.13)$$

式中实数 $\sigma_1 < 0$ ， $\sigma_2 > 0$ ，常数向量 $\mathbf{d}_{i1}$ 以及常数矩阵 $\mathbf{K}_{i1}$ 决定个体1与个体 $i$ 之间的固定相对构形。虽然人工势能函数(4.13)具有 $SE(3)$ 对称，但和网络的哈密尔

顿函数加和后，仅具有 $SE(2)$ 对称。记加和后的网络哈密顿函数为：

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \sum_{i=1}^N H_i + V_{\text{art}} \\
 &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}_i^{bT} \mathbf{M}_i \boldsymbol{\xi}_i^b - m_b \mathbf{g} \mathbf{r}_{gi} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_i \right) \\
 &\quad + \sigma_1 \text{trace} \left( \sum_{i=2}^N \mathbf{R}_1^T \tilde{\mathbf{R}}_i \right) + \frac{\sigma_2}{2} \sum_{i=2}^N \left\| \tilde{\mathbf{b}}_i - \mathbf{b}_1 \right\|^2.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

类似于单个航行器的对称性化简，网络动力学方程为：

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Gamma}_i &= \boldsymbol{\Gamma}_i \times \boldsymbol{\omega}_i, \\
 \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_i &= (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_i) \times \boldsymbol{\omega}_i + (\mathbf{M}\mathbf{v}_i) \times \mathbf{v}_i + m_b \mathbf{g} \hat{\mathbf{r}}_{gi} \boldsymbol{\Gamma}_i - \text{grad}_{\mathbf{R}_i} V_{\text{art}}, \\
 \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}_i &= (\mathbf{M}\mathbf{v}_i) \times \boldsymbol{\omega}_i - \text{grad}_{\mathbf{b}_i} V_{\text{art}}.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

方程右端中人工势能关于各个航行器姿态，位置的负梯度向量解释为人工势场力，即为控制力/力矩：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{\tau i} &= -\text{grad}_{\mathbf{R}_i} V_{\text{art}}, \\
 \mathbf{u}_{f i} &= -\text{grad}_{\mathbf{b}_i} V_{\text{art}}.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

参照定义(3.16)，航行器网络具有如下形式的协调平航运动：

$$\begin{aligned}
 (\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{v}_1) &= \cdots = (\boldsymbol{\omega}_N, \mathbf{v}_N) = \bar{\boldsymbol{\xi}}^b, \\
 \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1(t) & \mathbf{b}_1(t) \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1(0) & \mathbf{b}_1(0) \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \exp(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^b t), \\
 \mathbf{R}_i(t) &= \mathbf{R}_i(0) = \mathbf{R}_1(0), \\
 \mathbf{b}_i(t) &= \mathbf{b}_1(t) + \mathbf{d}_{1i}, \quad i = 2, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{\xi}}^b = (\mathbf{0}, v_e \mathbf{e}_1)$ ,  $v_e \in \mathbb{R}$ ,  $\exp: se(3) \rightarrow SE(3)$ 为指数映射。

实际上，由于平航中每个个体的本体角速度为零，确保协调的条件（见相

对平衡点定义3.3中的条件(3.2) 是初始构形满足:

$$g_{ij}(0) \in G_{\bar{\xi}^b} := \{g \in SE(3) | \text{Ad}_g \hat{\xi}^b = \hat{\xi}^b\}.$$

若 $\bar{\xi}^b = (\mathbf{0}, v_e \mathbf{e}_1)$ , 则:

$$G_{\bar{\xi}^b} = \{(Q, \mathbf{d}) \in SE(3) | Q = \exp \lambda \hat{\mathbf{e}}_1, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3\},$$

这表明个体间的初始相对位置可以任意, 但初始相对姿态需要限制在沿本体坐标轴 $\mathbf{b}_x$ 的旋转方向上。相对平衡点(4.17) 只是取 $\lambda = 0$ 时的一个特例, 此时各个个体的初始相对姿态一致。

为了镇定相对平衡点(4.17), 可以借鉴Leonard [49] 提出的势能整形镇定方法。为了保留镇定后航行器网络的在李群 $SE(2)$ 作用下的对称性, 反馈的构造只利用相对构形 $(\mathbf{R}_{i1}, \mathbf{b}_{i1})$ , 其中 $\mathbf{R}_{i1} = \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_i$ ,  $\mathbf{b}_{i1} = \mathbf{R}_1^T (\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_1)$ ,  $i = 2, \dots, N$ 。在相对平衡点(4.17)处, 有 $\mathbf{R}_{i1} = \mathbf{I}_3$ , 则单位向量 $\mathbf{e}_1$ 表示在平衡状态时个体1的本体线速度在个体 $i$ 本体坐标系中的方向。定义 $\tilde{\mathbf{e}}_1 := \mathbf{R}_{i1} \mathbf{e}_1$ , 其表示上述方向在个体1本体坐标系中的方向。对于个体1, 施加如下势能整形:

$$\tilde{V}_{1i} = \tilde{\mathbf{e}}_1 \left( |v_e| \mathbf{I}_3 - \alpha_i \mathbf{M}_{b/f}^{-1} \right) \mathbf{p}_e,$$

其中 $\alpha_i$ 是控制增益, 用于能量整形镇定设计。 $\mathbf{p}_e = (m_1 v_e, 0, 0)^T$ 。整形后个体1的哈密顿函数为 $H_{C1} = H_1 + \tilde{V}_{1i}$ , 写出其对应的哈密顿方程, 并与哈密顿方程(4.4)对比, 出现在方程右端的新项即为个体1的势能整形控制:

$$\mathbf{u}_{\tau 1}^{\text{st}} = -\text{grad}_{\mathbf{R}_1} \tilde{V}_{1i} = \tilde{\mathbf{e}}_1 \times \left[ \left( |v_e| \mathbf{I}_3 - \alpha_i \mathbf{M}_{b/f}^{-1} \right) \mathbf{p}_e \right]. \quad (4.18)$$

定义 $\check{\mathbf{e}}_1 := \mathbf{R}_{1i} \mathbf{e}_1$ , 则个体 $i$ 在整形势能 $\tilde{V}_{1i}$ 下受到类似作用力 $\mathbf{u}_{\tau 1}^{\text{st}}$ 的反作用力:

$$\mathbf{u}_{\tau i}^{\text{st}} = -\text{grad}_{\mathbf{R}_i} \tilde{V}_{1i} = \check{\mathbf{e}}_1 \times \left[ \left( |v_e| \mathbf{I}_3 - \alpha_i \mathbf{M}_{b/f}^{-1} \right) \mathbf{p}_e \right]. \quad (4.19)$$

评注 4.1: 势能整形控制(4.18)受启发于低重心结构的水下航行器在上升/下降时的天然稳定性 [72]。控制(4.18)在期望镇定的平移方向上引入了一个恢复力矩, 正如重力力矩在上升/下降时提供的恢复力矩一样。□

将用于个体镇定的整形势能 $\tilde{V}_{1i}$ 与人工势能函数(4.13)结合, 势能整形后航行器网络的哈密顿函数为:

$$H_C = \hat{H} + \sum_{i=2}^N \tilde{V}_{1i}, \quad (4.20)$$

其中 $\hat{H}$ 按(4.14)定义。

**定理 4.1:** 考虑 $N$ 个相同的全驱动航行器, 在通信拓扑图 $\mathbb{G}_1$ 上交互信息。若个体1的控制为:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\tau 1} &= -\text{grad}_{\mathbf{R}_1} V_{\text{art}} + \sum_{i=2}^N \left( (\mathbf{R}_{i1} \mathbf{e}_1) \times \left[ \left( |v_e| \mathbf{I}_3 - \alpha_i \mathbf{M}_{b/f}^{-1} \right) \mathbf{p}_e \right] \right), \\ \mathbf{u}_{f1} &= -\text{grad}_{\mathbf{b}_1} V_{\text{art}}. \end{aligned}$$

其余个体 $i$ 的控制为:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\tau i} &= -\text{grad}_{\mathbf{R}_i} V_{\text{art}} + (\mathbf{R}_{1i} \mathbf{e}_1) \times \left[ \left( |v_e| \mathbf{I}_3 - \alpha_i \mathbf{M}_{b/f}^{-1} \right) \mathbf{p}_e \right], \\ \mathbf{u}_{fi} &= -\text{grad}_{\mathbf{b}_i} V_{\text{art}}. \end{aligned}$$

在控制参数满足 $\sigma_1 < 0$ ,  $\sigma_2 > 0$ ,  $\alpha_i \mathbf{I}_3 - (|v_e| + \sigma_1) \mathbf{M}_{b/f} > 0$ ,  $i = 2, \dots, N$ 时, 相对平衡点(4.17)是李亚普诺夫稳定的。

**证明:** 只要对于个体1与其余任何一个个体 $i$ , 利用能量—喀什米尔法证明这一对航行器维持相对构形同时沿长轴的匀速平移运动是李亚普诺夫稳定的, 则可证明相对平衡点(4.17)是李亚普诺夫稳定的。

第一步, 需要寻找喀什米尔函数 $C(\boldsymbol{\pi}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\pi}_i, \mathbf{p}_i, \boldsymbol{\Gamma}_i, \mathbf{R}_{i1}, \mathbf{b}_{i1})$ , 其沿着网络动力学的演化是守恒的。第二步, 构造李亚普诺夫函数:

$$H_\Phi = H_C + \Phi(C), \quad (4.21)$$

其中 $H_C$ 由式(4.20)给出,  $\Phi$ 是关于喀什米尔函数 $C$ 的光滑函数, 使得 $H_\Phi$ 在相对平衡点(4.17)处一阶导数为零, 即(4.17)为 $H_\Phi$ 的驻点。第三步, 如果 $H_\Phi$ 的二阶导数阵, 即海森阵在相对平衡点(4.17)处定号, 则能充分证明(4.17)是稳定的。

构造如下六个喀什米尔函数：

$$\begin{aligned}
C_1 &= \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{e}}, \\
C_2 &= \check{\mathbf{e}}^T \check{\mathbf{e}}, \\
C_3 &= \mathbf{R}_{i1}^T \mathbf{R}_{i1}, \\
C_4 &= \tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{p}_e + \check{\mathbf{e}}^T \mathbf{p}_e, \\
C_5 &= \tilde{\mathbf{e}}^T v_e \mathbf{e}_1 + \check{\mathbf{e}}^T v_e \mathbf{e}_1, \\
C_6 &= \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_i^T \mathbf{R}_{1i} \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i.
\end{aligned}$$

选择 $\Phi_C$ 满足一阶条件，有：

$$\begin{aligned}
\Phi(C) &= -\frac{\sigma_1}{2} \mathbf{R}_{i1}^T \mathbf{R}_{i1} - \frac{1}{2} \left( \left( \mathbf{M}_{b/f}^{-1} \mathbf{p}_1 \right)^T \mathbf{p}_1 + \left( \mathbf{M}_{b/f}^{-1} \mathbf{p}_i \right)^T \mathbf{p}_i \right) - \left( \mathbf{M}_{b/f}^{-1} \mathbf{p}_i \right)^T \mathbf{R}_{1i} \mathbf{p}_1 \\
&+ \alpha_i \left( \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}}^T v_e \mathbf{e}_1 + \check{\mathbf{e}}^T \check{\mathbf{e}} + \check{\mathbf{e}}^T v_e \mathbf{e}_1 \right) - |v_e| \left( \tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{p}_e + \check{\mathbf{e}}^T \mathbf{p}_e \right).
\end{aligned}$$

$H_\Phi$ 在相对平衡点处的海森阵为：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \otimes \left( \alpha_i \mathbf{M}_{b/f}^{-1} - (|v_e| + \sigma_1) \mathbf{I}_3 \right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \sigma_2 \mathbf{I}_3 \end{pmatrix},$$

其中算子 $\otimes$ 表示Kronecker积。条件 $\alpha_i \mathbf{I}_3 - (|v_e| + \sigma_1) \mathbf{M}_{b/f}^{-1} > 0$ 确保了 $\text{Hess}H_\Phi$ 在相对平衡点处是正定的，因此充分证明了李亚普诺夫稳定性。 ■

### 4.2.1 数值仿真

现在以一个数值仿真实例来演示所设计镇定律。考虑两个相同的全驱动航行器，两者可以交互相对构形信息。航行器本体重量 $m_b = 1 \text{ kg}$ ，重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，浮心到重心的距离 $\gamma = 1 \text{ m}$ ，分布在航行器三个惯性主轴上的物理参数如表4.1所示：

表 4.1 水下航行器的物理参数

主轴	本体/水流质量	本体/水流惯量	长度
$\mathbf{b}_x$	2 kg	1 kg · m <sup>2</sup>	4 m
$\mathbf{b}_y$	5 kg	4 kg · m <sup>2</sup>	2 m
$\mathbf{b}_z$	5 kg	4 kg · m <sup>2</sup>	2 m

期望镇定的相对平衡点为：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{v}_1) &= (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{0}, \mathbf{v}_e), \\ \mathbf{R}_1(t) &= \mathbf{R}_2(t), \\ \mathbf{b}_2(t) &= \mathbf{b}_1(t) + \mathbf{d},\end{aligned}$$

其中  $\mathbf{v}_e = v_e \mathbf{e}_1 = (0.5, 0, 0)^T$  (m/s),  $\mathbf{d} = (5, 9, 0)^T$  (m)。

由定理4.1可构造个体1的控制：

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\tau 1} &= \sigma_1 (\boldsymbol{\Sigma}_1 \times \mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2 \times \mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\Sigma}_3 \times \mathbf{e}_3) + \mathbf{b}_{21} \times [\sigma_2 \mathbf{I}_3 (\mathbf{b}_{21} - \mathbf{d})], \\ &+ (\mathbf{R}_{21} \mathbf{e}_1) \times [(p_{e1} |v_e| - \alpha p_{e1} / m_1) \mathbf{e}_1], \\ \mathbf{u}_{f1} &= \sigma_2 \mathbf{I}_3 (\mathbf{b}_{21} - \mathbf{d}),\end{aligned}$$

其中  $p_{e1} = m_1 v_e$ ,  $(\boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2, \boldsymbol{\Sigma}_3) = \mathbf{R}_{21}$ ；个体2的控制构造为：

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\tau 2} &= -\sigma_1 (\boldsymbol{\Sigma}_1 \times \mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2 \times \mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\Sigma}_3 \times \mathbf{e}_3) + (\mathbf{R}_{12} \mathbf{e}_1) \times [(p_{e1} |v_e| - \alpha p_{e1} / m_1) \mathbf{e}_1], \\ \mathbf{u}_{f2} &= -\mathbf{R}_{12} (\sigma_2 \mathbf{I}_3) (\mathbf{b}_{21} - \mathbf{d}).\end{aligned}$$

控制参数选择为  $\sigma_1 = -1$ ,  $\sigma_2 = 2$ ,  $\alpha = 9$ 。两个航行器的初始状态为：

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{21}(0) &= \begin{pmatrix} 0.8201 & -0.5942 & 0.0606 \\ 0.2445 & 0.2341 & -0.9410 \\ 0.5449 & 0.7695 & 0.3330 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{b}_{21}(0) &= (4, -7, 25)^T, \\ (\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{v}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{v}_2)(0) &= (0.2, 0.2, 0.2, 0, 0, 0, 0.3, 0.3, 0.3, 0, 0, 0)^T,\end{aligned}$$

其中初始相对距离的单位为 m，初始线速度的单位为 m/s，初始角速度的单位为 rad/s。

为了获得渐近稳定，需要在定理4.1 的基础上增加耗散控制。得益于全驱动结构，可以在控制  $\mathbf{u}_{\tau 1}$ ,  $\mathbf{u}_{f1}$ ,  $\mathbf{u}_{\tau 2}$ ,  $\mathbf{u}_{f2}$  上增加线性阻尼。在下面的仿真中，线性阻尼系数均设置为2。

图4.4演示了在惯性系中，两个航行器维持80秒的仿真运动。最初，两个航行器间隔超过30米，并且姿态不一致。在运动过程中，两航行器调节相对构形，最终获得一致姿态，期望相对位置，实现稳定协调。

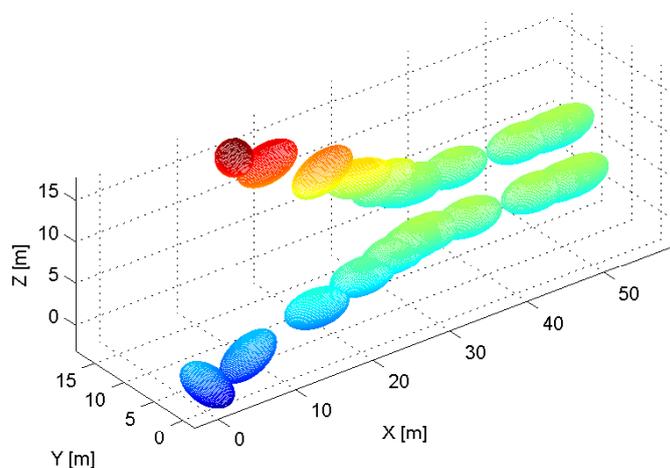


图 4.4 惯性系中两航行器的相对平衡点镇定

图4.5示意了相对姿态的动态变化，相对姿态矩阵  $\mathbf{R}_{21} = (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$  中的各元素随航行器运动而变化。可以观察到，矩阵的三个对角元素  $\Sigma_1^1$ ,  $\Sigma_2^2$ ,  $\Sigma_3^3$  均趋近于1，而其它元素均趋近于0。

图4.6示意了在航行器1的本地坐标系中表示的相对位置的动态变化。相对位置  $\mathbf{b}_{21}$  从  $(4, -7, 25)^T$  (m) 变化至期望值  $(5, 9, 0)^T$  (m)。

本节中的镇定设计将通信拓扑图假设作为一种特殊的连通图  $\mathbf{G}_1$ ，这只是为了便于人工势能的设计。实际上，对于协调队形，可以利用刚性图 [78] 来描述，并确定与之对应的最小连通拓扑图，从而不局限于拓扑图  $\mathbf{G}_1$ 。若只要达到协调，则任意连通的双向拓扑图  $\mathbf{G}$  都可以胜任。

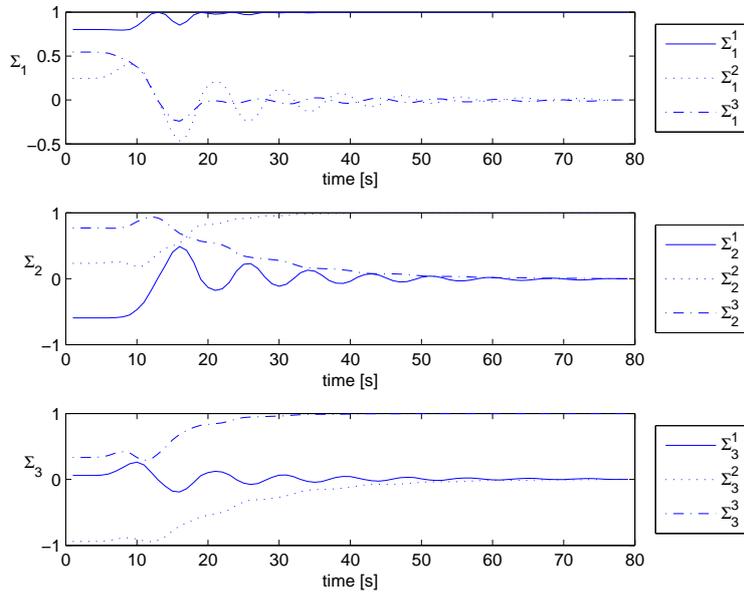


图 4.5 相对姿态的动态变化

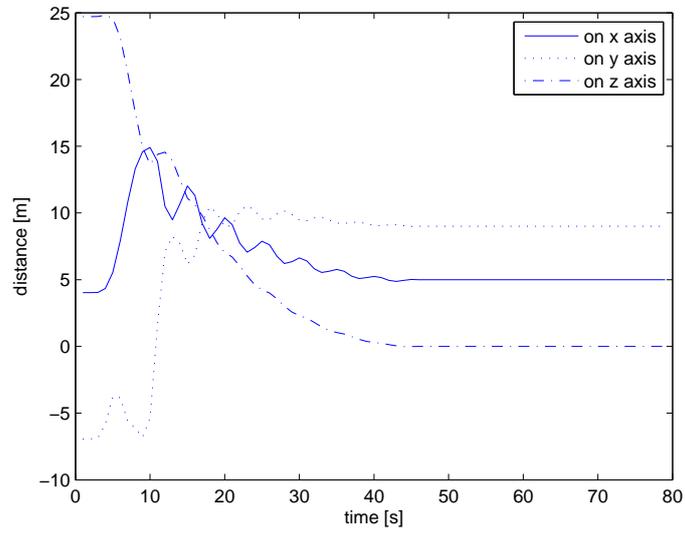


图 4.6 相对位置的动态变化

### 4.3 欠驱动情形多航行器的协调平航镇定

针对欠驱动航行器模型(4.8, 4.10), 考虑 $N$ 个相同个体基于一个双向连通的拓扑图 $\mathbb{G}$ 进行通信, 利用交互信息设计个体反馈控制律, 使得航行器网络协调, 且每个个体处于相对平衡点(4.12)的协调平航运动是渐近稳定的。

本节首先研究单个内置滑块驱动航行器的镇定, 再推广至多个航行器的协调。为了简洁阐明控制思想与设计, 这里只考虑航行器限制在竖直平面上的运动(见图4.7)。作这种假设的前提条件是: 航行器安装有尾舵之类的装置, 使航行器在水平面上的运动是稳定的, 因此, 竖直平面对于航行器的运动来讲是不变的。

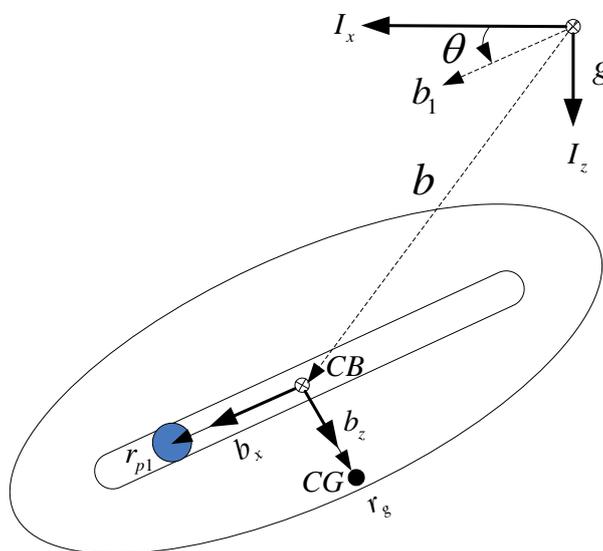


图 4.7 竖直平面上的内置滑块水下航行器

以 $\theta$ 表示俯仰角, 记:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_p = \begin{pmatrix} p_{p1} \\ 0 \\ p_{p3} \end{pmatrix}.$$

根据 $r_{p3} = \dot{r}_{p3} = 0$ 可以求得:

$$p_{p3} = m_p(v_3 - r_{p1}\omega_2).$$

航行器限制在竖直平面上的运动学方程为：

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \omega_2, \\
 \dot{x} &= v_1 \cos \theta + v_3 \sin \theta, \\
 \dot{z} &= -v_1 \sin \theta + v_3 \cos \theta, \\
 \dot{r}_{p1} &= p_{p1}/m_p - v_1,
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

动力学方程为：

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_1 &= (-m_3 v_3 \omega_2 - p_{p3} \omega_2 - u)/m_1, \\
 \dot{p}_{p1} &= -m_p (g \sin \theta + v_3 \omega_2 - r_{p1} \omega_2^2) + u,
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

以及：

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_2 \\ \dot{v}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} f_1 - r_{p1} m_p \omega_2 \dot{r}_{p1} \\ f_2 + m_p \omega_2 \dot{r}_{p1} \end{pmatrix},$$

式中：

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (m_3 - m_1) v_1 v_3 - m_p g r_{p1} \cos \theta - \gamma m_b g \sin \theta, \\
 f_2 &= m_1 v_1 \omega_2 + p_{p1} \omega_2, \\
 \mathbf{G} &= \begin{pmatrix} J_2 + m_p r_{p1}^2 & -m_p r_{p1} \\ -m_p r_{p1} & m_p + m_3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

这里， $m_1, m_3$ 是质量矩阵 $\mathbf{M}_{b/f}$ 的(1,1)元素与(3,3)元素； $J_2$ 是惯量矩阵 $\mathbf{J}_{b/f}$ 的(2,2)元素。由于 $\mathbf{b}_x$ 是航行器的最长轴，有 $m_1 < m_3$ 。

为了镇定形如(4.12)的相对平衡点，航行器的哈密顿函数(4.9)由如下势能进行整形：

$$V = \frac{1}{2} k_s r_{p1}^2, \quad k_s > 0. \tag{4.24}$$

该整形势能可由如下反馈控制实现：

$$u = -\text{grad}V = -k_s r_{p1}. \tag{4.25}$$

闭环系统仍为简单力学系统，其哈密尔顿函数为：

$$H_V = H + V.$$

并且同样具有相对平衡点(4.12)。可以通过能量—喀什米尔法来确定势能整形系数，以获得闭环系统稳定性。主要步骤是利用喀什米尔函数(4.5)构造（守恒）李亚普诺夫函数 $H_\Phi = H_V + \Phi(C_1, C_2, C_3)$ ，使其在相对平衡点(4.12)具有严格极大（小）值。记：

$$m_x = m_1 + m_p, \quad m_z = m_3 + m_p, \quad p_{e1} = m_x v_e.$$

注意到有 $m_x < m_z$ 。

**定理 4.2:** 如果满足条件：

$$\begin{aligned} J_2 &> \frac{\gamma^2 m_b^2}{m_x} & (4.26) \\ m_b g \gamma &> \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_3} \right) p_{e1}^2 \\ k_s &> \frac{m_p^2 g^2 (m_x - m_z + m_x m_z)}{m_b g \gamma (m_x - m_z + m_x m_z) + (m_x - m_z) p_{e1}^2} \end{aligned}$$

则相对平衡点(4.12)稳定。如下反馈控制渐近镇定相对平衡点(4.12)，

$$u = -k_s r_{p1} - k_{sd} \dot{r}_{p1}, \quad k_{sd} > 0. \quad (4.27)$$

**证明:** 用于分析相对平衡点(4.12)的一个李亚普诺夫函数可构造为：

$$H_\Phi = H_V - \frac{C_1}{m_x} + \frac{1}{2} C_2^2 + \frac{1}{2} \left( C_1 - \frac{p_{e1}^2}{2} \right)^2.$$

沿着动力学方程(4.23)，通过计算可以验证在相对平衡点(4.12)处，只要条件(4.26)满足，则成立 $\text{grad}(H_\Phi) = \mathbf{0}$ ， $\text{Hess}(H_\Phi) > 0$ 。通过李亚普诺夫直接法可判断稳定性。利用LaSalle不变原理，可推知渐近稳定性。 ■

通过对稳定性的谱分析可知，如果充分条件(4.26)中任何一个不等号反向，相对平衡点(4.12)就不稳定。第二个不等式条件与Leonard [72] 所得到的稳定性

结果相同，leonard证明了一个低重心的水下航行器若沿其中长轴平移，且垂直轴 $\mathbf{b}_z$ 是最短轴，那么为了确保平移运动的稳定性，重心应该足够低于浮心。

从物理上讲，控制律(4.27)如同在滑块与航行器间安装了一个线性弹簧。考虑到低重心结构已在俯仰运动上提供了恢复力矩（见评注4.1），通过一个刚度足够大的弹簧限制滑块与航行器之间的相对运动，可镇定航行器/滑块系统沿着航行器长轴方向的平移运动。若弹簧刚度太小，或者航行器平移速度过快，航行器/滑块系统的平移运动将不稳定。

现在考虑另一种形式的相对平衡点：

$$(\theta, \omega_2, v_1, v_3, r_{p1}, \dot{r}_{p1}, u) = (\theta_e, 0, v_e, 0, r_e, 0, u_e), \quad (4.28)$$

其中：

$$\begin{aligned} r_e &= -\frac{\gamma m_b \tan \theta_e}{m_p}, \\ u_e &= m_p g \sin \theta_e. \end{aligned}$$

其对应航行器沿长轴以速率 $v_e$ 匀速运动，俯仰角为非零常值 $\theta_e$ ，滑块在恒定控制力 $u_e$ 作用下，相对于航行器静止在沿 $\mathbf{b}_x$ 轴方向的位置 $r_e$ 处。

将整形势能(4.24)中的参数 $k_s$ 取值为：

$$k_s = k_{se} = \frac{g m_p^2 \cos \theta_e}{\gamma m_b}, \quad (4.29)$$

使得相对平衡点(4.28)是闭环系统的一个相对平衡点。然而，仿真结果表明只有对于足够大的俯仰角值 $\theta_e$ ，比如 $|\theta_e| > \pi/5$ ，(4.28)才是稳定的。对于较小值的 $\theta_e$ ，(4.28)不稳定。一个可能的解释是当俯仰角较小时，航行器与滑块之间的“弹簧”刚度 $k_s$ 不能太小的要求(4.26)，与固定值(4.29)发生了矛盾。可将整形势能(4.24)改进为：

$$\bar{V} = \frac{1}{2} k_{se} r_{p1}^2 + \frac{1}{2} k_s (r_{p1} - r_d)^2, \quad (4.30)$$

其中：

$$r_d = -\frac{\gamma m_b \tan \theta_e}{m_p}.$$

**定理 4.3:** 如果满足条件:

$$\begin{aligned}
J_2 &> \frac{\gamma^2 m_b^2}{m_x} & (4.31) \\
m_b g \gamma &> \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_3}\right) p_{e1}^2 \\
-\frac{1}{2}\pi &< \theta_e < \frac{1}{2}\pi \\
k_s &> -k_{se} + \frac{m_p^2 g^2 (m_x - m_z + m_x m_z)}{m_b g \gamma (m_x - m_z + m_x m_z) + (m_x - m_z) p_{e1}^2}
\end{aligned}$$

则相对平衡点(4.28)是稳定的。如下反馈控制将渐近镇定相对平衡点(4.28)。

$$u = -k_{se} r_{p1} - k_s (r_{p1} - r_d) - k_{sd} \dot{r}_{p1}. \quad (4.32)$$

**证明:** 一个可用于相对平衡点(4.28)稳定性分析的李亚普诺夫函数为:

$$\bar{H}_\Phi = H_{\bar{V}} - \frac{C_1}{m_x} + \frac{1}{2}(C_2 - C_{2e})^2 + \frac{1}{2} \left( C_1 - \frac{p_{e1}^2}{2} \right)^2, \quad (4.33)$$

其中  $H_{\bar{V}} = H + \bar{V}$ ,  $C_{2e}$  为喀什米尔函数  $C_2$  在相对平衡点处的取值, 计算为  $C_{2e} = -m_x v_e \sin \theta_e$ 。与定理4.2的证明类似, 由李亚普诺夫直接法可推知稳定性, 由LaSalle不变原理可证明渐近稳定性。 ■

现在开始考虑  $N$  个航行器的协调镇定问题。由于仅施加内驱动控制, 航行器/滑块系统的动态行为在一个等动量面上演化, 为了实现航行器网络的稳定协调平航运动, 需要作出如下假设:

**假设 4.2:** 每个航行器/滑块系统的喀什米尔函数  $C_1$  和  $C_2$  取值相等, 分别取决于  $C_1$  和  $C_2$  在期望相对平衡点处的取值。

在假设4.2下, 基于连通双向通信拓扑图  $\mathbb{G}$  的航行器网络可以通过同步各自的滑块, 来实现协调平航运动。而滑块的同步又可以通过在航行器网络间引入人工势能的方式来实现。首先, 任选一个航行器作为主航行器, 不失一般性, 将其编号记为1。个体1的哈密尔顿函数被如下势能函数整形,

$$V_1 = \frac{1}{2} k_{se} r_{p1,1}^2 + \frac{1}{2} k_s (r_{p1,1} - r_d)^2.$$

其余个体 $i$ 的哈密尔顿函数被如下势能函数整形,

$$V_i = \frac{1}{2}k_{se}r_{p1,i}^2, \quad i = 2, \dots, N.$$

再引入人工势能:

$$V_{\text{art}} = \frac{1}{2}k_{p,i} \sum_i^N \sum_j (r_{p1,i} - r_{p1,j})^2, \quad j \rightsquigarrow i, \quad k_{p,i} > 0. \quad (4.34)$$

整个航行器网络的哈密尔顿函数经过势能整形后变为:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N H_i + V_1 + \sum_{i=2}^N V_i + V_{\text{art}}, \quad (4.35)$$

式中 $H_i$ 代表个体 $i$ 未整形前的哈密尔顿函数。相应的整形控制为:

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_{se}r_{p1,1} - k_s(r_{p1,1} - r_d) - k_{sd}\dot{r}_{p1,1}, \\ u_i &= -k_{se}r_{p1,i} - \sum_j (k_{p,i}(r_{p1,i} - r_{p1,j})) - k_{d,i}\dot{r}_{p1,i}, \quad j \rightsquigarrow i, \quad i = 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.36)$$

控制(4.36)表明个体1自主地镇定其期望的平航运动。其余个体通过连接在自身与相邻(由通信拓扑 $\mathbb{G}$ 决定)个体滑块上的“阻尼弹簧”实现协调。当然,这种类似弹簧的势场力是通过信息交互,构造相应控制实现的。

**定理 4.4:** 考虑 $N$ 个相同的内置滑块驱动的航行器,以连通双向通信拓扑图 $\mathbb{G}$ 进行信息交互。在假设4.2下,各航行器施加控制(4.36)时,每个航行器渐近收敛到相对平衡点(4.28),并且具有相同的俯仰角与平航速度,网络实现协调平航。

**证明:** 滑块的同步是利用线性空间上基于固定连通图的一致性结果 [14]。因此,整个闭环系统是一个指数收敛子系统(滑块的位置同步系统)与一个渐近自治系统(航行器网络系统,其中滑块渐近趋于固定位置)的级联。对于该渐近自治系统的极限系统,即滑块收敛并静止于平衡位置时的航行器网络,其在相对平衡点处的稳定性可由如下李亚普诺夫函数判断:

$$\hat{H}_{\Phi} = \hat{H} + N \left( -\frac{C_1}{m_x} + \frac{1}{2}(C_2 - C_{2e})^2 + \frac{1}{2} \left( C_1 - \frac{p_{e1}^2}{2} \right)^2 \right). \quad (4.37)$$

再次利用李亚普诺夫直接法与LaSalle不变原理可推知极限系统在相对平衡点处是渐近稳定的。根据级联系统稳定性的标准论述 [68]可以论证定理成立。 ■

### 4.3.1 数值仿真

现在以一个数值仿真实例来演示所设计的镇定律。考虑两个相同的内置滑块驱动航行器，其中航行器1为主航行器。航行器的模型参数如下：

$$\begin{aligned} m_b &= 10 \text{ kg}, m_1 = 12 \text{ kg}, m_3 = 24 \text{ kg}, m_p = 2 \text{ kg}, \\ J_2 &= 0.1 \text{ Nm}^2, \gamma = 0.05 \text{ m}, g = 9.8 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

**情形I:** 期望的相对平衡点表示为：

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_2 = 0 \text{ rad}, \\ \omega_{2,1} &= \omega_{2,2} = 0 \text{ rad/s}, \\ v_{1,1} &= v_{1,2} = 0.5 \text{ m/s}, \\ v_{3,1} &= v_{3,2} = 0 \text{ m/s}, \\ r_{p1,1} &= r_{p1,2} = 0 \text{ m}, \\ \dot{r}_{p1,1} &= \dot{r}_{p1,2} = 0 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

根据控制律(4.36)，航行器1施加控制：

$$u_1 = -k_{se}r_{p1,1} - k_s r_{p1,1} - k_{sd}\dot{r}_{p1,1},$$

航行器2施加控制：

$$u_2 = -k_{se}r_{p1,2} - k_p(r_{p1,2} - r_{p1,1}) - k_d\dot{r}_{p1,2}.$$

根据式(4.29)，式中 $k_{se} = gm_p^2/(\gamma m_b)$ 。根据定理4.3中的充分条件，选择控制参数：

$$k_s = 200, k_{sd} = 15, k_p = 200, k_d = 15.$$

航行器网络的初始状态应满足假设4.2，即满足：

$$\mathbf{p}(0)_i \cdot \mathbf{\Gamma}_i(0) = 0, \mathbf{p}(0)_i \cdot \mathbf{p}(0)_i = \mathbf{p}_{ie} \cdot \mathbf{p}_{ie}.$$

选择初始状态如下（仍采用相对平衡点表示中的国际单位）：

$$(\theta_1, \omega_1, v_{1,1}, v_{3,1}, r_{p1,1}, \dot{r}_{p1,1})(0) = (-\pi/5, 0.01, 0.4042, -0.1585, -0.28, 0).$$

$$(\theta_2, \omega_2, v_{1,2}, v_{3,2}, r_{p1,2}, \dot{r}_{p1,2})(0) = (-\pi/2.8, 0.01, 0.2166, -0.2425, 0.08, 0).$$

图4.8示意了航行器网络协调平航运动的镇定。

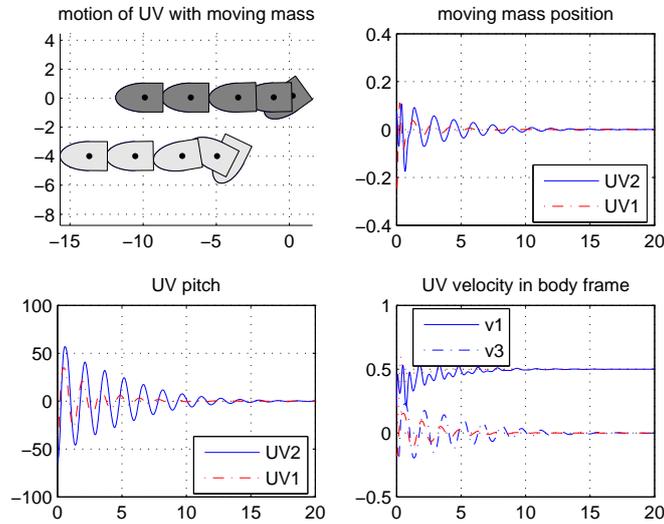


图 4.8 情形I：零俯仰角的协调运动

情形II：期望的相对平衡点表示为：

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_2 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}, \\ \omega_{2,1} &= \omega_{2,2} = 0 \text{ rad/s}, \\ v_{1,1} &= v_{1,2} = 0.5 \text{ m/s}, \\ v_{3,1} &= v_{3,2} = 0 \text{ m/s}, \\ r_{p1,1} &= r_{p1,2} = r_d, \\ \dot{r}_{p1,1} &= \dot{r}_{p1,2} = 0 \text{ m/s}, \end{aligned}$$

其中滑块的平衡位置计算为：

$$r_d = -\frac{\gamma m_b \tan(\pi/4)}{m_p}.$$

航行器1施加控制：

$$u_1 = -k_{se}r_{p1,1} - k_s(r_{p1,1} - r_d) - k_{sd}\dot{r}_{p1,1},$$

航行器2施加控制：

$$u_2 = -k_{se}r_{p1,2} - k_p(r_{p1,2} - r_{p1,1}) - k_d\dot{r}_{p1,2},$$

式中 $k_{se}$ 计算为：

$$k_{se} = \frac{gm_p^2 \cos(\pi/4)}{\gamma m_b}.$$

根据定理4.3中的充分条件，选择控制参数：

$$k_s = 75, k_{sd} = 25, k_p = 75, k_d = 25.$$

初始状态需满足假设4.2，即满足：

$$\mathbf{p}_i(0) \cdot \mathbf{\Gamma}_i(0) = \mathbf{p}_{ie} \cdot (-\sin \theta_{ie}, 0, \cos \theta_{ie}), \quad \mathbf{p}_i(0) \cdot \mathbf{p}_i(0) = \mathbf{p}_{ie} \cdot \mathbf{p}_{ie}.$$

选择初始状态如下（仍采用相对平衡点表示中的国际单位）：

$$(\theta_1, \omega_1, v_{1,1}, v_{3,1}, r_{p1,1}, \dot{r}_{p1,1})(0) = (-\pi/15, 0.01, 0.2719, -0.2258, -0.08, 0).$$

$$(\theta_2, \omega_2, v_{1,2}, v_{3,2}, r_{p1,2}, \dot{r}_{p1,2})(0) = (-\pi/3, 0.01, -0.1298, -0.2600, 0.08, 0).$$

图4.9 示意了具有非零俯仰角的协调平航运动的镇定。

以上协调平航运动的收敛域大小受到航行器网络所具有最临近的相对平衡点的限制。一类相对平衡点，比如平衡滑翔（沿航行器非主轴方向的平移）可以通过选择足够低的重心来消除，即尽量加大 $\gamma$ 值。

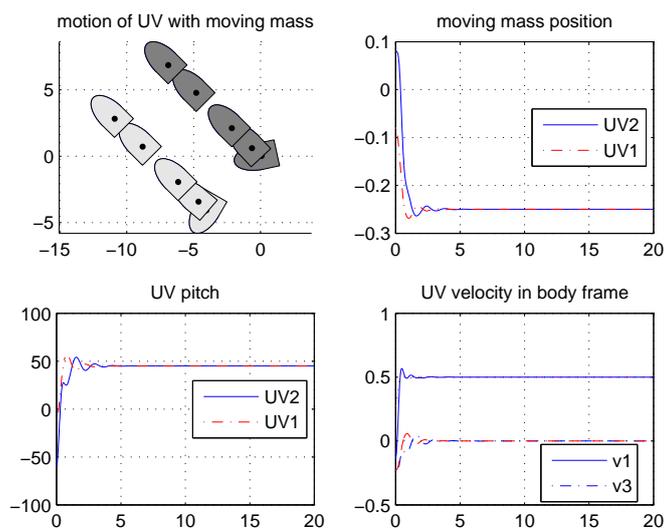


图 4.9 情形II: 非零俯仰角的协调运动

然而，沿 $\mathbf{b}_x$ 轴反向平移的平航运动仍为一个邻近的相对平衡点。对于情形I中具有正俯仰角的初始状态，将被吸引至该相对平衡点，仿真结果如图4.10所示。

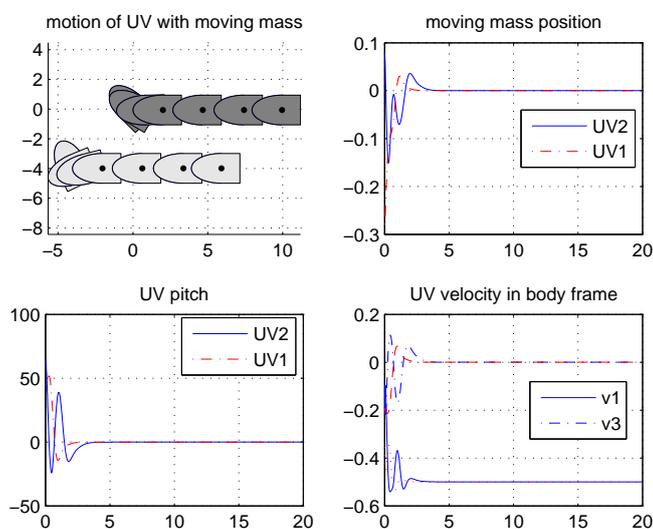


图 4.10 情形I中的另一种收敛方式

沿着 $\mathbf{b}_z$ 轴的平移也是存留的一个相对平衡点，其吸引着情形II中具有正俯仰角的初始状态。仿真结果如图4.11所示。

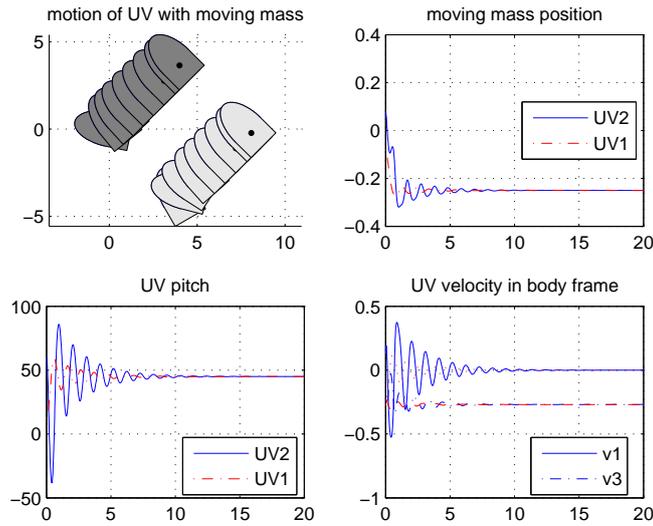


图 4.11 情形II的另一种收敛方式

邻近相对平衡点的存在是由于航行器的平移对称性所致。要想消除这些相对平衡点，使得期望相对平衡点全局稳定，需要引入外力来打破平移对称性。

#### 4.4 全驱动情形多航行器的协调运动规划

针对全驱动航行器模型(4.1, 4.4)，本节考虑 $N$ 个相同个体的协调运动规划问题。按照3.3小节中的协调运动规划方法，关键是设计相对平衡点之间的机动。利用航行器构形空间 $SE(3)$ 的结构性质，本节设计航行器网络的机动，并应用于协调运动规划。

机动的设计思路是将航行器网络的一个协调平航运动对应到本体速度空间上的一个固定点，即平航速度。平航速度表示为李代数 $se(3)$ 上的一个旋量(twist)，在 $se(3)$ （线性空间）上插值一条参数化的路径，连接机动前后的两个平航速度，路径参数可进行时间重整。机动就是控制网络的平航速度跟踪这条参数化的路径。路径参数的时间重整需要反馈网络的状态，使得两个平航速度之间的转移既在有限时间内完成，又确保网络状态在机动过程中有界。

鉴于航行器的常用航行方式是沿其最长轴的平移运动，本节把协调平航运动限制为相对平衡点(4.17)的形式。考虑如下运动规划序列：

$$\{(\bar{\xi}_1^b, \tau_1, \bar{g}_{\alpha 1}), \pi_1, (\bar{\xi}_2^b, \tau_2, \bar{k}_{\alpha 1})\}, \quad \alpha = 2, \dots, N. \quad (4.38)$$

序列中两个协调平航运动的平航速度具有如下形式:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\xi}}_1^b &= (\mathbf{0}, v_{e1}\mathbf{e}_1), v_{e1} \in \mathbb{R}, \\ \bar{\boldsymbol{\xi}}_2^b &= (\mathbf{0}, v_{e2}\mathbf{e}_1), v_{e2} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

第一个平航轨迹具有如下形式:

$$\mathbf{R}_1(t) = \mathbf{R}_1(0), \mathbf{b}_1(t) = \mathbf{R}_1(0)(\mathbf{e}_1 v_{e1})t + \mathbf{b}_1(0), \bar{g}_{\alpha 1} = (\mathbf{I}_3, \mathbf{d}_{\alpha 1}), \alpha = 2, \dots, N.$$

第二个平航轨迹具有如下形式:

$$\mathbf{R}_1(t) = \mathbf{R}'_1(0), \mathbf{b}_1(t) = \mathbf{R}'_1(0)(\mathbf{e}_1 v_{e2})t + \mathbf{b}'_1(0), \bar{k}_{\alpha 1} = (\mathbf{I}_3, \mathbf{k}_{\alpha 1}), \alpha = 2, \dots, N.$$

**评注 4.3:** 序列(4.38)对应这样的网络协调: 各航行器保持一致的相对姿态, 维持一定的相对位置, 并沿自身最长轴作平移运动。机动改变网络的平移速率(若 $v_{e1} \neq v_{e2}$ ), 网络的队形(若 $\mathbf{d}_{\alpha 1} \neq \mathbf{k}_{\alpha 1}$ ), 以及整体网络的姿态(若 $\mathbf{R}_1(0) \neq \mathbf{R}'_1(0)$ )。

仍采用第3.3小节中的表示方式, 记网络的状态为 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathcal{X}^N$ , 其中个体 $i$ 的状态记为 $\mathbf{x}_i = (\mathbf{R}_i, \mathbf{b}_i, \boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{v}_i) \in \mathcal{X}$ 。为了以速度空间上路径跟踪的方式实现机动, 需要作出假设:

**假设 4.4:** 在李代数 $se(3)$ 上, 存在一条光滑的路径 $\boldsymbol{\xi}^b(s): [0, S] \rightarrow se(3)$ , 由时变参数 $s(t): [0, T] \rightarrow [0, S]$ 参数化, 并且满足 $\boldsymbol{\xi}^b(0) = \bar{\boldsymbol{\xi}}_1^b$ ,  $\boldsymbol{\xi}^b(S) = \bar{\boldsymbol{\xi}}_2^b$ 。

**评注 4.5:** 考虑到 $se(3)$ 是一个线性空间, 因此假设4.4中的路径是存在的。比如利用线性插值, 可以构造出如下的光滑路径:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}^b(s) &= \frac{s}{S}\bar{\boldsymbol{\xi}}_2^b + \left(1 - \frac{s}{S}\right)\bar{\boldsymbol{\xi}}_1^b, \quad s \in [0, S], \\ \boldsymbol{\xi}^b(s) &= \bar{\boldsymbol{\xi}}_2^b, \quad s > S.\end{aligned}$$

直观上可以设置 $s = t$ , 但在实际情况下, 需要利用时变参数 $s$ 关于时间变化的自由度, 来保证机动的稳定性。

记 $\xi^b(s): [0, S] \rightarrow se(3)$ 是一条满足假设4.4的路径。在固定值 $s \in [0, S]$ 处的平航速度记为 $\xi_s^b$ ，其对应的平航轨迹记为 $\mathbf{x}_{\xi_s^b}$ 。根据4.2节中相对平衡点的镇定设计，对于任意固定的 $s$ ，平航轨迹 $\mathbf{x}_{\xi_s^b}$ 是可渐近镇定的，一个用于平航轨迹稳定性分析的李亚普诺夫函数 $H_{\Phi}(\mathbf{x})$ 由式(4.21)给出。由于 $s$ 本身是时变参数，不妨将李亚普诺夫函数记为 $H_{\Phi}(s, \mathbf{x})$ 。在利用该李亚普诺夫函数指导机动设计前，还需要一个假设条件。

**假设 4.6:** 存在一个连续可微，正定函数 $V(s, \mathbf{x}): [0, S] \times \mathcal{X}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$ 满足 $V(s, \mathbf{x}_{\xi_s^b}) = 0$ ；一个 $\mathcal{K}$ 类函数 $\rho^*$ ；常数 $C > 0$ ； $V$ 函数值上界 $V_U$ ，使得集合 $\{(s, \mathbf{x}) | V(s, \mathbf{x}) \leq V_U\}$ 是紧致的；存在一个连续的状态反馈 $\mathbf{u}(s, \mathbf{x}): [0, S] \times \mathcal{X}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ ，使得对于任意固定的 $s \in [0, S]$ 有：

$$\frac{-\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \dot{\mathbf{x}}}{\rho(V(s, \mathbf{x}))} \geq C, \quad \{\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}^N | V(s, \mathbf{x}) \leq V_U\}. \quad (4.39)$$

**评注 4.7:** 考虑到在每个固定的 $s \in [0, S]$ 处，平航轨迹 $\mathbf{x}_{\xi_s^b}$ 是可渐近镇定的，相应的镇定控制律在4.2节进行了设计。李亚普诺夫函数 $H_{\Phi}(s, \mathbf{x})$ 可作为假设4.6中的正定函数 $V(s, \mathbf{x})$ ，而相应的镇定控制律在沿着路径 $\xi^b(s)$ 进行 $s$ 参数化后，可以作为假设4.6中的状态反馈。因此，假设4.6是合理的。

在假设4.4, 4.6下，机动 $\pi_1$ 可以通过控制路径 $\xi^b(s)$ 中时变参数 $s$ 的变化律来实现。控制的目标是使得李亚普诺夫函数 $V(s, \mathbf{x})$ 在整个机动过程中保持有界，即 $V(s, \mathbf{x}) < V_U$ ，同时确保整个航行器网络的状态收敛到第二个平航轨迹上。为了实现这样一个机动，需要在设计参数 $s$ 的变化律时引入网络的状态反馈。借鉴Ögren [79]设计的时间整定技术，可以得到如下结果：

**定理 4.5:** 为 $s$ 的变化律指定一个定常变化率 $v_s > 0$ ， $s$ 的变化律设计如下：

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \min \left( v_s, \frac{-\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \dot{\mathbf{x}}}{\lambda + \left|\frac{\partial V}{\partial s}\right|} \left( \frac{\rho(V_U)}{\rho(V(s, \mathbf{x}))} \right) \right), \quad s \in [0, S), \\ \dot{s} &= 0, \quad s = S, \end{aligned} \quad (4.40)$$

式中 $\lambda > 0$ 是一个很小的正常数， $\rho$ 是不等式(4.39)中的 $\mathcal{K}$ 类函数。那么， $s$ 将在有限时间内到达 $S$ ，并且在此期间，若 $V(s(0), \mathbf{x}(0)) \leq V_U$ ，则恒有 $V(s, \mathbf{x}) \leq V_U$ 。

\*即函数 $\rho: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 连续，严格单调增，且满足 $\rho(0) = 0$ 。

证明: 通过直接计算有:

$$\dot{V} = \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial s} \dot{s}.$$

如果  $\frac{\partial V}{\partial s} \leq 0$ , 那么在假设4.6下成立  $\dot{V} \leq \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \dot{\mathbf{x}} \leq 0$ . 如果  $\frac{\partial V}{\partial s} > 0$ , 则有:

$$\dot{V} \leq \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial s} \left( \frac{-\left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \dot{\mathbf{x}}}{\lambda + \left| \frac{\partial V}{\partial s} \right|} \left( \frac{\rho(V_U)}{\rho(V(s, \mathbf{x}))} \right) \right).$$

假设在时刻  $t_1 \in [0, T]$  处,  $V(s(t_1), \mathbf{x}(t_1)) \geq V_U$ , 那么:

$$\frac{\rho(V_U)}{\rho(V(s(t_1), \mathbf{x}(t_1)))} \leq 1.$$

由于:

$$\frac{\frac{\partial V(s, \mathbf{x})}{\partial s}(t_1)}{\lambda + \left| \frac{\partial V(s, \mathbf{x})}{\partial s}(t_1) \right|} \leq 1,$$

并且考虑到时刻  $t_1$  的选取是任意的, 从而有:

$$\dot{V} \leq \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \dot{\mathbf{x}} + \left( \frac{-\left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \dot{\mathbf{x}}}{1} \right) = 0.$$

因此, 若  $V(s, \mathbf{x}) \geq V_U$ , 则沿着状态轨迹成立  $\dot{V}(s, \mathbf{x}) \leq 0$ . 综上所述, 在  $V(s(0), \mathbf{x}(0)) \leq V_U$  的前提下, 对于所有  $t \geq 0$  成立  $V(s(t), \mathbf{x}(t)) \leq V_U$ .

根据假设4.6, 集合  $\{(s, \mathbf{x}) | V(s, \mathbf{x}) \leq V_U\}$  是紧致的, 令:

$$K = \max_{s \in [0, S], \mathbf{x} \in X | V(s, \mathbf{x}) \leq V_U} \left( \lambda + \left| \frac{\partial V(s, \mathbf{x})}{\partial s} \right| \right).$$

利用不等式(4.39)可知:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \min \left( v_s, \frac{-\left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \dot{\mathbf{x}}}{\lambda + \left| \frac{\partial V}{\partial s} \right|} \left( \frac{\rho(V_U)}{\rho(V(s, \mathbf{x}))} \right) \right) \\ &\geq \min \left( v_s, \frac{C\rho(V_U)}{K} \right) = \underline{v} > 0. \end{aligned}$$

定义机动的完成时间 $T$ 为：

$$\int_0^T \dot{s} = S.$$

因为 $\dot{s}$ 有下界 $\underline{v}$ ，机动时间 $T$ 则有上界 $M = S/\underline{v}$ ，从而定理得证。 ■

#### 4.4.1 数值仿真

由于航行器具有 $SE(2)$ 对称，仿真实例将在 $SE(2)$ 流形，即水平面上进行。考虑两个相同的航行器，假设每个航行器已施加4.2节中的镇定控制，使得单个体限制在水平面上沿各自最长轴的平移运动是稳定的。

将航行器模型(4.1, 4.4)限制在水平面上，为航行器选取一组局部构形坐标 $(\theta, b_x, b_y)^T$ ，其中 $\theta$ 表示航行器本体坐标轴 $\mathbf{b}_x$ 与水平面 $\mathbf{X}$ 轴之间的方向角， $\mathbf{b} = (b_x, b_y)^T$ 表示航行器的位置。航行器的本体速度记为 $\boldsymbol{\xi}^b = (\omega, v_x, v_y)^T$ ，其中 $\omega, v_x, v_y$ 分别是本体角速度，线速度。记 $i = 1, 2$ ，第 $i$ 个航行器的运动学（下左）与动力学（下右）方程分别为：

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = \omega_i, \\ \dot{b}_{ix} = v_{ix} \cos \theta - v_{iy} \sin \theta, \\ \dot{b}_{iy} = v_{ix} \sin \theta + v_{iy} \cos \theta, \end{cases} \quad \begin{cases} J\dot{\omega}_i = (m_x - m_y) v_{ix} v_{iy} + u_\tau^i, \\ m_x \dot{v}_{ix} = m_y v_{iy} \omega_i + u_x^i, \\ m_y \dot{v}_{iy} = -m_x v_{ix} \omega_i + u_y^i. \end{cases} \quad (4.41)$$

在两个航行器之间引入人工势能：

$$V_{\text{art}} = \frac{\sigma_1}{2} (\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{\sigma_2}{2} \|\tilde{\mathbf{b}}_2 - \mathbf{b}_1\|^2,$$

式中 $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+$ ， $\tilde{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{b}_2 + \mathbf{d}$ ， $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$ 。假设两个航行器间存在双向信息交互，则航行器网络存在如下相对平衡点：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_1^b &= \boldsymbol{\xi}_2^b = \bar{\boldsymbol{\xi}}_A^b, \\ \theta_1 &= \theta_2 = 0, \\ \mathbf{b}_1 &= \mathbf{b}_2 + \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

其中 $\bar{\boldsymbol{\xi}}_A^b = (0, 1, 0)^T$  (m/s)。该相对平衡点对应于两个航行器均以单位速度沿各自 $\mathbf{b}_x$ 轴平移，姿态角同为0，并且维持固定相对位置 $\mathbf{d}$ 。

关于相对平衡点(4.42)的一个李亚普诺夫函数为：

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\boldsymbol{\xi}_i^b - \bar{\boldsymbol{\xi}}_A^b)^T \mathbb{I} (\boldsymbol{\xi}_i^b - \bar{\boldsymbol{\xi}}_A^b) + \frac{\sigma_1}{2} (\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{\sigma_2}{2} \|\tilde{\mathbf{b}}_2 - \mathbf{b}_1\|^2, \quad (4.43)$$

其中 $\mathbb{I} = \text{diag}(J, m_x, m_y)$ 。相对平衡点(4.42)由如下控制镇定：

$$\begin{aligned} u_\tau^1 &= -\sigma_1 \theta_1 - \kappa J \dot{\theta}_1, \\ \begin{pmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \end{pmatrix} &= -\sigma_2 \left( \mathbf{R}^T(\theta_1) \left( \mathbf{b}_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - \kappa \begin{pmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{pmatrix} \mathbf{R}^T(\theta_1) \left( \dot{\mathbf{b}}_1 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \\ u_\tau^2 &= -\sigma_1 (\theta_2 - \theta_1) - \kappa J \dot{\theta}_2, \\ \begin{pmatrix} u_x^2 \\ u_y^2 \end{pmatrix} &= -\sigma_2 \left( \mathbf{R}^T(\theta_2) (\tilde{\mathbf{b}}_2 - \mathbf{b}_1) \right) - \kappa \begin{pmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{pmatrix} \mathbf{R}^T(\theta_2) \left( \dot{\mathbf{b}}_2 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \mathbf{R}(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

航行器的物理参数为： $m_x = 4 \text{ kg}$ ,  $m_y = 1 \text{ kg}$ ,  $J = 1.5 \text{ Nm}^2$ 。控制参数 $\sigma_1 = 2$ ,  $\sigma_2 = 4$ ,  $\kappa = 4$ , 期望相对距离为 $\mathbf{d} = (0, 5)^T (\text{m})$ 。航行器网络的初始状态为：

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ b_{1x} \\ b_{1y} \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} \pi/7 \text{ rad} \\ 0 \\ 4 \text{ m} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \omega_1 \\ v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} 0.1 \text{ rad/s} \\ 0.1 \text{ m/s} \\ 0.1 \text{ m/s} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ b_{2x} \\ b_{2y} \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} \pi/4 \text{ rad} \\ 0 \\ -9 \text{ m} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \omega_2 \\ v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} 0.1 \text{ rad/s} \\ 0.1 \text{ m/s} \\ 0.1 \text{ m/s} \end{pmatrix}.$$

图4.12示意了在初值扰动下，相对平衡点(4.42)的镇定。

现在考虑运动规划序列 $\mathbf{I}$ ： $\{(\bar{\boldsymbol{\xi}}_A^b, \tau_A, \bar{g}_{21}), \pi, (\bar{\boldsymbol{\xi}}_B^b, \tau_B, \bar{k}_{21})\}$ 。第一个协调平航运动是沿相对平衡点(4.42)的运动，其中相对构形 $\bar{g}_{21} = (\Delta\theta, \Delta\mathbf{b}) = (0, \mathbf{d})$ 。第二

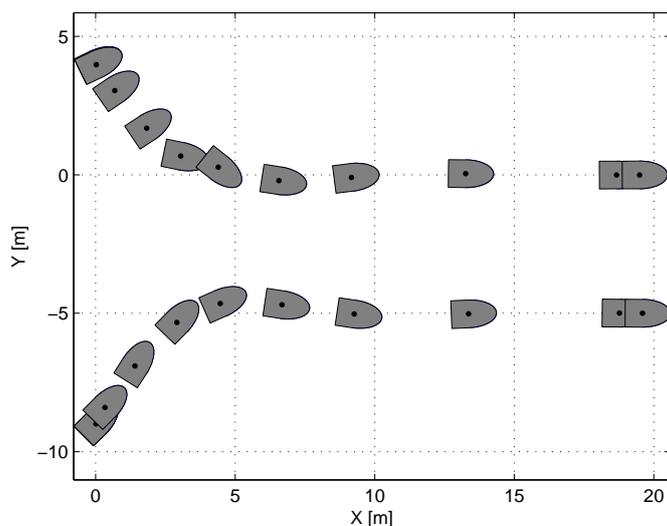


图 4.12 相对平衡点的镇定

个协调平航运动的平航速度，相对构形具体描述为：

$$\begin{aligned} \xi_1^b &= \xi_2^b = \bar{\xi}_B^b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.2 \text{ m/s} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \theta_1 &= \theta_2 = \frac{\pi}{10} \text{ rad}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \text{ m} \end{pmatrix} &= \mathbf{R}^T \left( \frac{\pi}{10} \right) (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2). \end{aligned}$$

以 $\xi^b(s): [0, S] \rightarrow se(2)$  表示本体速度空间上一条光滑的路径，其满足：

$$\xi^b(0) = \bar{\xi}_A^b, \quad \xi^b(S) = \bar{\xi}_B^b.$$

通过控制 $s$ 参数的变化（见式4.40）实现机动 $\pi$ 。首先考虑协调机动，选取较小的李亚普诺夫函数上界 $V_U = 0.5$ ，选择参数 $v_s = 0.05$ ， $\lambda = 0.01$ ，以及 $\mathcal{K}$ 类函数 $\rho(z) = z^2$ 。

图4.13示意了在初始状态扰动下，运动规划序列I的执行情况。机动保持协调，且在10秒内完成。

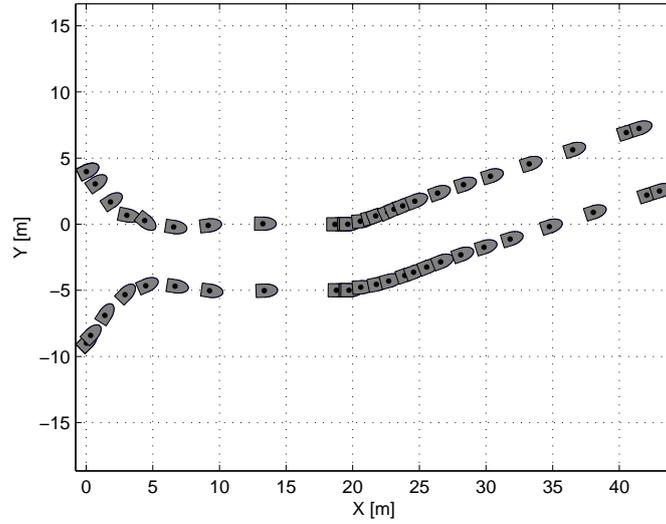


图 4.13 运动规划I的执行

接下来，通过仿真观察 $s$ 变化律的改变对机动性能的影响。考虑运动规划序列II:  $\left\{(\bar{\xi}_A^b, \tau_A, \bar{g}_{21}), \pi, (\bar{\xi}_C^b, \tau_B, \tilde{k}_{21})\right\}$ ，第二个协调平航运动的平航速度，相对构形具体描述为：

$$\begin{aligned} \xi_1^b &= \xi_2^b = \bar{\xi}_C^b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.2 \text{ m/s} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \theta_1 &= \theta_2 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \text{ m} \end{pmatrix} &= \mathbf{R}^T\left(\frac{\pi}{3}\right)(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2). \end{aligned}$$

运动规划序列II较序列I具有更大的姿态角变化，以及队形收缩。

该情形下考虑非协调机动，在 $s$ 的变化律设计中松弛李亚普诺夫函数 $V$ 的上界 $V_U$ ，取 $V_U = 5$ 。同时增大 $s$ 的指定变化率，取 $v_s = 0.1$ 。选择参数 $\lambda = 0.01$ ，以及 $\mathcal{K}$ 类函数 $\rho(z) = z^2$ 。

如图4.14所示，机动不保持协调。与图4.13对比，可以看出在相同的时间间隔内，图4.14中的航行器完成了更大的姿态角变化，以及相对位移的改变，机动过程得到加速。而且，每个航行器在机动中，执行几乎相同的轨迹，因而

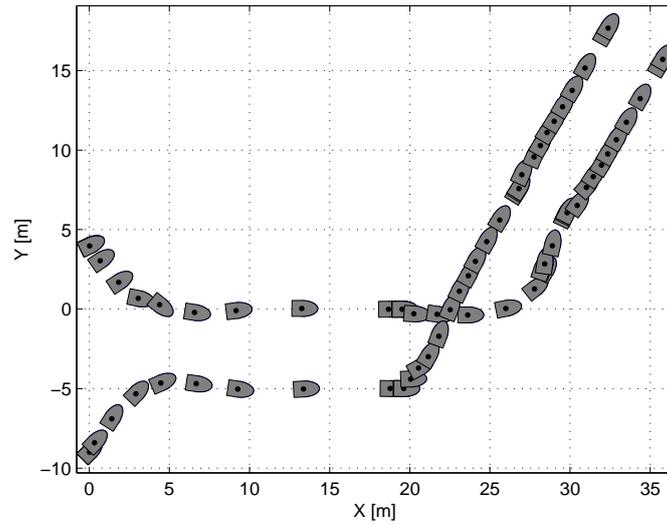


图 4.14 运动规划II执行中的交叉机动

消耗的能量也近似。而在图4.13中，很明显，位于下面的航行器必须比上面的航行器运动得更快，才能在机动中维持协调。图4.14中交叉机动的快速性，灵活性都较图4.13中协调机动要大（见评注3.21）。

至此，本章把基于能量整形的协调镇定方法，以及基于动力学量化组合的协调运动规划方法，应用于多个水下航行器的协调控制中。以统一的能量观点，实现了个体的镇定以及网络的协调。镇定设计不作任何线性化，充分利用了力学系统的结构性质，得到的镇定律具有明确物理含义，易于实现。协调运动规划方法降低了规划的复杂性，并以闭环方式执行规划轨迹，具有鲁棒性。不足之处就是将网络所有的可行轨迹都限制为一系列初等运动，这将导致无法评估或计算规划轨迹的整体最优性，比如关于时耗，能耗指标的最优性。

## 结 论

本论文研究了多个简单力学系统的协调控制问题，主要贡献是：一、基于能量整形思想，提出以镇定相对平衡点的方式获得多力学系统稳定协调运动的方法，并应用于多个全/欠驱动水下航行器的协调镇定。二、基于动力学量化组合思想，提出利用初等运动进行协调运动规划的方法，并应用于多个全驱动水下航行器，以闭环方式实现了协调运动规划。研究特色是利用力学系统的结构性质，进行协调镇定与协调运动规划的设计。所得控制律具有明确物理含义，易于工程实现。在控制效果上，收敛域大，鲁棒性好。

具体地讲，本文在理论方面将能量整形思想从单个力学系统的镇定推广到多力学系统相对平衡点的镇定；将动力学量化组合思想推广到多个力学系统的协调运动规划。针对推广后的理论结果，本文分析了适用范围，设计难点，并与现有同类方法对比，阐述了优点与局限。

本文将理论推广结果应用到多个全/欠驱动水下航行器的协调控制。在镇定方面，针对能量整形中的核心问题：匹配条件的求解，本文或利用水下航行器特定的结构性质，或利用基本物理原理，设计了匹配的整形动能，整形势能，以及人工势能；构造出用于分析协调稳定性的李亚普诺夫函数；设计了镇定控制律，并证明了协调的非线性稳定性。与现有基于一致性的协调控制方法相比，本文镇定设计的收敛域大，无奇异性。

在协调运动规划方面，针对量化组合中的核心问题：机动的设计，本文利用航行器构形空间的结构性质，将机动设计转化为航行器本体速度空间上的路径跟踪问题。通过对协调镇定律，以及李亚普诺夫函数沿待跟踪路径的参数化，并对该参数进行时间整定，实现了稳定的机动。与基于最优控制的运动规划方法相比，本文规划方案的执行具有实时性与鲁棒性。这些优点有力地支持了利用系统结构性质设计控制律的理念。

本文尚存若干未解决的问题，主要后续研究内容包括：

一、多个欠驱动力学系统的协调运动规划。虽然能量整形控制在镇定单个欠驱动力学系统中具有独特优势，但其可行性（即匹配条件的可解性，及解的稳定性），尤其是能否应用到给定欠驱动力学系统的协调控制中，是不容易判断的。以文献 [41] 所研究的平面上的车—摆网络为例，虽然单个车是欠驱动的，但是需要协调的变量，即车的相对位置，是控制直接作用的方向。另外，

单个车—摆系统满足简化匹配条件，可以猜测利用能量整形（文中采用受控拉格朗日函数方法）设计协调控制是可行的。

对于稍复杂的力学系统网络，目前尚未见到判断能量整形可行的完备结果，主要难点归结于欠驱动对个体间可塑造人工势能的限制。给定一个力学系统网络，根据协调目标，在可能的动能整形（用于镇定设计）基础上能否构造出匹配的人工势能是以能量整形思想设计协调控制的关键，这仍归结为匹配条件的求解。因此，利用力学系统的结构性质与具体的协调目标进行匹配条件的简化是后续研究的一个重点问题。考虑到协调只关注相对构形，与控制单个力学系统相比：

1. 势能整形是否具有额外设计自由度？
2. 如何利用额外自由度简化能量整形匹配条件的求解？

针对这两个问题，需要进行深入研究。

**二、以能量整形思想解决（多个）力学系统的跟踪。**Bloch [43]尝试着使用能量整形方法解决单个车—摆系统的跟踪问题，设计思想是构造一个时变的势能函数，使其极值点跟踪期望轨迹，再通过固定坐标系与运动坐标系之间的坐标变换，将固定坐标系中的跟踪问题转化为运动坐标系中的镇定问题。对于期望轨迹的加速度为常值的情形，相应的控制律设计得到很大简化。类似地，Zenkov [80]通过构造时变的能量函数，研究了具有对称性的一类力学系统的匀加速轨迹跟踪问题。

但是，针对一般构形流形上的力学系统，在跟踪任意轨迹时，构造时变能量整形函数不能简单地将原始势能函数整形为在期望轨迹处取极值。这样做一方面难以确保整形的可行性；另一方面难以保证系统在期望轨迹附近的收敛性。为了确保系统跟踪期望轨迹的收敛性，必须同时对动能度量作相应的整形，获得可以论证收敛性的李亚普诺夫函数。同样，所设计的动能整形及势能整形都必须确保匹配条件的可解性。

可以预见，势能整形将涉及系统在构形流形上的运动轨迹与期望轨迹之间的比较，而动能整形将涉及系统沿运动轨迹上不同构形处切向量的比较。与欧氏空间不同，为了刻画相对构形以及相对速度，流形上各几何量的比较不能简单地通过减法获得相差量。一种可以借鉴的方法是利用Bullo [81]定义的误差函数以及传输映射来刻画流形上各种几何量的差别。Bullo [81,82]考虑了全驱动力学系统的轨迹跟踪问题，控制律的设计思想是利用全驱动进行反馈线性化。

基于能量整形研究欠驱动力学系统的跟踪问题，或多个力学系统的协调跟踪则更具有挑战性，并且较线性化方法具有新意，优点，以及更广的适用性。跟踪问题的研究是对能量整形思想的重要理论推广。

三、**利用力学系统的漂移项进行运动规划**。力学系统的运动规划是一种带有漂移项的运动规划，这对规划轨迹的可行性提出了很高的要求。如果存在欠驱动限制，则要求使用较少的控制通道来实现规划，带来了更大的难度。

本文所采用基于相对平衡点拼接的规划方法，实质是对漂移项作用的一种规避。因为沿着相对平衡点，力学系统的欧拉-庞加莱方程（即动力学方程）的漂移项为零，一般无需控制输入，系统就能维持稳态运动。类似的，利用力学系统解耦运动向量场的规划方法 [83]，可将动力学规划问题简化为逆向运动学求解问题，其与本文规划方法的最大区别就是在不同运动向量场的组合处，要求系统实现停顿，因此效率没有基于机动的组合方式高。此外，机动的设计不依赖于切换点在相对平衡点上的具体位置，只要给定前后两个相对平衡点，在任意时刻实施的机动都是相同的（见评注3.15）。

为了进一步利用力学系统的结构性质，可以不用刻意规避漂移项的作用，而是利用系统沿漂移项的运动。不妨将由漂移项引起的运动定义为系统的漂移轨道，那么对于力学系统的任一构形，都存在一条经过其的漂移轨道。如果能通过控制在某一恰当时刻之前将系统的构形控制到经过目标构形的一条漂移轨道上，那么就可以实现运动规划。或更一般的，研究不同漂移轨道之间的切换控制，利用漂移轨道作为规划轨迹中的一部分，辅助运动规划的实现。

对于力学系统网络，整个网络的漂移轨道作为构形空间的一个低维子流形会具有更丰富的含义。比如一条漂移轨道可以对应着各系统某些构形变量的一致，那么通过切换控制将网络状态转移到该漂移轨道上，就实现了一致性的控制目标。

总之，本文通过对多个力学系统协调控制的研究，充分认识到利用系统的结构性质在控制律设计中的作用。每个力学系统都是独特的，正如每个非线性系统具有各自的非线性，虽然不能找到通用的控制律设计方法，但可以摸索出科学的方法论来指导设计。基于能量整形思想，以及动力学量化组合思想的协调控制设计，正体现了这样一种方法论，它带领着非线性系统控制从过去的线性化，高增益时代步入一个学会尊重，利用，并与非线性共存的时代。



## 附录 A 附录

### A.1 受控拉格朗日函数方法介绍

考虑一个简单力学系统 $(Q, M, V)$ ，李群 $G$ 自由，正则地作用在 $Q$ 上，称商空间 $S = Q/G$ ，即 $G$ -轨道的集合，为形状空间。为了理解受控拉格朗日函数方法中的能量整形，有必要先描述系统的速度与动能。

在构型 $q \in Q$ 处，切向量 $\mathbf{v}_q \in T_q Q$ 可以分解为两分量之和，分量一与经过 $q$ 点的 $G$ -轨道 $\text{Orb}(q)$ 相切，分量二与分量一满足度量 $M$ -正交。称 $T_q \text{Orb}(q)$ 为切空间 $T_q Q$ 的垂直子空间，记为 $V_q Q$ ；与其 $M$ -正交的子空间称为水平子空间，记为 $H_q Q$ 。记切向量 $\mathbf{v}_q \in T_q Q$ 在 $V_q Q$ 与 $H_q Q$ 上的投影分别为 $\text{Ver}\mathbf{v}_q$ 与 $\text{Hor}\mathbf{v}_q$ ，对于任意 $\mathbf{v}_q, \mathbf{w}_q \in T_q Q$ 有：

$$M(\mathbf{v}_q, \mathbf{w}_q) = M(\text{Hor}\mathbf{v}_q, \text{Hor}\mathbf{w}_q) + M(\text{Ver}\mathbf{v}_q, \text{Ver}\mathbf{w}_q). \quad (\text{A.1})$$

等式(A.1)唯一确定了切向量 $\mathbf{v}_q \in T_q Q$ 的分解：

$$\mathbf{v}_q = \text{Hor}\mathbf{v}_q + \text{Ver}\mathbf{v}_q.$$

李群 $G$ 在 $Q$ 上自由，正则地作用，定义了一个主纤维丛 $(Q, \pi, S = Q/G)$  [84]，映射 $\pi : Q \rightarrow S$ 称为投影映射。因此在一点 $x \in S$ 的局部坐标邻域 $U$ 内， $\pi^{-1}(U)$ 同胚于 $G \times U$ 。定义 $G$ 的局部坐标为 $\theta^a (a = 1, \dots, m)$ ， $S$ 的局部坐标为 $x^\alpha (\alpha = 1, \dots, r)$ ，则速度局部写为 $\mathbf{v}_q = (\dot{x}^\alpha, \dot{\theta}^a)$ ，动能局部写为：

$$\begin{aligned} K(\mathbf{v}_q) &= \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + M_{\alpha b} \dot{x}^\alpha \dot{\theta}^b + \frac{1}{2} M_{ab} \dot{\theta}^a \dot{\theta}^b \\ &= \frac{1}{2} (M_{\alpha\beta} - M_{\alpha a} M^{ab} M_{b\beta}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \frac{1}{2} M_{ab} (\dot{\theta}^a + M^{ac} M_{ca} \dot{x}^\alpha) (\dot{\theta}^b + M^{bd} M_{d\beta} \dot{x}^\beta). \end{aligned}$$

根据(A.1)，速度 $\mathbf{v}_q$ 在局部坐标下分解为：

$$\begin{aligned} \text{Ver}\mathbf{v}_q &= (0, \dot{\theta}^a + M^{ab} M_{\alpha b} \dot{x}^\alpha), \\ \text{Hor}\mathbf{v}_q &= (\dot{x}^\alpha, -M^{ab} M_{\alpha b} \dot{x}^\alpha). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

当且仅当  $M_{\alpha\beta} = 0$  时,  $\text{Ver}\mathbf{v}_q = (0, \dot{\theta}^\alpha)$ ,  $\text{Hor}\mathbf{v}_q = (\dot{x}^\alpha, 0)$ 。直观上, 上述分解将速度沿群作用方向与形状方向分为两部分。

速度分解可以借助力学联络 [70] 来表示。力学联络是一个垂直映射  $\mathcal{A} : TQ \rightarrow \mathfrak{g}$ , “垂直”是指该映射是线性的, 且零化切向量的水平分量, 即:

$$\mathcal{A}(\text{Hor}\mathbf{v}_q) = \mathbf{0}, \quad \mathcal{A}(\mathbf{v}_q) = \mathcal{A}(\text{Ver}\mathbf{v}_q) \in \mathfrak{g}, \quad \forall \mathbf{v}_q \in T_qQ.$$

由力学联络诱导的无穷小生成元 [70]  $\mathcal{A}(\mathbf{v}_q)_Q(q)$  的局部坐标是  $(0, \dot{\theta}^\alpha + M^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha)$ 。对于任一切向量  $\mathbf{v}_q \in T_qQ$ , 力学联络给出其垂直分量  $\text{Ver}\mathbf{v}_q$  对应的李代数中的向量, 而水平空间  $H_qQ$  则由力学联络的核 (kernel) 空间给出。

基于速度分解, 系统动能可以写成子空间上动能之和的形式:

$$K(\mathbf{v}_q) = \frac{1}{2}M(\text{Hor}\mathbf{v}_q, \text{Hor}\mathbf{v}_q) + \frac{1}{2}M(\text{Ver}\mathbf{v}_q, \text{Ver}\mathbf{v}_q). \quad (\text{A.3})$$

如果把等式(A.3)右端看成是在切空间  $T_qQ$  上对动能“形状”的描述, 动能整形则具体体现为通过反馈改变切空间的分解以及作用在其上的度量。Bloch等学者首先将切空间分解的受控改变用于动能整形。

**定义 A.1:** [48] 记  $\tau : TQ \rightarrow \mathfrak{g}$  是一水平映射, 即该映射是线性的, 且零化切向量的垂直分量, 构形  $q$  处的  $\tau$ -水平空间  $\text{Hor}_\tau$  是由形如

$$\text{Hor}_\tau \mathbf{v}_q = \text{Hor}\mathbf{v}_q - \tau(\mathbf{v}_q)_Q(q)$$

切向量构成的子空间, 称  $\mathbf{v}_q \mapsto \text{Hor}_\tau \mathbf{v}_q$  为  $\tau$ -水平投影。类似地, 由:

$$\text{Ver}_\tau \mathbf{v}_q = \text{Ver}\mathbf{v}_q + \tau(\mathbf{v}_q)_Q(q)$$

确定的映射  $\mathbf{v}_q \mapsto \text{Ver}_\tau(\mathbf{v}_q)$  称为  $\tau$ -垂直投影。

**评注 A.2:** 无穷小生成元  $\tau(\mathbf{v}_q)_Q(q)$  是垂直空间中的切向量, 虽然垂直投影经过  $\tau$ -修改而改变, 但  $q$  处的垂直空间不变, 仍为与  $G$ -轨道相切的子空间。

**评注 A.3:** 定义A.1实质是通过修改力学联络, 改变了切空间的分解, 目的是使得整形后的动能仍具有子空间动能的可加性。根据水平映射  $\tau$  零化垂直向量的性

质，原力学联络 $\mathcal{A}$ 附加映射 $\tau$ 后仍是一个力学联络，记作 $\mathcal{A}_\tau = \mathcal{A} + \tau$ 。 $\tau$ -水平空间正是 $\mathcal{A}_\tau$ 的核空间，可用其来定义新的速度分解： $\mathbf{v}_q = \text{Hor}_\tau \mathbf{v}_q + \text{Ver}_\tau \mathbf{v}_q$ 。

为改变动能“形状”，需要在切空间上重新定义度量。动能整形归结为如下三方面：

- 1、选择水平映射 $\tau : TQ \rightarrow \mathfrak{g}$ ，以改变切空间的分解；
- 2、改变作用在新的水平空间上的度量 $M \rightarrow M_\sigma$ ；
- 3、改变作用在垂直空间上的度量 $g \rightarrow M_\rho$ 。

因此，动能(A.3)整形为：

$$K_c(\mathbf{v}_q) = \frac{1}{2}M_\sigma(\text{Hor}_\tau \mathbf{v}_q, \text{Hor}_\tau \mathbf{v}_q) + \frac{1}{2}M_\rho(\text{Ver}_\tau \mathbf{v}_q, \text{Ver}_\tau \mathbf{v}_q). \quad (\text{A.4})$$

定义 A.4: [48] 根据(A.4)，定义受控拉格朗日函数（CL函数）：

$$L_c(\mathbf{v}_q) = K_c(\mathbf{v}_q) - \left( V(q) + \tilde{V}(q) \right), \quad (\text{A.5})$$

其中 $\tilde{V}(q)$ 是用于整形势能的人工势能函数。

为了便于反馈设计，往往希望在新的动能度量下，新定义的 $\tau$ -水平空间与垂直空间仍具有度量正交性。基于此，Bloch [48]对 $M_\sigma$ 提出了两点假设：

- 1、在原水平空间 $H_q Q$ 上 $M_\sigma = M$ ；
- 2、 $H_q Q$ 与 $V_q Q$ 是 $M_\sigma$ 正交的，即满足：

$$M_\sigma(\text{Hor}_\tau \mathbf{v}_q, \text{Hor}_\tau \mathbf{v}_q) = M(\text{Hor} \mathbf{v}_q, \text{Hor} \mathbf{v}_q) + M_\sigma(\tau(\mathbf{v}_q)_Q(q), \tau(\mathbf{v}_q)_Q(q)).$$

在上述两个假设下，经过并不复杂的代数推导，文献 [48]证明了CL函数(A.5)可写为：

$$\begin{aligned} L_c(\mathbf{v}_q) &= \frac{1}{2}M\left(\mathbf{v}_q + \tau(\mathbf{v}_q)_Q(q), \mathbf{v}_q + \tau(\mathbf{v}_q)_Q(q)\right) + \frac{1}{2}M_\sigma\left(\tau(\mathbf{v}_q)_Q(q), \tau(\mathbf{v}_q)_Q(q)\right) \\ &+ \frac{1}{2}\varpi\left(\text{Ver}_\tau(\mathbf{v}_q), \text{Ver}_\tau(\mathbf{v}_q)\right) - V'(q), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

其中 $\varpi = (M_\rho - M)$ ， $V'(q) = V(q) + \tilde{V}(q)$ 。

匹配是指选择能量整形参数 $\tau, M_\sigma, M_\rho, \tilde{V}$ ，并构造反馈控制，使得闭环方程与对应 $L_c$ 的EL方程等价，即两者描述相同的动态过程。为确保反馈控制存在（尤其在欠驱动情形下），参数 $\tau, M_\sigma, M_\rho, \tilde{V}$ 所必须满足的条件称为匹配条件。

为了使推导简洁，下面以矩阵形式紧凑地表示系统构型，度量等相关量。记系统构型的局部坐标为：

$$\mathbf{q} = [q^k] = \begin{pmatrix} [x^\alpha] \\ [\theta^a] \end{pmatrix},$$

式中各项指标为 $\alpha = 1, \dots, r$ ， $a = 1, \dots, m$ ， $k = 1, \dots, n$ ，其中 $r + m = n$ 。系统的动能度量矩阵（惯量矩阵）为：

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} [M_{\alpha\beta}] & [M_{\alpha b}] \\ [M_{a\beta}] & [M_{ab}] \end{pmatrix}.$$

为便于区分，形状变量的指标使用希腊字母，群变量的指标使用英文字母。假设控制仅施加在群变量上，则具有英文指标的变量表示其与控制直接相关。

假定一无外力欠驱动简单力学系统的EL方程为：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} [V_{,\alpha}] \\ [V_{,a}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ [u_a] \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

其中矩阵 $\mathbf{C}$ 是对应惯量矩阵 $\mathbf{M}$ 的哥氏力与离心力矩阵； $V_{,a}$ 表示势能 $V$ 关于变量 $\theta^a$ 的偏导数。

如果能成功应用，CL法给出反馈控制 $u_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ，以及一个形如(A.6)的CL函数 $L_c$ ，其对应的自由EL方程即为闭环方程：

$$\mathbf{M}_c\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_c\dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} [V'_{,\alpha}] \\ [V'_{,a}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

其中闭环动能度量的矩阵 $\mathbf{M}_c$ 局部写为：

$$\mathbf{M}_c = \begin{pmatrix} [(M_{\tau,\sigma,\rho})_{\alpha\beta}] & [(M_{\tau,\sigma,\rho})_{\alpha b}] \\ [(M_{\tau,\sigma,\rho})_{a\beta}] & [(M_{\tau,\sigma,\rho})_{ab}] \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

式中各元素的下标 $\tau, \sigma, \rho$ 表示动能度量整形参数。矩阵 $\mathbf{C}_c$ 是对应惯量矩阵 $\mathbf{M}_c$ 的哥氏力与离心力矩阵， $V' = V + \tilde{V}$ 是经过整形的势能函数。

匹配即选择参数 $\tau, M_\sigma, M_\rho, \tilde{V}$ ，确保存在反馈控制 $u_a$ ，使得方程(A.7)与(A.8)等价。由于方程(A.7)中显含控制 $u_a$ ，匹配同时也得到了控制的函数形式。从闭环方程(A.8)中求解 $\dot{\mathbf{q}}$ ，代入开环方程(A.7)中，可得：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ [u_a] \end{pmatrix} = \mathbf{M}\mathbf{M}_c^{-1} \left( -\mathbf{C}_c \dot{\mathbf{q}} - \begin{pmatrix} [V', \alpha] \\ [V', a] \end{pmatrix} \right) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} [V, \alpha] \\ [V, a] \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

匹配的充要条件由方程组(A.10)前 $r$ 个方程给出，这是关于参数 $\tau, M_\sigma, M_\rho, \tilde{V}$ 的非线性偏微分方程组。求解该PDEs，获得匹配的闭环动能度量 $\mathbf{M}_c$ 与势能函数 $\tilde{V}$ ，进而求得能量整形控制 $u_a$ 。

匹配是CL法设计的核心。一般说来，求解PDEs是困难的。一些学者，如 [42, 85–90]，以几何手段分析了匹配PDEs的可积性及其解的性质，试图得到匹配条件可解及能量整形可镇定的判据。虽然目前只针对若干类简单力学系统得到了相关判断条件，但这些以几何观点的研究加深了人们对能量整形本质的理解。

另一方面，针对具体力学系统，在合理假设下，可以利用其结构性质简化匹配条件。Bloch, Nair等学者 [44, 45, 48] 针对特定类力学系统，通过限制闭环垂直动能度量 $M_\rho$ 的选取，使得匹配PDEs退化成常微分方程组或代数方程组。Acosta [91, 92] 针对一类具有单个欠驱动变量的力学系统，同样实现了匹配的无PDEs简化。Chang, Zenkov等学者 [46, 47, 93] 通过增加“力整形”控制，松弛了匹配条件的约束，使得能够与原系统匹配的系统更广，并针对若干类力学系统给出了一系列可匹配，可镇定判据。北京航空航天大学的李茂青博士 [94] 研究了欠自由度数为1的力学系统的CL法镇定设计，以及相应的匹配条件的求解问题。

通常来讲，匹配的闭环动能度量与势能函数是一组关于参数 $\tau, M_\sigma, M_\rho, \tilde{V}$ 的函数，这些参数进而出现在能量整形反馈控制 $u_a$ 中，体现为控制增益。根据不同的控制目标需要构造不同的闭环能量函数，这就需要从匹配的闭环动能度量与势能函数中选取适合的参数，实质上正是控制增益的确定。

CL法的目标是镇定原系统一个不稳定的平衡点，比如 $(x^\alpha, \theta^\alpha, \dot{x}^\alpha, \dot{\theta}^\alpha) = (x_e^\alpha, \theta_e^\alpha, 0, 0)$ ；或者当群 $G$ 是系统的对称群时，变量 $\theta^\alpha$ 为原拉格朗日函数循环变

量，需要镇定原系统一个不稳定的相对平衡点，比如  $(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, \dot{\theta}^a) = (x_e^\alpha, 0, \dot{\theta}_e^a)$ 。

鉴于闭环系统是一个自由的拉格朗日系统，其能量  $E_c = K_c + V'$  是守恒的，可以作为李亚普诺夫函数，用于稳定性分析与镇定设计。利用匹配后参数  $\tau, M_\sigma, M_\rho, \tilde{V}$  中任何富裕自由度，使得  $E_c$  在给定平衡点处取极值，可以判断闭环系统在该平衡点处稳定 [68]。如果系统具有对称性，则可以找到更多的守恒量，利用这些守恒量，以及闭环能量构造李亚普诺夫函数用于相对平衡点的稳定性分析与镇定设计 [71]。

平衡点的渐近稳定性可以通过施加反馈阻尼获得。在受控方向上施加反馈阻尼  $u_a^{\text{diss}}$  后，闭环方程为：

$$\mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_c \dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} [V', \alpha] \\ [V', a] \end{pmatrix} = \mathbf{M}_c \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ [u_a^{\text{diss}}] \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

由此可知闭环能量  $E_c$  满足：

$$\frac{d}{dt} E_c = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_c \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ [u_a^{\text{diss}}] \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

假设  $E_c$  已在平衡点处取极小（大）值，选择反馈阻尼使得  $E_c$  非增（减），利用 LaSalle 不变原理可以判断平衡点的渐近稳定性。

需要强调，力学系统所受的物理阻尼不一定总是对镇定有利。Woolsey [95] 经过研究发现，对于整形后闭环动能度量负定的力学系统，欠驱动方向上的物理阻尼，如摩擦力，对镇定有利；而驱动方向的物理阻尼却起反镇定作用，但可以通过设计反馈阻尼抵消该反镇定作用。因此 CL 法对力学系统中物理阻尼产生的影响具有一定的鲁棒性。

## 参考文献

- [1] Jeff S. Shamma. Cooperative Control of Distributed Multi-Agent Systems[M]. John Wiley, 2007
- [2] Z. H. Qu. Cooperative Control of Dynamical Systems: Applications to Autonomous Vehicles[M]. London: Springer Verlag
- [3] D.H.A. Maithripala, S. Jayasuriya. Feasibility Considerations in Formation Control: Phantom Track Generation through Multi-UAV Collaboration[C]. IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico, 2008, 3959–3964
- [4] Francesco Bullo, Andrew D. Lewis. Distributed Control of Robotic Networks[M]. Princeton: Princeton University Press, 2007
- [5] M. C. VanDyke. Decentralized Coordinated Attitude Control of a Formation of Spacecraft[D]. Master's thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 2004
- [6] E. Fiorelli, N. E. Leonard, P. Bhatta, D. Paley, R. Bachmayer, D. M. Frantoni. Multi-AUV Control and Adaptive Sampling in Monterey Bay[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering. 2006, **31**:935–948
- [7] S. Martinez, J. Cortes, F. Bullo. Motion Coordination with Distributed Information[J]. IEEE Control Systems Magazine. 2007:75–88
- [8] F. Bullo, N. E. Leonard, A. D. Lewis. Controllability and Motion Algorithm for Underactuated Lagrangian Systems on Lie Groups[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 2000, **45**(8):1437–1452
- [9] Nikolaj Nordkvist. Motion Control along Relative Equilibria[D]. Ph.D. thesis, Technical University of Denmark, Denmark, 2008
- [10] M. S. Alber, A. Kiskowski. On Aggregation in CA Model Biology[J]. J of Physics A: Mathematical and General. 2001, **48**:10707–10714
- [11] N. E. Leonard, E. Fiorelli. Virtual Leaders, Artificial Potentials and Coordinated Control of Groups[C]. IEEE Conference on Decision and Control. 2001, 2968–2973
- [12] A. Jadbabaie, J. Lin, A.S. Morse. Coordination of Groups of Mobile Autonomous Agents using Nearest Neighbor Rules[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 2003, **48**:988–1001

- 
- [13] R. O. Saber, W. B. Dunbar, R. M. Murray. Cooperative Control of Multi-vehicle systems using Cost Graphs and Optimization[C]. American Control Conference. Denver, CO, USA, 2003, 2217–2222
- [14] J. Fax, R. M. Murray. Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 2004, **49**:1465–1476
- [15] E. Justh, P. S. Krishnaprasad. Equilibria and Steering Laws for Planar Formations[J]. Systems & Control Letters. 2005, **52**:25–38
- [16] R. Sepulchre, D. Paley, N. E. Leonard. Stabilization of Planar Collective Motion: All to All Communication[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 2007, **52**:800–824
- [17] L. Scardovi, N. E. Leonard. Robustness of Aggregation in Networked Dynamical Systems[C]. Proceedings of ROBOCOMM '09. Odense, Denmark, 2009
- [18] Alain Sarlette. Geometry and Symmetries in Coordination Control[D]. Ph.D. thesis, University of Liège, Belgium, 2009
- [19] J. Lawton, R. W. Beard. Synchronized Multiple Spacecraft Rotations[J]. Automatica. 2002, **38**:1359–1364
- [20] A. K. Bondhus, K. Y. Pettersen, J. T. Gravdahl. Leader/follower synchronization of satellite attitude without angular velocity measurements[C]. IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. Seville, Spain, 2005, 7270–7277
- [21] M. C. VanDyke VanDyke, C. D. Hall. Decentralized Coordinated Attitude Control of a Formation of Spacecraft[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2006, **29**:1101–1109
- [22] M. Takegaki, S. Arimoto. A New Feedback Method for Dynamic Control of Manipulators[J]. Transactions of the ASME Series G Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 1981, **102**:119–125
- [23] A. J. van der Schaft. Stabilization of Hamiltonian Systems[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 1986, **10**:1021–1035
- [24] N. E. Leonard A. M. Bloch, J. E. Marsden. Stabilization of Mechanical Systems using Controlled Lagrangians[C]. IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, CA, 1997, 2356–2361
- [25] R. Ortega, Arjan van der Schaft, B. Maschke, G. Escobar. Interconnection and Damping Assignment Passivity-based Control of Port-controlled Hamiltonian Systems[J]. Automatica. 2002, **38**:585–596

- 
- [26] R. Ortega, M. W. Spong, F. Gómez-Estern, G. Blankenstein. Stabilization of a Class of Under-actuated Mechanical Systems Via Interconnection and Damping Assignment[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 2002, **47**:1218–1232
- [27] R. Ortega, A.J. van der Schaft, I. Mareels, B. Maschke. Energy Shaping Control Revisited[M]. Springer - Verlag, Berlin, 2001
- [28] R. Ortega, Eloísa García-Canseco. Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control: A Survey[J]. European Journal of Control. 2004, **10**:432–450
- [29] D. E. Chang. Controlled Lagrangian and Hamiltonian Systems[D]. Ph.D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, 2002
- [30] D. E. Chang, A. M. Bloch, N. E. Leonard, J. E. Marsden, C. A. Woolsey. The Equivalence of Controlled Lagrangian and Controlled Hamiltonian Systems[J]. Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2002. Special issue dedicated to the memory of J.L. Lions
- [31] K. Machleidt, J. Kroneis, S. Liu. Stabilization of the Furuta Pendulum Using a Nonlinear Control Law Based on the Method of Controlled Lagrangians[C]. Symposium on Industrial Electronics. 2007, 2129–2134
- [32] D. V. Zenkov, A. M. Bloch, J. E. Marsden. Flat Nonholonomic Matching[C]. American Control Conference. Anchorage, AK, 2002, 2812–2817
- [33] Craig Woolsey. Energy Shaping and Dissipation: Underwater Vehicle Stabilization using Internal Rotors[D]. Ph.D. thesis, Princeton University, Princeton, NJ, 2001
- [34] C. K. Reddy, C. A. Woolsey. Energy Shaping for Vehicles with Point Mass Actuators[C]. American Control Conference. Minneapolis, MI, 2006, 4291–4296
- [35] A. M. Bloch, P. S. Krishnaprasad, J. E. Marsden, G. Sanchez de Alvarez. Stabilization of Rigid Body Dynamics by Internal and External Torques[J]. Automatica. 1992, **28**:745–756
- [36] A. M. Bloch, N. E. Leonard, J. E. Marsden. Stabilization of the Pendulum on a Rotor Arm by the Method of Controlled Lagrangians[C]. IEEE International Conference on Robotics and Automation. 1999, 500–505
- [37] C. Belta, V. Kumar. Motion Generation for Groups of Robots[J]. ASME Journal of Mechanical Design. 2003
- [38] H. Hanßmann, N. E. Leonard. Symmetry and Reduction for Coordinated Rigid Bodies[J]. European Journal of Control. 2006, **2**:176–194
- [39] S. S. Nair, N. E. Leonard. Stable Synchronization of Rigid Body Networks[J]. Networks and Heterogeneous Media. 2007, **2**:595–624

- 
- [40] A. Sarlette, R. Sepulchre, N. E. Leonard. Autonomous Rigid Body Attitude Synchronization[J]. *Automatica*. 2009, **45**:572–577
- [41] S. S. Nair, N. E. Leonard. Stable Synchronization of Mechanical System Networks[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2008, **47**:661–683
- [42] A. D. Lewis. Potential Energy Shaping after Kinetic Energy Shaping[C]. *IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, 2006, 3339–3344
- [43] A. M. Bloch, D. E. Chang, N. E. Leonard, J. E. Marsden. Controlled Lagrangians and the Stabilization of Mechanical Systems II: Potential Shaping[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2001, **46**(10):1556–1571
- [44] A. M. Bloch, N. E. Leonard, J. E. Marsden. Controlled Lagrangians and the Stabilization of Euler-Poincaré Mechanical Systems[J]. *International Journal on Robust and Nonlinear Control*. 2001, **11**:191–214
- [45] S. S. Nair, N. E. Leonard. A Normal Form for Energy Shaping: Application to the Furuta Pendulum[C]. *IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, USA, 2002, 516–521
- [46] D. Long, D. V. Zenkov. Relaxed Matching for Stabilization of Relative Equilibria of Mechanical Systems[C]. *IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA, 2007, 6238–6243
- [47] D. E. Chang. The Method of Controlled Lagrangians: Energy plus Force Shaping[C]. *IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*. Shanghai, P. R. China, 2009, 3329–3334
- [48] A. M. Bloch, N. E. Leonard, J. E. Marsden. Controlled Lagrangians and the Stabilization of Mechanical Systems I: The First Matching Theorem[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2000, **45**(12):2253–2269
- [49] N. E. Leonard. Stabilization of Underwater Vehicle Dynamics with Symmetry Breaking Potentials[J]. *Systems & Control Letters*. 1997, **32**:35–42
- [50] T. A. Posbergh, M. A. Egorov. Robust Stabilization of a Heavy Top[C]. *IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, FL, 1998, 3593–3598
- [51] Steven M. LaValle. *Planning Algorithms*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2006
- [52] Emilio Frazzoli. *Robust Hybrid Control for Autonomous Vehicle Motion Planning*[D]. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 2001
- [53] E. Frazzoli, A. Dahleh, E. Feron. Maneuver Based Motion Planning for Nonlinear Systems with Symmetries[J]. *IEEE Transactions on Robotics*. 2005, **21**:1077–1090

- 
- [54] R. G. Sanfelice, E. Frazzoli. A Hybrid Control Framework for Robust Maneuver-based Motion Planning[C]. American Control Conference. Seattle, WA, 2008, 2254–2259
- [55] E. Frazzoli. Maneuver-based Motion Planning and Coordination for Multiple UAVs[C]. AIAA/IEEE Digital Avionics Systems Conference. 2002, 1–12
- [56] Pradeep Bhatta. Nonlinear Stability and Control of Gliding Vehicles[D]. Ph.D. thesis, Princeton University, Princeton, NJ, 2006
- [57] S. Martínez, F. Bullo. Motion Planning And Control Problems For Underactuated Robots[C]. Workshop on Control Problems in Robotics and Automation. Las Vegas, 2008, 21–37
- [58] M. Piedmonte, E. Feron. Aggressive Maneuvering Of Autonomous Aerial Vehicles: A Human-Centered Approach[C]. International Symposium on Robotics Research. 1999
- [59] M. Athans, P. Falb. Optimal Control[M]. McGraw Hill, 1966
- [60] A. E. Bryson, Y. C. Ho. Applied Optimal Control[M]. New York: Hemisphere Publishing, 1975
- [61] M. J. van Nieuwstadt, R.M. Murray. Real-time Trajectory Generation for Differentially Flat Systems[J]. International J of Robust and Nonlinear Control. 1998, **11**:995–1020
- [62] M. J. van Nieuwstadt, R.M. Murray. Rapid Hover to Forward Flight Transitions for a Thrust Vectored Aircraft[J]. AIAA J on Guidance, Control and Dynamics. 1998, **21**:93–100
- [63] Francesco Bullo, Andrew D. Lewis. Geometric Control of Mechanical Systems: Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems[M], 3rd . New York: Springer Science and Business Media, 2005
- [64] Richard M. Murray, Zexiang Li, S. Shankar Sastry. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation[M]. Boca Raton, FL: CRC Press, 1994
- [65] M. Takegaki, S. Arimoto. Topology and Mechanics[J]. Inventionae Mathematicae. 1970, **10**:305–331
- [66] H. Cendra, Jerrold E. Marsden, Tudor S. Ratiu. Lagrangian Reduction by Stages[M]. Memoirs of American Mathematical Society, 2001
- [67] F. Bullo, A. D. Lewis. Reduction, Linearization, and Stability of Relative Equilibria for Mechanical Systems on Riemannian Manifold[J]. Acta Applicandae Mathematicae. 2007, **99**:53–95
- [68] H. K. Khalil. Nonlinear Systems[M], 3rd . Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002

- [69] Konda Reddy Chevva. Practical Challenges in the Method of Controlled Lagrangians[D]. Ph.D. thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 2005
- [70] Jerrold E. Marsden. Lectures on Mechanics[M]. New York: Cambridge University Press, 1992
- [71] J. E. Marsden. Geometric Mechanics, Stability and Control[J]. Springer Applied Mathematical Sciences Series. 1994, **100**:265–291
- [72] N. E. Leonard. Stability of a Bottom-heavy Underwater Vehicle[J]. Automatica. 1997, **33**:331–346
- [73] N. E. Leonard. Stability and Drift of Underwater Vehicle Dynamics: Mechanical Systems with Rigid Motion Symmetry[J]. Physica D. 1997, **105**:130–162
- [74] Joshua Grady Graver. Underwater Gliders: Dynamics, Control and Design[D]. Ph.D. thesis, Princeton University, Princeton, NJ, 2005
- [75] C. A. Woolsey, N. E. Leonard. Stabilizing Underwater Vehicle Motion using Internal Rotors[J]. Automatica. 2002, **38**:2053–2062
- [76] C. A. Woolsey. Reduced Hamiltonian Dynamics for a Rigid Body/Mass Particle System[J]. Journal Of Guidance, Control, and Dynamics. 2005, **28**:131–138
- [77] Y. Yam, D. L. Mingori, D. M. Halsmer. Stability of a Spinning Axisymmetric Rocket with Dissipative Internal Mass Motion[J]. Journal Of Guidance, Control, and Dynamics. 1997, **20**:306–312
- [78] R. O. Saber, R. M. Murray. Graph Rigidity and Distributed Formation Stabilization of Multi-vehicle Systems[C]. IEEE Conference on Decision and Control. 2002, 2965–2971
- [79] P. Ögren, E. Fiorelli, N. E. Leonard. Cooperative Control of Mobile Sensor Networks: Adaptive Gradient Climbing in a Distributed Environment[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 2004, **49**:1292–1302
- [80] D. V. Zenkov, A. M. Bloch, J. E. Marsden. Controlled Lagrangian Methods and Tracking of Accelerated Motions[C]. IEEE Conference on Decision and Control. Maui, Hawaii USA, 2003, 533–538
- [81] Francesco Bullo. Nonlinear Control of Mechanical Systems: A Riemannian Geometry Approach[D]. Ph.D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, 1999
- [82] F. Bullo, R. M. Murray. Tracking for Fully Actuated Mechanical Systems: A Geometric Framework[J]. Automatica. 1999, **35**:17–34

- [83] F. Bullo, K. M. Lynch. Kinematic Controllability for Decoupled Trajectory Planning in Underactuated Mechanical Systems[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 2001, **17**:402–412
- [84] Jerrold E. Marsden, Tudor S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*[M]. Berlin: Springer, 1999
- [85] D. R. Auckly, L. V. Kapitanski, W. White. Control of Nonlinear Underactuated Systems[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 2000, **53**(3):354–369
- [86] D. R. Auckly, L. V. Kapitanski. Mathematical Problems in the Control of Underactuated Systems[J]. *CRM Proceedings Lecture Notes*, American Mathematical Society. 2001, **27**:29–40
- [87] D. Auckly, L. Kapitanski. On the  $\lambda$ -equations for matching control laws[J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*. 2002, **41**:1372–1388
- [88] F. Gomez-Estern, R. Ortega, F. Rubio, J. Aracil. Stabilization of a Class of Underactuated Mechanical Systems via Total Energy Shaping[C]. *IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando, FL, 2001, 1137–1143
- [89] A. D. Lewis. Notes on Energy Shaping[C]. *IEEE Conference on Decision and Control*. Atlantis, Bahamas, 2004, 4818–4823
- [90] B. Ghahserifard, A. D. Lewis, A. R. Mansouri. A Geometric Framework for Stabilization by Energy Shaping: Sufficient Conditions for Existence of Solutions[J]. *Communications in Systems and Information*. 2008, **8**:358–398. Special issue dedicated to the 70th Birthday of Roger W. Brockett
- [91] J. A. Acosta, R. Ortega, A. Astolfi, A. D. Mahindrakar. Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control of Mechanical Systems With Underactuation Degree One[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2005, **50**:1936–1955
- [92] G. Viola, R. Ortega, R. Banavar, J. A. Acosta, A. Astolfi. Total Energy Shaping Control of Mechanical Systems: Simplifying the Matching Equations Via Coordinate Changes[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2007, **52**:1093–1099
- [93] D. E. Chang. Stabilizability of Controlled Lagrangian Systems of Two Degrees of Freedom and One Degree of Under-Actuation by the Energy-Shaping Method[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2010, **55**:1888–1893
- [94] 李茂青. 受控拉格朗日函数方法及其在欠驱动系统控制中的应用[D]. Ph.D. thesis, 北京航空航天大学, 北京, 2009

- [95] C. W., C. K. Reddy, A. M. Bloch, D. E. Chang, N. E. Leonard, J. E. Marsden. Controlled Lagrangian Systems with Gyroscopic Forcing and Dissipation[J]. *European Journal of Control.* 2004, **10**:478–496

## 个人简历、在学期间的研究成果

### 个人简历

1982年9月18日出生于江苏省南通市。2000年9月考入北京机械工业学院（现北京信息科技大学）计算机与自动化系自动化专业，2004年6月本科毕业并获得工学学士学位。2004年9月考入北京邮电大学自动化学院检测技术与自动化装置专业攻读硕士学位，2007年4月硕士毕业并获得工学硕士学位。2007年9月考入北京大学工学院力学与空天技术系攻读工学博士学位至今。

### 发表/待发表论文

- [1] Wu Fan, Geng Zhiyong. Coordinating Control of Multiple Rigid Bodies Based on Motion Primitives. *Acta Mechanica Sinica*, Accepted.
- [2] Wu Fan, Geng Zhiyong. Stabilization of Coordinated Motion for Underwater Vehicles. *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 27(3),438-444, 2011.
- [3] Wu Fan, Geng Zhiyong. Energy Shaping for Coordinating Internally Actuated Vehicles. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, Vol. 1(2): 023002, 2011.
- [4] Wu Fan, Geng Zhiyong. Formation control for Nonholonomic Agents using Passivity Techniques. *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 1(31),27-36,2010.
- [5] Wu Fan, Geng Zhiyong. Energy Shaping for Stably Coordinating Internally Actuated Underwater Vehicles. *Chinese Control Conference*, Yantai, 2011, Accepted.
- [6] Wu Fan, Geng Zhiyong. Energy Shaping for Coordinating Internally Actuated Vehicles. *Chinese Control and Decision Conference*, Mianyang, 2011, Accepted.
- [7] Wu Fan, Geng Zhiyong. Stabilization of Relative Equilibria for Coordinated Underwater Vehicles. *Chinese Control Conference*, Beijing, 395-400, 2010.
- [8] Wu Fan, Geng Zhiyong. An Approach to Formation Maneuvers of Multiple Nonholonomic Agents using Passivity Techniques. *Chinese Control and Decision Conference*, Guilin, 5007-5012, 2009.

## 参与课题

- [1] 仿射输入非线性系统的运动规划研究，国家自然科学基金项目，11072002。(成员性质：技术骨干)
- [2] 复杂网络动力学与控制及其在航空航天中的应用，国家自然科学基金项目，10832006。(成员性质：技术骨干)

## 致 谢

首先我要感谢导师耿志勇教授。在我攻读博士学位期间，耿老师自始至终都给予了我悉心地指导、热情地鼓励，为我指点迷津、增强信心。我尤其感谢耿老师对我所作研究选择的信任，并与我共同学习、讨论、研究力学系统的非线性控制。耿老师是我这四年来科研生活上的楷模，希望能从导师身上学到更多。很荣幸能与耿老师共事！

感谢航空航天动力学与控制实验室所有老师、同学在我学习生活中给予的指导帮助。感谢北京大学工学院教务、财务、党委、团委老师在我学习生活中提供的各种便利。祝你们身体健康、事业有成！

感谢教育部、国家自然科学基金委、湍流与复杂系统国家重点实验室在博士期间对我的经济资助。

最后，感谢我的父母，吴庆与徐秀红，感谢我的挚友羽辰。你们的爱、关心、理解、支持是我在外求学这段高度非线性路程上的镇定输入。我爱你们！



# 北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

## 原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名： 日期： 年 月 日

## 学位论文使用授权说明

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：  
按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；  
学校有权保留学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务；  
学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；  
在不以赢利为目的的前提下，学校可以公布论文的部分或全部内容。  
(保密的论文在解密后应遵守此规定)

论文作者签名： 导师签名：

日期： 年 月 日



## 学位论文出版授权声明

本人已经认真阅读《“中国精品学位论文全文数据库”建设章程》，同意将本人的学位论文提交给“中国精品学位论文全文数据库”项目的产品开发与运作方——北京北大方正电子有限公司全文发表，并可按“中国精品学位论文全文数据库稿酬支付说明”享受相关权益。同意论文提交后滞后：半年；一年；二年发布。

作者签名：\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_年\_\_月\_\_日

导师签名：\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_年\_\_月\_\_日



# “中国精品学位论文全文数据库”稿酬支付说明

作者信息：姓名：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_ 所在院系：\_\_\_\_\_

提交论文类型： 硕士学位论文，  博士学位文

授权作者可以选择报酬方式：

- 1、 唯一授权：本人论文电子版**独家**授权给北大方正，并可选择下列报酬方式(三选一)
- (1) 读书卡：硕士学位论文作者将获得有效期5年价值449元的方正Apabi数字图书馆读书卡1张，博士学位论文作者将获得有效期10年价值669元的方正Apabi数字图书馆读书卡1张；
  - (2) 现金+读书卡：硕士学位论文作者将获得30元现金和有效期3年价值269元的方正Apabi数字图书馆读书卡1张，博士学位论文作者将获得80元现金和有效期5年价值449元的方正Apabi数字图书馆读书卡1张。
  - (3) 销售分成：作者每年获得作者本人提交论文销售收入的10 %作为著作权使用费。本人同意提供并填写完整、正确的个人信息,并在下列任一个个人信息发生改变时及时通知北大方正（发邮件到ApabiCEDD@founder.com，或上网<http://www.apabi.com>在线提交），若因下列个人信息填写不完整、不正确或未将变化及时通知北大方正而发生的著作权使用费无法按期支付等问题由本人负责。北大方正及项目其它参与方负责对作者的下列个人信息保密：  
作者姓名：\_\_\_\_\_ 开户行：\_\_\_\_\_ 银行帐号：\_\_\_\_\_  
Email：\_\_\_\_\_ 手机：\_\_\_\_\_
- 2、 非唯一授权：本人论文电子版以**非独家**授权方式授权给北大方正，并获得下列报酬：  
读书卡：硕士学位论文作者将获得有效期3年价值269元的方正Apabi数字图书馆读书卡1张，博士学位论文作者将获得有效期5年价值449元的方正Apabi数字图书馆读书卡1张。

同时，本人导师将获得方正Apabi数字图书馆读书卡1张（硕士学位论文作者的导师的读书卡有效期5年，价值449元人民币；博士学位论文作者的导师的读书卡有效期10年，价值669元人民币）。

北大方正将按照作者选择的论文授权方式和报酬方式，及时支付作者应得的报酬。北大方正将提供数字版权保护技术（DRM）确保合法使用作者论文。同时，北大方正负责为作者提供网上查询论文销售情况及作者个人信息的服务，服务主页：<http://www.apabi.com>。

注：1、本“稿酬支付说明”一式两份，一份由作者本人保存，另一份做为领取稿酬凭证，交送给图书馆。

2、“学位论文授权使用声明”请直接装订在论文影印本的后面。

3、授权作者需提交“学位论文授权使用声明”的复印件、稿酬支付说明原件到图书馆论文采收处，领取稿酬。

