



北京大学

# 博士研究生学位论文

题目： 多运载体的协同渐近行为及其控制

姓 名 : 董润莎  
学 号 : 10886847  
院 系 : 工学院  
专 业 : 力学(力学系统与控制)  
研究方向 : 非线性系统控制  
导师姓名 : 耿志勇 教授

二〇一四年一月

# ***Coordinating Control in Asymptotic Behavior of Multiple Vehicle Systems***

Dissertation Submitted to

**Peking University**

In partial fulfillment of the requirement for the degree of

**Doctor of Engineering**

By

**Runsha Dong**

**(Mechanics(Dynamics and Control))**

Dissertation Supervisor: **Professor Zhiyong Geng**

Department of Mechanics and Aerospace Engineering

College of Engineering

Peking University

January, 2014, Beijing



## 版权声明

任何收存和保管本论文各种版本的单位和个人，未经本论文作者同意，不得将本论文转借他人，亦不得随意复制、抄录、拍照或以任何方式传播。否则，引起有碍作者著作权之问题，将可能承担法律责任。



## 摘 要

近年来，多运载体的协同运动成为控制领域的一个研究热点。一致性和编队作为两种重要的协同运动方式受到了研究者们的广泛关注，已有研究工作主要分为两方面，一方面是运载体个体的动态特性，另一方面是多个运载体之间的通讯方式，即通讯拓扑。考虑到在实际生活中，多运载体的通讯通常受到数字信道容量有限的约束，本文针对运载体的质点模型，研究了量化通讯及其对渐近一致性影响的问题；同时，针对运载体的刚体运动学模型和动力学模型，本文设计了渐近一致性和渐近编队控制律，从而使得带有姿态的多运载体渐近地达到一致和编队行为。研究成果如下：

1. 将运载体个体建模为质点模型，并用一阶积分器描述。在多个运载体组成的网络中，假定通讯带宽受限，给出了使用均匀量化方法的理论依据。定义了一致性水平(consensus level)概念，用以度量多运载体系统在使用量化方法之前和之后，其系统最终状态值的差别。基于指定一致性水平要求，设计了参数动态变化的量化器。针对均匀量化方法来说，是指动态调整均匀量化器的量化步长；从而有效地减小了多运载体在使用量化方法控制时系统最终状态值，与非量化方法控制下多运载体所达到的一致值之间的差别。
2. 将运载体个体建模为刚体，并用欧氏群 $SE(2)$ 、 $SE(3)$ 上的运动学模型描述。针对多运载体刚体运动学模型的一致性问题，设计了对数渐近反馈控制律；并将一致性控制律推广为编队控制律。其中，编队队形为刚性队形，并由编队任务指定。本文将欧氏群 $SE(2)$ 和 $SE(3)$ 两个非线性流形上的一致性控制、编队控制问题，转化为各自李代数空间里的系统镇定问题。在此过程中，讨论了完全的、有向树状的通讯拓扑图在协同控制中的作用；并指出，在环形的通讯拓扑图条件下，给定控制律，其一致和编队的渐近收敛性依赖于各运载体的初始状态。
3. 将运载体个体建模为刚体，并用欧氏群 $SE(2)$ 、 $SE(3)$ 上的动力学模型描述。本文首先定义了多个运载体刚体动力学模型的渐近一致和渐近编队；然后，在完全的通讯拓扑图以及有向树状的通讯拓扑图条件下，针对渐近一致性的协同目标，设计了比例-微分渐近反馈控制律，并将该一致性控制律推广到编队控制律。其中，编队队形是根据任务任意指定的，且在多运载体系统运动过程中始终保持刚性。本文利用运载体欧氏群上动力学模型所具有的对称性，

将多运载体系统满足相对位形约束(即, 编队队形)下的本体速度同步问题, 转化为多运载体系统相对平衡点镇定问题。沿着相对平衡点, 系统本体速度和控制输入为常值, 物理上体现为一种匀速运动, 从控制上讲, 相对平衡点是系统的稳态运动。多运载体系统沿相对平衡点的编队协同运动, 体现为运载体间保持相对位形, 且每个运载体沿自身相对平衡点运动; 针对本文多运载体在 $SE(2)$ 和 $SE(3)$ 上的动力学模型, 相对平衡点对应的匀速稳态运动有如下形式: 静止, 直线运动, 原地旋转或圆周运动, 螺旋运动。最后, 在树状通讯拓扑下, 针对多个动力学运载体以编队形式跟踪全局领导者运载体, 设计了分布式的控制律, 数值仿真验证了理论的有效性。

最后总结全文, 并给出后续研究方向。

**关键词:** 多运载体, 协同控制, 一致性, 编队, 刚体模型, 欧氏群, 量化通讯

# Coordinating Control in Asymptotic Behavior of Multiple Vehicle Systems

Runsha Dong (Mechanics(Dynamics and Control))  
Directed by Professor Zhiyong Geng

## Abstract

In recent years, the cooperative control of multi-vehicle systems becomes the highlight of research in the community of control. Consensus and formation, as two important ways of such cooperative working, have gained great attention. Previous research works were developed from two different aspects; one is the dynamics of the individual member, and the other the communication topology among the vehicles. In this paper, we first model each individual vehicle as a point of mass. Under the condition that the communication channel for information changing between vehicles has limited capacity, this paper considers the problem of quantized control for consensus. Then, we model each individual vehicle as a rigid body, whose dynamics is described by mechanical and dynamical model defined on Euclidean groups and by which, both the position and the attitude of the vehicle are considered. The distributed control laws are proposed for vehicles to asymptotically achieve consensus and formation. The main results of this paper are as follows.

First. Each individual vehicle is modeled as a point of mass, and described by first order integrator. Under the constraint for communication bandwidth of the vehicle network, the paper develops the theory for using uniform quantization method to achieve practical consensus. Quantization error has an impact on the process of reaching consensus and the final consensus value of the vehicles. In order to describe how exactly the consensus is achieved, the notion of consensus level is introduced the concept of consensus level is defined. For a given consensus level, the quantizer with varying parameter is proposed. For the uniform quantizer, it zooms out the initial quantization step size and by which, the effect of quantization error on consensus is reduced.

Second. Each vehicle is modeled as a rigid body and described by mechanical system evolving on the Euclidean groups  $SE(2), SE(3)$ . The communication topologies among vehicles are modeled as directed graphs. For consensus of multi-vehicle systems, the paper develops the logarithmic feedback control law and extends it for

formation control. The formation is rigid, arbitrary and given by formation tasks. The problem of formation control on Euclidean groups (nonlinear manifold) is converted to the problem of stabilization of the system on the associated Lie algebra (linear space). The roles of communication topologies including complete graph, tree graph and ring graph are presented.

Third. Each vehicle is modeled as a rigid body and described by dynamical system evolving on the Euclidean groups  $SE(2), SE(3)$ . The paper defines the concept of consensus and formation for the dynamical vehicles. For the consensus problem under complete graph and tree graph, the paper develops the distributed consensus control law, which is later extended in the formation control problem. The problem of formation control on  $SE(2)$  and  $SE(3)$  for the vehicles is converted to the problem of stabilization of the relative dynamical systems on the associated Lie algebra. When consensus and formation are achieved, the final motion pattern of the vehicles is determined by the equilibrium of the relative dynamics, and shown as the uniform motion in static, in a line, in spinning in place or drawing a circle, in a circular helix. Under the tree communication topology and for a formation tracking control problem, the paper designs a distributed control law based on consensus method.

**Key Words:** multi-vehicle system, cooperative control, consensus, formation, rigid body, Euclidean group, quantized communication

## 目 录

摘要.....	I
ABSTRACT（英文摘要） .....	III
<b>第一章 绪 论.....</b>	<b>1</b>
1.1 背景 .....	1
1.2 研究现状.....	2
1.3 本文主要贡献和结构安排.....	8
<b>第二章 基础知识 .....</b>	<b>11</b>
2.1 符号介绍.....	12
2.2 微分流形及李群 .....	12
2.2.1 微分流形.....	12
2.2.2 李群.....	15
2.2.3 指数映射与对数映射 .....	20
2.3 李群上的运载体系统.....	24
2.3.1 运载体系统欧氏空间上的积分器模型 .....	24
2.3.2 运载体系统欧氏群上的运动学模型.....	24
2.3.3 运载体系统欧氏群上的动力学模型.....	25
2.4 图论基础.....	26
2.5 稳定性理论 .....	26
<b>第三章 量化一致性.....</b>	<b>29</b>
3.1 多运载体系统量化一致性控制的问题描述 .....	29
3.2 量化器设计与通讯带宽分配 .....	35
3.2.1 量化器设计.....	35
3.2.2 通讯速率分配 .....	37
3.3 仿真 .....	43
<b>第四章 多运载体渐近一致与编队——运动学模型.....</b>	<b>47</b>
4.1 问题描述.....	47
4.1.1 运载体系统的运动学模型 .....	47

## 目 录

---

4.1.2 协同一致与编队.....	47
4.2 控制设计的理论分析.....	48
4.2.1 两个节点的一致性控制.....	49
4.2.2 两个节点的编队控制.....	51
4.2.3 多个节点的一致性控制与编队控制.....	54
4.3 仿真 .....	59
<b>第五章 多运载体渐近一致、编队与跟踪——动力学模型 .....</b>	<b>67</b>
5.1 问题描述.....	67
5.1.1 运载体系统的动力学模型.....	67
5.1.2 协同一致、编队与编队跟踪.....	68
5.2 控制设计的理论分析.....	71
5.2.1 一致性与编队控制 .....	71
5.2.2 编队跟踪控制 .....	79
5.3 仿真 .....	81
<b>结论 .....</b>	<b>89</b>
<b>参考文献 .....</b>	<b>91</b>
<b>附录 A 引理5.2的证明 .....</b>	<b>97</b>
<b>附录 B 引理5.4的证明 .....</b>	<b>98</b>
<b>附录 C <math>SE(2)</math>上多运载体编队的Simulink仿真模块图.....</b>	<b>99</b>
<b>个人简历、在学期间的研究成果 .....</b>	<b>101</b>
<b>致谢 .....</b>	<b>102</b>

## 表格

2.1 数学符号与变量说明 . . . . .	12
5.1 编队跟踪节点初值 . . . . .	85

## 插图

1.1	队形平移, 不保持刚性 . . . . .	6
1.2	队形平移加旋转, 保持刚性队形 . . . . .	6
2.1	平面 $\mathbb{R}^2$ 上的刚体旋转群 $SO(2)$ . . . . .	17
3.1	次优与其它量化速率分配方法不一致性对比 . . . . .	44
3.2	多运载体系统相对状态值(次优量化速率分配方法) . . . . .	44
3.3	量化步长调整过程中的不一致性对比(在k=35时刻调整步长 $\Delta$ ) . . . . .	45
4.1	树状通讯拓扑图 . . . . .	57
4.2	$N$ 个节点的环形通讯拓扑图 . . . . .	57
4.3	4个节点的树状通讯拓扑图 . . . . .	59
4.4	$SE(2)$ 上的4个运动学节点带有姿态的轨迹图(树状图,4个子图按顺序分别为 $3/20, 1/4, 1/2$ 以及全部仿真时间的节点运行轨迹) . . . . .	60
4.5	运动学节点状态与控制(树状图), 由上到下: 节点的控制输入, 位形和相对位形(相对于节点1); 由左到右: 平面坐标系的 $x$ 轴, $y$ 轴以及姿态 $\theta$ 表示。 . . . . .	61
4.6	4个节点的环形通讯拓扑图 . . . . .	61
4.7	$SE(2)$ 上的4个运动学节点带有姿态的轨迹图(环形图,不能达到期望编队, 4个子图按顺序为 $3/20, 1/4, 1/2$ 及全部仿真时间下的节点运行轨迹) . . . . .	62
4.8	运动学节点状态与控制(环形图,不能达到期望编队), 由上到下: 节点的控制输入, 位形和相对位形(相对于节点1); 由左到右: 平面坐标系的 $x$ 轴, $y$ 轴以及姿态 $\theta$ 表示。 . . . . .	63
4.9	$SE(2)$ 上的4个运动学节点带有姿态的轨迹图(环形通讯拓扑图,达到期望编队) . . . . .	63
4.10	运动学节点状态与控制(环形图,达到期望编队), 由上到下: 节点的控制输入, 位形和相对位形(相对于节点1); 由左到右: 平面坐标系的 $x$ 轴, $y$ 轴以及姿态 $\theta$ 表示。 . . . . .	64
4.11	4个节点的完全通讯拓扑图 . . . . .	64

---

4.12 $SE(2)$ 上的4个运动节点带有姿态的轨迹图(完全图,4个子图按顺序分别为 $3/20, 1/4, 1/2$ 以及全部仿真时间内的各节点运动轨迹) . . . . .	65
4.13 运动学节点状态与控制(完全图)。由上到下：节点的控制输入，位形和相对位形(相对于节点1)；由左到右：平面坐标系的 $x$ 轴， $y$ 轴以及姿态 $\theta$ 表示 . . . . .	66
5.1 树状通讯拓扑图(抽象) . . . . .	78
5.2 3个节点的完全通讯拓扑图 . . . . .	81
5.3 $SE(2)$ 上动力学节点带有姿态的运动轨迹图(完全图，4个子图按顺序分别为 $1/5, 7/20, 1/2$ 以及全部仿真时间的各节点运动轨迹) . . . . .	82
5.4 动力学节点状态与控制(完全图)。从上到下：节点的控制输入，位形，相对位形(相对于节点1)以及本体速度；从左到右：关于 $x, y$ 坐标以及姿态 $\theta$ 坐标。 . . . . .	83
5.5 $SE(2)$ 上动力学节点带有姿态的运动轨迹(树状图，4个子图按顺序分别为 $1/5, 7/20, 1/2$ 以及全部仿真时间的运动轨迹) . . . . .	84
5.6 动力学节点状态与控制(树状图)。由上到下：节点的控制输入，位形，相对位形(关于节点1)以及速度；从左到右：关于 $x, y$ 坐标以及姿态 $\theta$ 坐标。 . . . . .	85
5.7 跟踪轨迹及树状通讯拓扑示意图 . . . . .	86
5.8 编队跟踪问题节点的运动轨迹，4个子图按顺序分别为 $10\%, 30\%, 80\%$ 以及全部仿真时间的运动轨迹。 . . . . .	87
5.9 编队跟踪问题节点状态与控制，由上到下：节点的控制输入，位形，相对位形(关于全局 leader ) 以及本体速度；从左到右：关于 $x, y$ 坐标以及姿态 $\theta$ 坐标。 . . . . .	88
C.1 $SE(2)$ 上三个运载体编队的Simulink仿真搭建 . . . . .	99
C.2 $SE(2)$ 上力学(二阶)系统模型的参数输入 . . . . .	100
C.3 $SE(2)$ 上力学(二阶)系统控制器参数输入 . . . . .	100



# 第一章 绪 论

## 1.1 背景

近年来，多运载体的协同渐近行为成为控制领域的一个研究热点，它也是一门综合性交叉学科，涉及控制、物理、生物、通讯、人工智能等各个领域，并受到了来自这些领域的科研工作者的广泛关注<sup>[1-13]</sup>。在自然界的各种生物群落中，协同行为是十分普遍的，例如鸟群的编队迁徙、鱼群的集体觅食、蜂群的分工协作。人们注意到，这些生物群落的整体协同行为具有以下几个特点：

- 个体行为自主：尽管生物群落在整体上表现出有序的协同行为，但每个个体都是自主的，具有独立的决策和感知能力；个体的行为相对简单，并且不依赖于任何潜在的全局协调员；
- 有限的信息交互范围：由于群落通常具有一定的规模，并且个体具有有限的感知和测量能力，因此个体只能和相邻有限数目的其它个体进行信息交互；这也使得个体能够在规划自己的行为时将其相邻个体的行为考虑进来；
- 达到协同目标：复杂的群落整体协同行为是基于简单的个体行为规则以及个体间局部的信息交互产生的；如果个体行为规则由某个给定的协同目标主导，那么群落个体会形成一个协同的整体达到该目标。

生物群落有序的协同行为能够使得每个个体获得较大的利益，这些利益是仅凭单个个体无法高效获得的，如觅食生存、获取资源、躲避天敌。人们通过对自然现象的观察，深受群体协同行为优势的启发，从而在实际工程应用中，发展了一群具有感知、通信、决策、运动能力的运载体系统，如各类无人车辆、飞机、卫星等，通过对个体的简单控制，更好地实现了空间上分布的各类任务，如部署、搜救、监测等。

在这些人造群体系统中，单个个体的设计相对简单、功能较为单一，个体的功能失效不会影响到整个群体协同目标的实现。这些特点降低了整体系统的设计难度，能够实现降低成本、减少误差；同时这些特点也增加了整个群体系统的抗干扰能力、扩展能力和鲁棒性，提高了系统的工作效率，能够实现各类功能和效益的最大化。

本文考虑多运载体的协同控制问题。目前，多运载体系统的协同行为研究集中在系统建模、系统分析以及基于协同目标的系统控制上。其中，系统建模依据多运载体系统的特有性质，分为对个体的动态建模，以及对个体间信息流动方式的通讯拓扑建模<sup>[13,14]</sup>；系统分析包括对多运载体系统的稳定性分析<sup>[6]</sup>、可控性分析<sup>[15]</sup>；系统控制包括基于协同目标的渐近一致性控制<sup>[7]</sup>，编队控制<sup>[8,9]</sup>，跟踪控制<sup>[16]</sup>等。

多运载体的渐近一致性是研究多运载体协同行为的基础，受到了广泛的关注。渐近一致性控制是指设计控制律使得多个运载体系统中个体的某个关键变量值渐近地达到相等。这个关键变量可以是控制问题中期望的目标位置、速度或姿态等。通常，这些关键量被抽象建模为个体系统的输出变量(在某些情况下为系统的状态变量)。一致则是指每个个体的该输出变量值达到相等。在现实生活中，无论是泊车控制(控制车辆停到指定车位)，舰载机降落(控制直升机降落到运动的舰艇上)，还是航天器空中交汇对接都是致性控制的例子。同时，渐近一致性控制律经过适当的扩展，还可以用于解决编队控制问题，即多运载体系统在个体控制作用下由任意初始状态达到整体的给定队形。

多个运载体系统的协同行为是由个体基于局部信息的行为规则保证的。个体间信息传递的方式，即通讯拓扑通常建模为图(graph)。而信息在传递过程中，会受到外部干扰、数据丢包、内部通讯带宽有限等各类非理想通讯约束，这类约束对多运载体系统达到协同目标有着至关重要的影响。

以上是多运载体系统协同控制的一个简单介绍，更多内容可以参考综述类文献 [14]及相关书籍 [17]。在本文中，我们试图讨论多运载体系统的渐近一致控制、渐近编队控制，因为一致和编队是协同行为中两类非常重要的、应用广泛的运动形式。同时，我们也试图揭示，在多运载体系统的通讯带宽受限时，为了保证逼近协同目标，需要对通讯数据做必要的量化处理以及量化器设计。下一小节，我们先来回顾有关多运载体系统一致控制、编队控制及量化通讯研究的重要进展。

## 1.2 研究现状

在工程上，为了能够使得多运载体系统渐近地达到一致和编队的协同目标，根据个体动态模型特点、任务种类、通讯拓扑约束、通讯带宽限制、性能要求，需要为个体设计出简单、通用的控制器。当前大多数关于一致和编队控

制的研究主要集中在分析由简单节点构成的网络动态行为上，目的是揭示协同运动行为与个体控制及个体间通讯拓扑的内在联系<sup>[7,18-20]</sup>。

考虑将单个运载体系统建模为仅包含位置(或位置和速度)，而不包含姿态信息的质点动态模型，各类基于一致性控制(consensus control)解决交汇(rendezvous)、群集(flocking)、编队(formation)、跟踪(tracking)、主从运动(leader-follower)等相关问题的研究方向上都涌现了大量的研究成果<sup>[10,21-25]</sup>。

其中，早期开创性的工作<sup>[7]</sup>(作者O.Saber和R.Murray)将多个运载体的个体考虑为质点模型。所谓质点模型，即将整个运载体建模成运动质点，从而采用一阶、二阶积分器来刻画其时间演化行为。对于一阶积分器，他们采用了势能函数的设计思想，基于三类通讯拓扑模型(定常拓扑下的有向图、切换拓扑下的有向图、定常拓扑下带有时滞的无向图)设计了一致性控制律。W.Ren和R.Beard<sup>[20]</sup>推广了文献[7]和[26]的结论，将一阶积分器模型一致性控制对通讯拓扑要求的充要条件由有向图的强连通推广到当且仅当含有一个有向生成树。

将多运载体系统一致性控制问题中个体的动态模型由一阶积分器扩展到二阶积分器，甚至高阶积分器是很自然的想法。W.Ren在文献[27]中讨论了二阶积分器模型一致性控制，提出在有向的通讯拓扑图假设下其多运载体系统达到一致性的充分非必要条件是通讯拓扑图含有一个有向生成树。W.Yu则在文献[28]中给出了二阶积分器模型在给定控制律下能够使得多个运动体达到一致性的充要条件。W.Ren在文献[29]考虑了个体的高阶积分器模型，给出了多运载体系统达到一致性时关于通讯拓扑图的充分条件。

Z.Li<sup>[30]</sup>将多运载体系统的个体建模为线性系统，应用线性系统的成熟的工具：降维观测器理论，把单个线性系统的研究与多个线性系统结合起来，利用系统输出量和输入量来观测、重构、估计必要的状态变量，用以设计一致性控制律。文献[31]利用稳定的滤波器及动态输出反馈，来设计高阶线性系统模型的一致性控制律。文献[21,32]中，其运动体动态模型的非线性动力学用扇区或者锥形有界覆盖来表示，将非线性作为一种线性约束下的不确定性处理，在设计一致性控制律时规避了非线性，在增加了系统对非线性扰动的鲁棒性的同时也带来了控制设计的保守性。这类非线性系统模型的状态空间为欧氏空间。而运载体的状态空间一般为非线性流形，当系统的状态空间为非线性流形时，欧氏空间上的动力学模型可用于刻画运载体系统的局部行为，讨论系统平衡点附近的稳定性。

上述文献的一致性控制研究基于多运载体系统个体的质点模型，该模型描述了运载体系统的质心位置，其状态空间为欧氏空间。而同时考虑运载体系统其位置和姿态的一致性控制结果并不多见。文献 [33]讨论了多个欧拉-拉格朗日系统的一致性控制，我们注意到描述欧拉-拉格朗日系统的广义坐标可以理解为欧氏空间的局部坐标，当用该坐标描述姿态时，会出现角度表达的不唯一，例如 $\pi$ 与 $3\pi$ 都指代平面上刚体同一姿态。由于在表达角度时具有歧义性(不唯一)，这说明该坐标是局部坐标。对于多运载体系统包含姿态的协同问题来说，不同的运载体系统表示为状态流形上不同的点，这些点的相对状态能否用同一局部坐标邻域同胚映射到欧氏空间；不同点的切空间上表示的动态特性，放在同一空间中加以比较时的有效性，以及基于局部动力学设计的协同控制律的适用性范围等问题，都没有得到过正面的回答。文献 [34]采用坐标 $(x, y, \theta)$ 来描述运载体系统的位置 $(x, y)$ 和姿态 $\theta$ ，讨论了多个非完整运载体系统的一致性控制，该文设计控制律使得各运载体系统的位置达到一致，而没有关注姿态是否达到一致；这里 $(x, y)$ 坐标是二维欧氏空间中的位置描述， $\theta$ 坐标是非欧氏空间(平面上的圆环)姿态的局部描述。在多卫星系统姿态同步研究中，文献 [35]忽略了卫星质心在不同的位置，所讨论的卫星姿态同步问题不涉及平移运动和姿态旋转的耦合，因此可理解为在各卫星做直线运动时来调整姿态，不适用于卫星在空间以给定的队形进行大范围内的机动。这里，机动是指设计控制律实现巡航(指适宜于持续进行的、接近于定常飞行的飞行状态)轨迹之间的有限时间状态转移。

在各类实际应用中，例如卫星交汇对接、飞机空中加油、水面舰队行进补给，我们需要考虑个体系统以及整个队形的姿态。由于实际固体的理想化模型(即在受力后，物体其大小、形状和内部各点相对位置都保持不变)称为刚体(rigid body)，且现实世界中，舰艇、飞机、卫星、机器人、车辆等都是刚体；因此，一些研究学者把运载体系统的位形建模为描述位置和姿态的刚体。刚体运动(rigid motion)是物体上任意两质点之间距离始终保持不变的连续运动。刚体从一位置到另一位置的刚体运动称为刚体位移(rigid displacement)。通常，刚体位移既包括物体的平动又包括物体的转动<sup>[36]</sup>。对于多运载体系统来说，以编队的方式进行刚体位移，即刚性编队，是指由个体所组成的编队队形作为整体既平动又转动。刚体模型不同于欧氏空间质点模型，其位形空间不再是欧氏空间，而是欧氏群，这是一个具有群运算代数结构的非线性流形，通常称这类流形为李群。在二维空间和三维空间中，它们分别是 $SE(2)$ 和 $SE(3)$ 。刚体的位形和速度分别由群上的位形点以及在该点切空间的一个速度向量表示。由于刚

体具有固连在其上的本体坐标系(刚体坐标系)，因此，每个运载体系统具有参照本体坐标系的速度，不同运载体系统之间的本体速度比较需要坐标变换。和文献 [34] 中用局部坐标 $(x, y, \theta)$ 表示运载体系统位置和姿态相比，在欧氏群上演化的刚体模型动态方程是一种不依赖于局部坐标的整体描述，而且借助于李群的对称性，可通过构造不同本体坐标系之间的坐标变换对不同个体的速度加以比较。

运载体系统的刚体模型其状态(位形，速度)空间不再是线性空间，而是非线性位形流形以及该流形的切丛，因此在其上线性运算不再成立。刚体动力学的向量场是非线性依赖于刚体的状态的。用线性空间可以描述非线性流形平衡点附近的局部行为，而不适用于描述非线性流形上的全局运动。传统的研究平衡点附近同构于欧氏空间的方法在研究运载体大范围机动时的有效性范围还是一个难于回答的问题。基于线性系统模型来考虑多个运载体大范围的协同行为的收敛性，要与每个运载体的初值有关，从而只能是局部的。

对于力学领域的研究学者来说，用欧氏群 $SE(2)$ 和 $SE(3)$ 描述刚体位形空间是一种惯用的方法，而这一方法，也正在被控制领域的研究团队所接受，并开展了富有成果研究。近几年的相关文献如下所述。文献 [24]讨论的是刚体旋转群 $SO(3)$ ，刚体运动群 $SE(3)$ 上多运载体系统的跟踪问题，结果为几乎全局收敛(almost-global)。文献 [37, 38]讨论了 $SO(3)$ ， $SE(3)$ 上多运载体系统的协调问题；其中，运载体系统建模为 $SO(3)$ ， $SE(3)$ 上的运动学模型。多运载体系统渐近地达到协调，但运动轨迹无法事先指定。文献 [39, 40]讨论的是刚体运动群 $SE(2)$ 上一类特殊的一致性问题，即个体具有单位平移速度，且在同一圆周上运动的一致性控制律。现有的在欧氏群上的协同控制研究结果还不完善，许多有意义的协同问题还远没有解决，具有挑战性，有待于进一步探讨和研究。

我们注意到，很多研究将一致性控制律改进后，用于解决编队、轨迹跟踪等相关控制问题<sup>[16, 41-46]</sup>。编队控制最终要达到的目标是使得各个运载体系统之间达到指定的相对状态。质点模型在空间坐标系下，编队经常指定个体间相对位置为常值，要求编队中任意两个个体质心的相对位置在空间坐标系下固定。此时，多个运载体系统构成的编队为平移队形，即，队形本身的姿态保持固定时，队形只平移而不旋转，参考图1.1。给定欧氏空间中一点作为某个个体的位置、平移编队队形(相对位置)，需要知道该个体的空间坐标才能确定队形中其它个体的位置。而由描述位置、姿态的刚体模型所实现的刚性编队则不同。刚性编队是指在运动过程中任意两个刚体之间保持恒定的相对位形(包括相对

位置、相对姿态), 由于刚体个体具有固连在其上的本体坐标系, 它对于在部分已知的外界环境中, 根据一个运载体的位形从而确定其它移动的运载体的位形非常有用。刚性编队使得多运载体系统的队形能够以刚性整体形式进行旋转, 对于刚体个体来说则实现了运动轨迹和姿态的耦合, 见图1.2。对比平移队形(图1.1)和刚性队形(图1.2), 可以看到, 假设平移队形和编队队形中同一个leader走过相同的轨迹, 这时两种队形下同样的两个follower却走的是不同的运动轨迹, 在图1.2 中队形不但平移而且旋转, 保持了刚性。

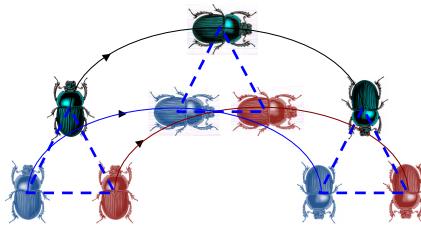


图 1.1 队形平移, 不保持刚性

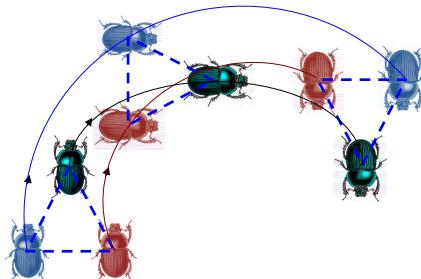


图 1.2 队形平移加旋转, 保持刚性队形

无论是多运载体系统的一致性控制还是编队控制, 都要对多运载体系统个体之间信息传递的方式, 即, 通讯拓扑, 进行建模。Jadbabaie等人在文献 [26]中提出了用代数图论的概念来描述通讯拓扑, 他们在多运载体系统的通讯拓扑图中, 把个体用节点表示, 个体间信息流动用边来表示。在现实生活中, 个体之间的通讯常常受到制约和影响, 表现为一定的不完备性, 例如: 通讯带宽受限, 通讯具有时变的传输数据时延, 通讯传输时产生数据丢包, 间隔非正常时间进行通讯。以上提到的多运载体系统协同控制的文献无论是质点模型还是刚体模型, 均假设了个体之间数据以高精度实值传输, 即通讯带宽不限, 但这在现实生活中是几乎不存在的: 通讯的带宽约束导致了有限的信道容

量。通讯带宽受限在很大程度上影响了多运载体系统的协同控制设计以及综合分析，需要给予特别的注意。

在数字信号处理领域，经常用量化办法解决通讯带宽受限的约束，量化指将信号的连续取值(或者大量可能的离散取值)近似为有限多个(或较少的)离散值的过程。量化主要应用于从连续信号到数字信号的转换中。连续信号经过采样成为离散信号，离散信号经过量化即成为数字信号。离散信号通常情况下并不需要经过量化的过程，但可能在值域上并不离散，还是需要经过量化的过程。事实上，由于多运载体系统的协同控制其通讯网络是由数字信道组成的，在通讯带宽受限情形下，引入了相似的量化思想。通过量化的办法研究一致性控制受到了广泛关注，并在不同方面获得了有意义的结果<sup>[47-58]</sup>。

通过传递量化数据的通讯方式来研究一致性控制首先是在文献[59]中提出的，其中，网络的每个节点被赋予量化的整数值，它们在控制律下逼近于全部节点初值均值的整数值。这里，量化一致性控制是在计算机计算方面达到的数值相等。在文献[17]中，量化的一致性控制定义为当通讯传输的是数字信号而非连续模拟信号时，为多运载体系统设计控制律使得个体的状态值逼近相等。文献[60]讨论了控制系统反馈镇定的量化方法，其中数据以一定的数据率<sup>[61,62]</sup>在数字信道内传输。量化方法描述了以何种方式从预先指定的数据集合里选择数据以逼近观测到的单个数据。每一个量化器都赋予了一种量化方法<sup>[63]</sup>。文献[25,61,64-66]研究了不同量化方法下的量化信息如何影响了多运载体系统最终近似达到的一致值，它们指出，量化误差(量化值与实际值的偏差)对一致性控制下系统稳定性分析和最终多运载体系统达到的一致值都有影响。在文献[67]中，作者基于收缩系统(contraction system)的收敛性能，设计了在给定性能指标要求下适当的量化器。

根据多运载体系统协调控制研究现状的综述，多个运载体系统的协同渐近控制既是热点，又面临很多挑战。本文的研究主要集中在两个方面：(1)针对多运载体系统的质点模型，基于通讯约束研究了多运载体系统量化控制达到实际的一致问题。(2)针对多运载体系统的刚体模型，本文设计控制律使得多运载体系统在给定的通讯拓扑结构下由任意初始状态达到协同渐近一致性或协同编队。论文的主要贡献和安排见下一小节。

### 1.3 本文主要贡献和结构安排

第二章：为了描述运载体系统刚体模型的位置和姿态，需要引入欧氏群概念，由于欧氏群是李群，它属于非线性微分流形，在介绍欧氏群之前，本章给出了需要用到的基本微分几何概念、李群概念。为了刻画运载体系统刚体模型的状态空间，本章介绍了切丛，切空间概念，同时给出了运载体系统的刚体运动学模型、刚体动力学模型。为了描述刚体在欧氏群上的运动演化过程及特性，我们介绍了李群单位元附近和李代数0点附近之间的同胚映射：对数映射及其对时间的导数。为了对多运载体系统的通讯拓扑建模，介绍了图论相关知识。由于本文的核心之一内容是镇定多运载体系统相对平衡点以达到协同渐近控制目标，本章介绍了控制理论的稳定性结果。

第三章：本章将运载体系统建模为质点模型，并用一阶积分器来描述，在通讯带宽受限的约束条件下研究了多运载体系统量化控制问题。本章指出，给定量方法下，采样时间、网络拓扑特性、量化误差上界均影响多运载体系统能够达到的一致值。为了度量多运载体系统在量化控制下的最终状态值和非量化控制所达到一致值的偏差，定义了不一致性和一致性水平(consensus level)度量。当给定一致性水平的要求时，在有限通讯数据情形下，设计了参数动态变化的量化器。其主要创新在于(1)基于总体通讯带宽约束，依据输入通讯信号任意概率密度下，为使得多运载体系统量化控制下的最终状态值与非量化方法设计的控制所达到的一致值相差(即不一致性)最小，设计了均匀量化器，并依据次优方法和系统相对初值分配了总数据通讯带宽；(2)当物理条件允许，动态调整均匀量化器的量化步长参数能有效地减小运载体系统量化控制下的最终状态值与非量化方法设计的控制所达到的一致值之间的差别。

第四章：本章用欧氏群 $SE(2)$ ,  $SE(3)$ 来描述刚体的位置和姿态，将运载体系统建模为欧氏群上的全驱刚体运动学模型。由于欧氏群是李群，具有对称性的特性，且运载体系统的相对位形通过对数映射与李代数(线性空间)上对应的状态有关，本章充分利用李群及李代数的代数结构，群作用的对称性，参考多运载体系统欧氏空间质点模型(一阶积分器)的一致性控制、编队控制、跟踪控制已有的结果，首先为两个运载体系统在双向通讯拓扑下，设计了渐近一致性控制律和渐近编队控制律，之后推广到多个运载体系统在树状、完全、环形通讯拓扑图下的渐近一致性控制和编队控制。其主要创新在于(1)针对多个运载体系统刚体运动学模型的一致性控制，设计了对数反馈控制律；并将该一致性控

制方法推广为多运载体系统刚体运动学模型的编队控制，这里的编队队形是根据任务任意指定的，且为刚性队形；(2)将欧氏群 $SE(2)$ 和 $SE(3)$ (李群)两个非线性流形上的一致性控制、编队控制问题转化为其各自相关李代数两个线性空间里的系统镇定问题；(3)明确了多运载体系统树状、完全、环形通讯拓扑在一致性控制、编队控制中的作用，指出在树状和完全通讯拓扑条件下，所设计的控制律使得多运载体系统由任意初始状态达到一致性和指定编队队形；在环形通讯拓扑条件下，多运载体系统达到一致性和指定编队队形受各运载体初值的影响。

第五章：本章将运载体建模为欧氏群上的全驱刚体动力学模型，定义了该模型下一致性、编队和编队跟踪。在树状通讯拓扑和完全通讯拓扑条件下，针对多个运载体系统刚体动力学模型，设计了一致性控制律和编队控制律。在树状通讯拓扑下，设计了编队跟踪控制律。其中，编队队形是任意指定的，且保持刚性。利用运载体系统所具有的对称性，将多运载体系统满足相对位形约束(编队队形)下的本体速度同步问题转化为多运载体系统的平衡点镇定问题。其主要创新在于：(1)针对多个运载体系统刚体动力学模型的一致性控制，设计了比例-微分反馈控制律；并将该一致性控制方法推广为编队控制、编队跟踪控制；其中，编队队形是根据任务任意指定的，且为刚性队形；(2)描述了多运载体系统在 $SE(2)$ 和 $SE(3)$ 上达到一致性和编队时依赖于相对平衡点的运动形式(稳态、匀速运动)：静止，直线运动，原地旋转或圆周运动，螺旋运动；(3)陈述了一致性控制、编队控制和编队跟踪控制中通讯拓扑的作用。



## 第二章 基础知识

描述运载体位置和姿态的刚体模型是非线性控制系统。在过去的几十年里，有关非线性系统控制的研究展现了控制理论和几何力学的丰富联系。本文针对运载体协同渐近行为设计控制律，正是利用了微分几何的思想和方法在力学系统控制上的应用，即几何力学。参考 [68]，我们先来简要介绍微分几何是如何被引入来描述运载体等力学系统的。

众所周知，牛顿(Newton)力学使用的物理空间是三维的，即欧氏空间，对于力学系统的质点模型(可以是单个点，也可以是 $N$ 个点的质点系)来说，用空间坐标来描述力学系统点的运动，这种描述与人们日常认知相符。在拉格朗日(Lagrange)力学中，提出了力学系统的独立坐标，即当力学系统的单个质点模型受到 $k$ 维完整约束时，力学系统只能在 $k(k < 3)$ 个超曲面的“公共交面”上运动，这个公共交面为 $3 - k$ 维的，对于 $N$ 个点的质点系，是 $3N - k$ 维，它是力学系统质点的自由运动空间，称为位形空间。

为了描述力学系统的运动，进行数学上的计算和分析，人们将拓扑结构引入位形空间，称为拓扑空间；并通过拓扑空间的邻域与欧氏空间的同胚映射，将坐标引入拓扑空间的邻域。在满足相容性条件以后，这类拓扑空间具有了微分结构，可以进行微分运算，并被称为流形。力学系统的位形空间一般都满足上述条件，因此它们的位形空间为流形。给定流形到实数直线的映射(在流形上给定一个标量场)，反之就有由实直线上的一个区间到流形的映射则给出流形上的曲线，流形上有了曲线，就有切矢量，之后就有切空间、切丛、余切空间、余切丛的概念。在流形上给定向量场，于是就出现了寻求以向量场的向量为切向量的曲线——积分曲线的问题，从而在流形上开始了常微分方程的理论讨论。有关微分几何的详细内容及其在物理和力学中的应用，可以参照文献 [36, 69–71] 以及 [72]。

本章说明了后续章节中所用到的符号和变量的含义，介绍了整篇论文需要用到的微分几何基础知识，运载体力学系统模型，同胚(指数、对数)映射；同时为了描述多个运载体系统之间通讯拓扑，介绍了图论的基本知识；本章还介绍了有关系统稳定性的基本结论。

## 2.1 符号介绍

本文中统一用斜体表示变量，小写字母黑斜体表示向量，大写字母黑斜体表示矩阵。文中出现的所有向量，若不作特别说明，均为列向量。文中使用了Einstein求和表示惯例，即 $\alpha_i \beta^i := \sum_i \alpha_i \beta^i$ 。表2.1说明了本文要用到的数学符号与变量。

表 2.1 数学符号与变量说明

符号变量	含义
$t$	时间变量
$B$	通讯拓扑图的关联矩阵
$A$	通讯拓扑图的邻接矩阵
$\Delta$	量化器的量化步长
$\mathbb{R}^n$	$n$ 维实数空间
$\delta_j^i$	当且仅当 $i = j$ 时取1，否则取0
$C^\infty(M, \cdot)$	空间 $M$ 上光滑映射
$\det(\mathbf{R})$	矩阵 $\mathbf{R}$ 的行列式
$\times$	三维向量间的叉积运算
$\mathbf{M}^T$	矩阵 $\mathbf{M}$ 的转置
$\mathbf{I}_n$	$n$ 维单位矩阵
$\mathbb{C}^{n \times n}$	$n \times n$ 维复矩阵空间
$\mathbb{R}^{n \times n}$	$n \times n$ 维实矩阵空间
$\mathbb{R}^-$	非正实数 $(-\infty, 0]$
$\text{Im}(\cdot)$	复数的虚部
$\text{diag}(\mathbf{x})$	以 $\mathbf{x}$ 为对角元素的对角矩阵
$\ \cdot\ $	欧氏范数
$\underline{\sigma}(\mathbf{M})$	矩阵 $\mathbf{M}$ 的最小奇异值
$\overline{\sigma}(\mathbf{M})$	矩阵 $\mathbf{M}$ 的最大奇异值

## 2.2 微分流形及李群

### 2.2.1 微分流形

人们对欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的微分与积分运算已经非常熟悉，但某些情况下，我们需要在弯曲的空间里应用微积分。流形就是在局部类似于(looks like)欧式空间的弯曲空间，它对力学和控制理论中很多问题的描述都非常重要。举例来说，

我们最熟悉的流形就是 $n$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ ；圆周 $S^1$ 是平面倒立摆的位形空间；球面 $S^2$ 是球面摆的位形空间；自由刚体旋转的位形空间是 $SO(3)$ (稍后有详细介绍)；我们注意到，力学系统(包括运载体系统)的位形通常可以由流形上的点来描述。本小节介绍的微分流形基本概念参考专著 [36] 及 [73]。

一个 $n$ 维可微流形 $M$ 是一个连通的拓扑空间(该拓扑空间具有可数个基，且其中任意两个不同的点具有不相交的邻域)，它有以下性质：

(1) $M$ 局部同胚于 $\mathbb{R}^n(n < \infty)$ ，即，在点 $p \in M$ 附近，存在邻域 $U$ 及同胚映射 $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，使得 $\phi(U)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集。而“坐标对” $(U, \phi)$ 又称为局部坐标图(local coordinate chart)。

(2)如果 $(U, \phi)$ 和 $(V, \varphi)$ 是任意两个局部坐标图，那么重叠映射 $\varphi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$ 是 $C^r(r \geq 1)$ 的，即，存在 $r$ 阶偏导数。

流形的第一个性质是指流形局部上和欧氏空间相似，第二个性质赋予流形以微分结构。当 $\varphi \circ \phi^{-1}$ 是微分同胚(具有光滑逆的光滑映射，其中光滑性用 $C^\infty$ 表示，指该映射各阶偏导数存在且连续)时，流形称为光滑流形。

设 $p$ 为流形 $M$ 上一点，所有经过 $p$ 点且在 $p$ 点相切的曲线构成一个等价曲线类，称该等价曲线类为 $p$ 点处的一个切向量。所有在 $p$ 点与 $M$ 相切的向量构成一个向量空间，称为流形 $M$ 在 $p$ 点处的切空间，记为 $T_p M$ 。

我们也可以从微分算子的角度来定义切向量和切空间。设 $C^\infty(p)$ 为 $M$ 上光滑、实值函数的集合，其定义域为 $p$ 的某个开邻域。对于映射 $X_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ ，如果对所有的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 和 $f, g \in C^\infty(p)$ ，满足

(1)线性性质： $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha(X_p f) + \beta(X_p g)$ ；

(2)莱布尼兹(Leibniz)法则： $X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g)$ ；

则称映射 $X_p$ 为一个微分算子。 $M$ 在 $p$ 点处的切空间 $T_p M$ 是所有微分算子 $X_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ 的集合。切空间中的元素称为切向量。设 $(U, \phi)$ 为 $M$ 上的一个局部坐标图，其局部坐标为 $(x_1, \dots, x_n)$ ，微分算子 $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ 的集合构成了 $T_p M$ 的一个基，因此，

$$\mathbf{X}_p = X^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + X^n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

向量 $(X^1, \dots, X^n) \in \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbf{X}_p \in T_p M$ 的局部坐标表示。

当给定流形 $M$ 上点 $p$ 的切空间 $T_p M$ 时，定义 $T_p M$ 上的线性泛函 $\omega_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ，所有 $\omega_p$ 的集合称为 $M$ 上点 $p$ 余切空间，记为 $T_p^* M$ 。 $T_p^* M$ 是与 $T_p M$ 维数相同

的向量空间， $T_p^*M$ 中的元素称为余切向量。若 $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ 是 $T_pM$ 与局部坐标 $(x_1, \dots, x_n)$ 相对应的一个基， $T_p^*M$ 的对偶基为 $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ ，其中

$$\left\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_j^i, i, j = 1, \dots, n.$$

流形 $M$ 上所有点切空间的不交并集构成了一个 $2n$ 维的流形 $TM$ ，称为切丛，即

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

$TM$ 的元素记为 $(p, X_p)$ ，其中， $p \in M, X_p \in T_p M$ 。相应地，流形 $M$ 上的余切丛 $T^*M$ 定义为

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M.$$

$T^*M$ 是 $2n$ 维的流形，其中的元素可记为 $(p, \omega_p)$ ，其中， $p \in M, \omega_p \in T_p^* M$ 。

流形 $M$ 上的一个向量场 $X$ 给每一点 $p$ 分配了一个切向量 $X_p$ ，它可以用来表示流形上的动态系统，设流形上的一条运动轨迹为：

$$\dot{p}(t) = X(p(t)),$$

则称 $X$ 为 $M$ 上的向量场，称轨迹 $p(t)$ 为向量场 $X$ 的积分曲线。因此，所有的运动轨迹都是向量场的积分曲线。由常微分方程解的存在性和唯一性可知，对于给定的非零向量场，其积分曲线的存在性可以局部得到保证。

流形上 $M$ 所有光滑向量场的集合构成了一个线性空间 $\mathfrak{X}(M)$ ，如果在这个空间存在一个双线性算子(在它的两个参数上都是线性映射的函数) $V \times V \rightarrow V$ ，记为 $[\cdot, \cdot]$ ，它满足

- (1) 反对称性：对于所有的 $v, w \in V$ ，有 $[v, w] = -[w, v]$ ；
- (2) 雅克比恒等式：对于所有的 $v, w, z \in V$ ，有 $[[v, w], z] + [[z, v], w] + [[w, z], v] = 0$ ；

则称 $\mathfrak{X}(M)$ 为一个李代数。

## 2.2.2 李群

李群是一类微分流形，它在现代理论物理和动力系统的研究中非常重要。例如，平面自由刚体的位形空间就是李群 $SE(2)$ ，空间自由刚体的位形空间是李群 $SE(3)$ 。李群 $SE(2)$ 和 $SE(3)$ 都是特殊的欧氏群，稍后有详细介绍。

为了介绍李群，我们先来介绍群。群是一个定义了二元群运算(乘法)的集合，它满足封闭性，结合性，单位元的存在性及任意元素可逆性。由于李群是光滑流形，它除了满足上述群的代数特点外，还满足群运算(乘法)和逆运算均光滑的特点，即映射

$$\begin{aligned}\mu : G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}v : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1}\end{aligned}$$

均为光滑映射。下文提到李群均记为 $G$ 。李群上有两类微分同胚映射：左平移(left translation)和右平移(right translation)，它们反映了群的结构。给定点 $g \in G$ ，在该点的左平移( $L_g$ )和右平移( $R_g$ )分别定义为：对于任意 $h \in G$ ,

$$\begin{aligned}L_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto gh\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}R_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto hg.\end{aligned}$$

针对矩阵李群来说，左(右)平移即相对于矩阵左(右)乘。如果群是可交换的，即Abelian群，则有 $L_g = R_g$ 。

基于左平移和右平移映射对群上点的作用，定义从群上一点的切空间到另一点的切空间的映射，即左切映射( $T_h L_g$ )、右切映射( $T_h R_g$ )分别为：

$$\begin{aligned}T_h L_g : T_h G &\rightarrow T_{gh} G, \\ T_h R_g : T_h G &\rightarrow T_{hg} G.\end{aligned}$$

左(右)切映射使得群上不同点处的切向量能够加以比较。

相应地，我们由左(右)切映射来定义左(右)不变向量场。设 $X$ 为 $G$ 上的一个向量场，对于所有的 $h \in G$ ，如果有

$$T_h L_g X(h) = X(gh),$$

则 $X$ 是左不变的；如果有

$$T_h R_g X(h) = X(hg),$$

则 $X$ 是右不变的。通过左(右)不变向量场的定义可以看到，空间上一点的向量场能够由另一点的向量场通过左(右)切映射变换来描述。同样地，空间上一点的切空间能够由另一点的切空间通过左(右)切映射变换来描述。不失一般性，取李群 $G$ 在单位元 $e$ 处的切空间 $T_e G$ ，它和李群 $G$ 上所有左不变向量场的集合(记为 $\mathfrak{X}_L(G)$ )是关于向量空间同构的，在其上定义了李括号 $[\cdot, \cdot]_L$ 后为一李代数。对于 $G$ 上任意两个左不变向量场，他们的李括号运算产生的向量场仍是左不变的。利用向量场的李括号诱导出向量空间 $T_e G$ 的李代数结构，那么具有此李代数构造的向量空间 $T_e G$ 称为 $G$ 的李代数，记为 $\mathfrak{g}$ 。

$\mathfrak{g}$ 为一线性空间，定义其上的李括号运算 $\forall A_1(e), A_2(e) \in \mathfrak{g}, [A_1(e), A_2(e)] = [A_1, A_2]_L(e)$ 。对于给定的 $A_1 \in \mathfrak{g}$ ，定义小伴随算子 $\text{ad}_{A_1} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ，使得任意的 $A_2 \in \mathfrak{g}$ ，有

$$\text{ad}_{A_1}(A_2) = [A_1, A_2].$$

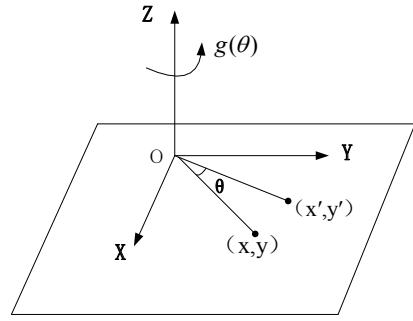
易知， $\text{ad}_{A_1}$ 是李代数上的线性映射。对于矩阵李群来说，其相应李代数上的李括号运算为 $[A_1, A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1$ 。对于任意 $g \in G$ 以及 $A \in \mathfrak{g}$ ，伴随映射 $\text{Ad}_g$ 定义为：

$$\text{Ad}_g(A) = gA g^{-1}.$$

下面举例介绍几个常用到的矩阵李群及相应的李代数。

例： $\mathbb{R}^2$ 上的旋转群，特殊正交群 $SO(2)$ ，即绕固定轴的旋转群，见图2.1。其元素 $g(\theta)$ 可以用一个参数 $\theta$ 来确定。这里， $\theta$ 的取值范围为 $[0, 2\pi]$ 。群运算“乘法”规定为相继作二个转动：

$$g(\theta_1)g(\theta_2) = g(\theta_{12})$$

图 2.1 平面  $\mathbb{R}^2$  上的刚体旋转群  $SO(2)$ 

这里,  $\theta_{12} = \theta_1 + \theta_2$ 。我们也可以用矩阵线性变换的形式来表示  $SO(2)$ :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{g(\theta)} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}.$$

$SO(2)$  中的单位元是单位矩阵  $I_2$ 。 $SO(2)$  的李代数  $\mathfrak{so}(2)$  是由  $2 \times 2$  反对称矩阵组成的, 它具有如下形式:

$$\hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix},$$

其中  $\omega \in \mathbb{R}$  可以理解为角速度, 即角度  $\theta$  的时间导数; 算子  $\hat{\cdot}$  是从  $\mathbb{R}$  到  $\mathfrak{so}(2)$  的映射。

例:  $\mathbb{R}^3$  上的旋转群, 特殊正交群  $SO(3)$ :

$$SO(3) = \left\{ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T, \det(\mathbf{R}) = 1 \right\}.$$

$SO(3)$  描述了三维空间中刚体的姿态。 $SO(3)$  中的单位元是单位矩阵  $I_3$ 。考虑到  $SO(3)$  的李代数是在单位矩阵处的切空间, 将等式  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = I_3$  两边微分, 得

$$\dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}})^T + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = 0,$$

其中  $\dot{\mathbf{R}}$  表示关于时间求导。因此  $\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}$  是斜对称的。限制在单位元上, 可

知 $SO(3)$ 的李代数为所有斜对称矩阵的集合：

$$\{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | A^T = -A\}.$$

定义斜对称算子 $\hat{\cdot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ 使得 $\hat{x}\mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ , 即对于 $\mathbf{x} = [x^1, x^2, x^3]^T$ , 有

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{bmatrix} = \hat{e}_i x^i.$$

其中,  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ 为 $\mathfrak{so}(3)$ 的一组基。 $\mathfrak{so}(3)$ 中的元素可以表达为 $\hat{\mathbf{x}}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , 称 $\mathbf{x}$ 为李代数元素 $\hat{\mathbf{x}}$ 的坐标向量。

记:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \hat{e}_i \omega^i \in \mathfrak{so}(3)$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)^T$ 为 $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 的坐标向量, 称 $\boldsymbol{\omega}$ 为刚体的角速度。由于 $SO(3)$ 是矩阵李群, 李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 上的李括号运算为矩阵交换乘法运算:

$$[\hat{\boldsymbol{\omega}}_1, \hat{\boldsymbol{\omega}}_2] = \hat{\boldsymbol{\omega}}_1 \hat{\boldsymbol{\omega}}_2 - \hat{\boldsymbol{\omega}}_2 \hat{\boldsymbol{\omega}}_1$$

因此, 赋予李括号的李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 与赋予向量叉积的线性空间 $\mathbb{R}^3$ 之间是同构的。

例: 平面上 $\mathbb{R}^2$ 上的刚体运动群 $SE(2)$ , 同构于 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ , 其中 $\mathbb{S}^1$ 是一维球面(平面上的圆周)： $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ .  $SE(2)$ 中任一元素 $g$ 可以表示为一个 $3 \times 3$ 矩阵:

$$g = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中 $(\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{S}^1$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 。 $SE(2)$ 中的单位元是单位矩阵 $\mathbf{I}_3$ 。 $SE(2)$ 的李代数为 $\mathfrak{se}(2)$ , 具有一组基:

$$\varsigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \varsigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \varsigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathfrak{se}(2)$ 中的一个元素 $\hat{\xi}$ 可以写成矩阵形式:

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & v_x \\ \omega & 0 & v_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \varsigma_i \xi^i,$$

其中 $\xi = (\omega, v_x, v_y)^T \in \mathbb{R}^3$ 为 $\hat{\xi}$ 的坐标向量。

李代数 $\mathfrak{se}(2)$ 上的李括号运算为矩阵交换乘法运算:

$$[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] = \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2 \hat{\xi}_1.$$

李代数 $\mathfrak{se}(2)$ 通过同构映射 $\hat{\xi} \mapsto (\omega, v_x, v_y)^T$ 与线性空间 $\mathbb{R}^3$ 同构。

例:  $\mathbb{R}^3$ 空间上的刚性变换群 $SE(3)$ 定义为:

$$SE(3) = \{T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 | T(x) = \mathbf{R}x + \mathbf{b}, x \in \mathbb{R}^3, \mathbf{R} \in SO(3), \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3\}.$$

$SE(3)$ 中一个元素 $g$ 可以表示为 $4 \times 4$ 矩阵:

$$g = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

$SE(3)$ 中的单位元是单位矩阵 $I_4$ 。 $SE(3)$ 的李代数记为 $\mathfrak{se}(3)$ 。 $\mathfrak{se}(3)$ 的一组基为

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \\ \varepsilon_4 &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{0}} & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_5 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{0}} & \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_6 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{0}} & \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{se}(3)$ 中的一个元素 $\hat{\xi}$ 可以写成 $4 \times 4$ 矩阵形式:

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_i \xi^i,$$

其中  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^6)^T$  为  $\hat{\xi}$  的坐标向量,  $\omega \in \mathfrak{so}(3)$ ,  $v \in \mathbb{R}^3$ 。

李代数  $\mathfrak{se}(3)$  上的李括号运算为矩阵交换乘法运算:

$$[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] = \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2 \hat{\xi}_1.$$

李代数  $\mathfrak{se}(3)$  通过同构映射  $\hat{\xi} \mapsto (\omega^T, v^T)^T$  与线性空间  $\mathbb{R}^6$  同构。

### 2.2.3 指数映射与对数映射

对于任意切向量  $\xi \in T_e G$ , 通过左切映射我们能够描述  $G$  上其它点的切向量, 即  $\xi$  诱导出左不变向量场  $X_\xi$ 。设  $\phi_\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$  表示  $X_\xi$  的积分曲线, 它在  $t = 0$  时经过  $G$  的单位元  $e$ , 即  $\phi_\xi(0) = e$ ,  $\frac{d}{dt}\phi_\xi(t) = X_\xi(\phi_\xi(t))$ , 则  $\phi_\xi(t) = \exp(t\xi)$  (证明见 [71])。

由  $\exp(\xi) = \phi_\xi(1)$  定义的函数  $\exp : T_e G \rightarrow G$  称为将李代数  $\mathfrak{g}$  映射到  $G$  的指数映射(exponential map)。指数映射将  $t\xi \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{R}$  映射到  $\phi_\xi(t) \in G$ 。因此, 指数映射将  $0 \in \mathfrak{g}$  的某个邻域微分同胚映射到  $e \in G$  的某个邻域, 从而有逆映射称为对数映射  $\log = \exp^{-1} : G \rightarrow \mathfrak{g}$ 。

对于矩阵李群(如  $SO(n)$ ,  $SE(n)$ ), 指数映射可表示为矩阵指数,

$$\exp(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathbf{A}^i.$$

对于矩阵指数, 可定义其逆映射(矩阵对数)如下:  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  的矩阵对数系指满足  $e^{\mathbf{X}} = \mathbf{A}$  的任意矩阵  $\mathbf{X}$ 。

下面我们介绍矩阵指数映射、对数映射及它们的一些特性。

**引理 2.1:** ([74]PP20) 设  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  没有  $\mathbb{R}^-$  上的特征值, 则  $\mathbf{A}$  有唯一的矩阵对数  $\mathbf{X}$ , 其特征值位于复平面的  $\{z : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$  带域内, 称为  $\mathbf{A}$  的主对数, 这时记为  $\mathbf{X} = \log(\mathbf{A})$ 。

**注 2.1:** 注意到  $e^{\log \mathbf{A}} = \mathbf{A}$ 。若  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  有负实特征值,  $\mathbf{A}$  的矩阵对数  $\mathbf{X}$  不唯一。 $\mathbf{X}$  的特征值位于复平面  $\{z : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$  的闭带域内, 这时可人为规定  $\mathbf{A}$  对应的矩阵对数。例如对于  $SE(2)$  中有两个负特征值的

点 $g = \text{diag}(-1, -1, 1)$ , 表示平面上位于原点, 姿态角 $-\pi$ 或者 $\pi$ 的位形, 因

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 0 & -\pi & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & \pi & 0 \\ -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

且

$$\begin{bmatrix} 0 & -\pi & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pi & 0 \\ -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的特征根均为 $(\pm\pi i, 0)$ , 可人为规定

$$\log\left(\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\pi & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应将 $g = \text{diag}(-1, -1, 1)$ 看作平面上位于原点, 姿态角为 $-\pi$ 的位形; 或

$$\log\left(\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \pi & 0 \\ -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应将 $g = \text{diag}(-1, -1, 1)$ 看作平面上位于原点, 姿态角为 $\pi$ 的位形。

**引理 2.2:** ([74]PP269) 对于没有 $\mathbb{R}^-$ 上特征值的 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,

$$\log(\mathbf{A}) = \int_0^1 (\mathbf{A} - \mathbf{I})[t(\mathbf{A} - \mathbf{I}) + \mathbf{I}]^{-1} dt.$$

**推论 2.3:** 设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 没有 $\mathbb{R}^-$ 上特征值,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 则

$$\mathbf{C}(\log(\mathbf{A}))\mathbf{C}^{-1} = \log(\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}).$$

证明: 由相似变换不改变特征值,  $\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$ 没有 $\mathbb{R}^+$ 上特征值, 且 $\mathbf{C}$ 为常矩阵, 则

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}(\log(\mathbf{A}))\mathbf{C}^{-1} \\ &= \int_0^1 \mathbf{C}(\mathbf{A} - I)\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}[t(\mathbf{A} - I) + I]^{-1}\mathbf{C}^{-1}dt \\ &= \int_0^1 (\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} - I)[t(\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} - I) + I]^{-1}dt \\ &= \log(\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}) \end{aligned}$$

■

推论 2.4: 设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 没有 $\mathbb{R}^+$ 上特征值, 则

$$(\log(\mathbf{A}))^T = \log(\mathbf{A}^T).$$

证明:

$$\begin{aligned} & (\log(\mathbf{A}))^T \\ &= \int_0^1 ((\mathbf{A} - \mathbf{I})[t(\mathbf{A} - \mathbf{I}) + \mathbf{I}]^{-1})^T dt \\ &= \int_0^1 [t(\mathbf{A}^T - \mathbf{I}) + \mathbf{I}]^{-1}(\mathbf{A}^T - \mathbf{I})dt \\ &= \int_0^1 (\mathbf{A}^T - \mathbf{I})[t(\mathbf{A}^T - \mathbf{I}) + \mathbf{I}]^{-1}dt \\ &= \log(\mathbf{A}^T) \end{aligned}$$

其中, 第二个等号到第三个等号是由如下等式得来的,

$$\begin{aligned} & [t(\mathbf{A}^T - \mathbf{I}) + \mathbf{I}]^{-1}(\mathbf{A}^T - \mathbf{I}) \\ &= ((\mathbf{A}^T - \mathbf{I})[t + (\mathbf{A}^T - \mathbf{I})^{-1}])^{-1}(\mathbf{A}^T - \mathbf{I}) \\ &= [t + (\mathbf{A}^T - \mathbf{I})^{-1}]^{-1} \\ &= (\mathbf{A}^T - \mathbf{I})(\mathbf{A}^T - \mathbf{I})^{-1}[t + (\mathbf{A}^T - \mathbf{I})^{-1}]^{-1} \\ &= (\mathbf{A}^T - \mathbf{I})[t(\mathbf{A}^T - \mathbf{I}) + \mathbf{I}]^{-1} \end{aligned}$$

■

由推论2.3和推论2.4, 得

推论 2.5:

$$\mathbf{C}^T (\log(\mathbf{A}))^T \mathbf{C}^{-T} = \log(\mathbf{C}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-T}).$$

**引理 2.6:** ([74]PP270) 若  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  没有  $\mathbb{R}^+$  上特征值，则对任意  $\alpha \in [-1, 1]$ ，有  $\log(\mathbf{A}^\alpha) = \alpha \log(\mathbf{A})$ 。特别地，若  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  没有  $\mathbb{R}^+$  上特征值， $\log(\mathbf{A}^{-1}) = -\log(\mathbf{A})$ ， $2 \log(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}) = \log(\mathbf{A})$ 。

**引理 2.7:** (Baker Campbell Hausdorff, [75]) 给定两个不可交换的算子  $X$  和  $Y$ ，算子  $Z$  定义为  $\exp Z = \exp X \circ \exp Y$ ，则  $Z$  可表示为

$$Z = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] + \frac{1}{12}[Y, [Y, X]] - \frac{1}{24}[X, [Y, [X, Y]]] + \dots$$

由引理 2.7 可知，

$$\begin{aligned} \log(\tilde{X}\tilde{Y}) &= \log \tilde{X} + \log \tilde{Y} + \frac{1}{2}[\log \tilde{X}, \log \tilde{Y}] + \frac{1}{12}[\log \tilde{X}, [\log \tilde{X}, \log \tilde{Y}]] \\ &\quad + \frac{1}{12}[\log \tilde{Y}, [\log \tilde{Y}, \log \tilde{X}]] - \frac{1}{24}[\log \tilde{X}, [\log \tilde{Y}, [\log \tilde{X}, \log \tilde{Y}]]] + \dots \end{aligned}$$

下面介绍两个关于对数映射(也称指数坐标)关于时间求导的引理。

**引理 2.8:** (指数坐标的微分, [76] Theorem 2) 设  $g(t)$  是  $G$  上的一条光滑曲线， $X(t) = \log(g(t))$  是  $g(t)$  的指数坐标， $\hat{\xi}^l = g^{-1}\dot{g}$  是刚体速度， $\hat{\xi}^r = \dot{g}g^{-1}$  是空间速度。则  $\dot{X}$  和  $\hat{\xi}^l$ ，以及  $\hat{\xi}^r$  有如下关系

$$\dot{X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{n!} \text{ad}_X^n(\hat{\xi}^l), \quad (2.1)$$

$$\dot{X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \text{ad}_X^n(\hat{\xi}^r), \quad (2.2)$$

其中， $\{B_n\}$  是伯努利数。下文记

$$\mathcal{B}_X \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} (B_n/n!) \text{ad}_X^n,$$

$$\mathcal{B}_{-X} \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n B_n/n!) \text{ad}_X^n.$$

有关指数映射微分的更多内容，参考 [77]。

引理 2.9: 对于任意  $A, B \in \mathfrak{g}$  及整数  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , 算子  $\text{ad}_A$  有如下性质,

$$\begin{cases} \text{ad}_A^n B = B, n = 0, \\ \text{ad}_A^n A = \mathbf{0}, n = 1, 2, 3 \dots \end{cases}$$

对于  $X \in \mathfrak{g}$ ,

$$\mathcal{B}_X X = X, \mathcal{B}_{-X} X = X,$$

其中  $\mathcal{B}_X$  和  $\mathcal{B}_{-X}$  由引理 2.8 定义.

## 2.3 李群上的运载体系统

### 2.3.1 运载体系统欧氏空间上的积分器模型

本文关注了多运载体系统质点模型通讯带宽受限时的协同渐近控制问题, 其中, 将单个运载体系统建模为一阶积分器:

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad (2.3)$$

其中  $x \in \mathbb{R}^n$  是运载体系统的状态,  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  是运载体系统的控制输入。控制目标是设计  $u$  使得多运载体系统达到渐近协同行为。

### 2.3.2 运载体系统欧氏群上的运动学模型

本文关注刚体运动群  $G = SE(2)$  以及  $G = SE(3)$ , 他们相应的李代数分别表示为  $\mathfrak{g} = \mathfrak{se}(2)$  和  $\mathfrak{g} = \mathfrak{se}(3)$ 。在本小节, 如无特殊强调, 我们指  $G = SE(3)$  以及  $\mathfrak{g} = \mathfrak{se}(3)$ 。运载体系统在欧氏群上的运动学模型用以下方程描述:

$$\dot{g} = g\hat{\xi}^l, \quad (2.4)$$

其中,  $g \in G$  是系统的状态;  $\hat{\xi}^l \in \mathfrak{g}$  是系统的输入, 可以理解为系统在刚体坐标系下的速度, 称为 *twist*。在  $SE(3)$  和  $\mathfrak{se}(3)$  上, 将群元素  $g = (\mathbf{R}, \mathbf{p}) \in$

$SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ 、速度  $\hat{\xi}^l = (\hat{\omega}, \mathbf{v}) \in \mathfrak{so}(3) \times \mathbb{R}^3$  用齐次坐标表示为

$$g = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \hat{\xi}^l = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix},$$

其中，算子  $\hat{\cdot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$  对于任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  使得  $\hat{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ ;  $\mathbf{R} \in SO(3), \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  分别表示在空间坐标系下运载体的姿态以及位置;  $\hat{\omega} \in \mathfrak{so}(3), \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  表示刚体坐标系下运载体的角速度和线速度。

相应地，系统(2.4)的对偶系统表示为

$$\dot{g} = \hat{\xi}^r g, \quad (2.5)$$

其中， $g \in G$  是和系统(2.4)相同的系统位形， $\hat{\xi}^r$  是系统空间坐标系下的控制输入，可以理解为系统在空间坐标系下的速度，满足  $\hat{\xi}^r = \text{Ad}_g \hat{\xi}^l$ 。

### 2.3.3 运载体系统欧氏群上的动力学模型

设  $G \in SE(3)$  以及  $\mathbf{g} \in \mathfrak{se}(3)$ 。运载体系统在欧氏群上的动力学模型用以下方程描述：

$$\begin{aligned} \dot{g} &= g \hat{\xi}^l, \\ \dot{\hat{\xi}}^l &= u, \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中  $g \in SE(3)$  是系统的位形变量； $\hat{\xi}^l \in \mathfrak{se}(3)$  是系统在刚体坐标系下的速度； $u \in \mathfrak{se}(3)$  是控制输入。注意到系统(2.6)中的第一个方程即为运动学模型方程。

相应地，系统(2.6)的对偶系统表示为：

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \hat{\xi}^r g, \\ \dot{\hat{\xi}}^r &= u^r, \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中， $g \in SE(3)$  是和系统(2.6)中相同的位形变量； $\hat{\xi}^r \in \mathfrak{se}(3)$  表示系统在空间坐标系下的速度； $u^r \in \mathfrak{se}(3)$  是系统(2.7)的控制输入，即系统(2.6)在空间坐标系下的控制输入。

## 2.4 图论基础

图论在多运载体系统通讯拓扑结构建模时发挥重要作用，下面介绍本文用到的图论的一些基本概念。将多运载体系统个体之间通讯拓扑建模为图 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ 。每个个体建模为一个节点，即图的顶点，则 $N$ 个运载体系统组成的节点集记为 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 。记图 $\mathcal{G}$ 的一条边为 $(i, j)$ ，表示个体 $j$ 接收个体 $i$ 的信息， $\mathcal{E}$ 表示图 $\mathcal{G}$ 中所有边的集合。 $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为带权重的邻接矩阵。如果图 $\mathcal{G}$ 是无向的，则对于 $i, j \in \mathcal{V}$ ，有 $a_{ij} = a_{ji} \geq 0$ ，即，节点 $i$ 和节点 $j$ 互相接收对方信息。记个体 $i$ 的邻居节点集合为 $\mathcal{N}_i$ ，如果个体 $j \in \mathcal{N}_i$ ，即有 $(i, j) \in \mathcal{E}$ 时，则 $a_{ij} = a_{ji} = 1$ ，否则 $a_{ij} = a_{ji} = 0$ 。无向图 $\mathcal{G}$ 的邻接矩阵 $\mathcal{A}$ 是实对称矩阵。定义图 $\mathcal{G}$ 第 $i$ 个个体的度为 $\deg_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ 。图 $\mathcal{G}$ 的度矩阵为 $\mathcal{D} = \text{diag}(\deg_1, \dots, \deg_N)$ ，拉氏矩阵为 $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$ 。

图 $\mathcal{G}$ 的一条路径是一序列的边： $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)$ 。图 $\mathcal{G}$ 为有向图时，它的关联矩阵 $B$ 定义为： $B$ 矩阵的行元素标号和列元素标号分别是图 $\mathcal{G}$ 中运载体标号和边的顺序编号。考察每条边，如果 $(i, j) \in \mathcal{E}$ ，当节点 $i$ 是边 $(i, j)$ 头时， $B_{ij} = 1$ ；当节点 $i$ 是边 $(i, j)$ 的尾时， $B_{ij} = -1$ ；其余情况 $B_{ij} = 0$ 。注意到， $BB^T = \mathcal{L}$ 。环形图是具有如下形式有向路径的图： $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_1)$ 。称有向图是完全的是指图中对任意一个节点均存在一条边指向任意其它一个节点。称有向图是树状图(或有向树)是指除根节点外，任一个节点只有一个父节点。更多内容，请读者参考[78]。

## 2.5 稳定性理论

本小节简要回顾一些控制系统的稳定性理论结果。考虑在 $n$ 维流形 $M$ 上运动的运载体系统：

$$\dot{x} = \mathbf{X}(x),$$

其中， $x \in M$ ， $\mathbf{X}$ 是 $M$ 上给定向量场。满足 $\mathbf{X}(x_e) = 0$ 的点 $x_e \in M$ 称为平衡点。一个平衡点是稳定的，是指所用从该平衡点附近出发的轨迹，在之后的所有时间内，始终位于平衡点的附近，即系统的一个平衡点如果满足：

(1)对于任意一个 $\epsilon > 0$ ，任意时刻 $t \geq 0$ ，存在一个 $\delta$ ，使得所有满足 $\|x(0) - x_e\| \leq \delta$ 的系统轨迹同样满足 $\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon$ ，则称平衡点 $x_e$ 稳定；其中， $\|\cdot\|$ 是 $M$ 上点的局部坐标的欧氏范数；

- (2)当平衡点 $x_e$ 稳定，并且满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$ ，则称平衡点 $x_e$ 渐近稳定；  
(3)否则，称平衡点 $x_e$ 不稳定。

系统平衡点的稳定性可通过李雅普诺夫(Lyanponov)间接法和直接法来判断。其中，经常用到的李雅普诺夫间接法包括判断 $X$ 在 $x_e$ 处线性化模型的特征根<sup>[79]</sup>。李雅普诺夫直接法通过构造一个类似于能量的李雅普诺夫函数，直接判断稳定性，我们简介如下：

**定理 2.1:** 设在平衡点 $x_e$ 的一个邻域 $D$ 内存在一个可微函数 $V(x)$ ，它在 $x_e$ 处取严格极小值，例如 $V(x_e) = 0$ ，并且

$$V(x) > 0, \forall x \in D - \{x_e\}.$$

如果 $V(x)$ 沿系统轨迹的时间导数满足

$$\dot{V}(x) \leq 0,$$

则平衡点 $x_e$ 是稳定的；如果 $V(x)$ 沿系统轨迹的时间导数满足

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D - \{x_e\},$$

则平衡点 $x_e$ 是渐近稳定的。

通常，控制系统的基本目标有两个：一个是将系统从状态空间的一点驱动到另一点；另一个是镇定系统到给定的平衡点。本文用到了第二个控制目标，即：设计控制律，镇定平衡点。



### 第三章 量化一致性

绪论中提及，在实际生活中，多运载体系统的通讯信道通常是数字的，且是有限容量的。因此，需要对个体系统连续的状态信息数据进行采样、离散和量化。信息经过量化处理后，在给定的控制律下，各个运载体系统其指定的关键变量趋近于相等或达到相等，即实际的一致。利用量化的方法来设计控制律，以使得多运载体系统渐近达到实际一致的控制目标通常被称为量化一致性控制(quantized consensus)。本章针对多运载体系统的质点模型：一阶积分器模型，在通讯带宽受限时，设计了均匀量化器，使用均匀量化的方法设计控制律，并依据次优原则和节点相对初值分配了通讯总带宽，从而使多运载体系统渐近达到实际一致的协同目标。

#### 3.1 多运载体系统量化一致性控制的问题描述

本文将 $N$ 个运载体系统每个个体建模为连续时间的一阶积分器模型：

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), i = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

$x_i \in \mathbb{R}$ 是第 $i$ 个运载体系统的状态， $u_i \in \mathbb{R}$ 是控制输入。设计 $u_i$ 使得多运载体系统每个个体状态值随时间趋于相等，则 $u_i$ 称为一致性控制律(或一致性协议、一致性算法)。连续时间的一阶积分器模型常见的一致性控制律为：

$$\dot{x}_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

将每个运载体系统建模为通讯拓扑图上的节点(在不影响研究结果的前提下，下文将节点和运载体混淆使用)，它们之间的信息流动关系用图上的边描述，该通讯拓扑图的拉氏矩阵记为 $\mathcal{L}$ ，则上述控制律可以记为紧凑的形式： $\dot{x}(t) = -\mathcal{L}x$ ，其中 $x = [x_1, \dots, x_N]^T$ 。本文考虑的量化一致性控制问题针对无噪声干扰的数字通讯信道，使用节点之间的相对状态值用于量化的控制。对于连续一阶积分器模型，设计第 $i$ 个节点的控制为，

$$u_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}q(x_i - x_j). \quad (3.2)$$

### 3.1. 多运载体系统量化一致性控制的问题描述

---

其中,  $q(\cdot)$ 是量化函数。记 $\bar{x}_{\tilde{k}} = x_i - x_j, \tilde{k} = 1, 2, \dots, m$ , 这里节点*i*和节点*j*由边 $\{i, j\}$ 连接,  $\{i, j\} \in \mathcal{E}$ 。因此,  $m$ 是多运载体系统通讯拓扑图的边数, 且 $\bar{x}(t) = [\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t)]^T$ 。这一类相对状态值量化模型可以看做, 每个运载体系统传感器和控制器距离较远, 需要对得到的传感器相对信息进行量化后, 再通过远距离传输传递给控制器。重新整理(3.1)式和(3.2)式, 得(参考 [25])

$$\dot{\bar{x}} = -B^T B Q(\bar{x}), \quad (3.3)$$

这里 $B$ 是通讯拓扑图的关联矩阵, 多运载体系统量化器

$$Q = [q_1(\bar{x}_1), q_2(\bar{x}_2), \dots, q_m(\bar{x}_m)]^T,$$

即 $Q$ 有 $m$ 个分量, 各分量是标量量化器。

当多运载体系统趋于一致时, 有 $t \rightarrow \infty$ ,  $|x_i(t) - x_j(t)| \rightarrow 0, \forall i, j \in \mathcal{V}$ 。为了考察多运载体系统个体状态值不相等时, 系统总的差值大小, 参考文献 [80] 定义多运载体系统的不一致性度量如下:

**定义 3.1:** (多运载体系统不一致性) 在*t*时刻, 多运载体系统的不一致性 $\varphi(t)$ 定义为:

$$\varphi(t) \triangleq \sum_{i,j} a_{ij} (x_i(t) - x_j(t))^2 = x(t)^T \mathcal{L} x(t).$$

由此, 当多运载体系统趋于一致时, 有 $t \rightarrow \infty, \varphi(t) \rightarrow 0$ 。如果 $t \rightarrow \infty$ , 虽然 $\varphi(t) \not\rightarrow 0$ , 但 $\varphi(t)$ 已满足要求, 则称多运载体系统达到实际的一致性。采用量化控制时, 会由量化方法引入误差, 本文引入多运载体系统一致性水平即 $\varepsilon$ -水平实际一致性概念来描述最终不一致性与初始时刻不一致性相比的变化。

**定义 3.2:** ( $\varepsilon$ -水平实际一致性, 或 $\varepsilon$ -consensus level) 称

$$\phi(t) = \frac{\sum_{i,j} (x_i(t) - x_j(t))^2}{\sum_{i,j} (x_i(0) - x_j(0))^2}$$

为*t*时刻的相对不一致性。称多运载体系统一致性控制律满足 $\varepsilon$ -水平实际一致

性，系指：对给定的 $\varepsilon > 0$ ，系统的相对不一致性满足

$$\phi(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) \leq \varepsilon.$$

给定对多运载体系统对 $\varepsilon$ 的要求，需要在量化器设计阶段就考虑量化误差对 $\varepsilon$ 的影响。

本节讨论量化的控制输入，包含了运载体相对状态的量化信息。量化操作和离散时刻有天然的联系，在我们讨论的量化一致性控制问题中，采样速率能够影响最终的一致性。我们利用均匀周期采样和零阶保持方法，给出(3.2)式采样控制算法。记 $T > 0$ 为采样周期时间，控制输入为：

$$u_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} q(x_j(kT) - x_i(kT)), \quad t \in [kT, kT + T), \quad (3.4)$$

其中， $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $i = 1, \dots, N$ ，采样后，将(3.3)式改写为：

$$\bar{x}(kT + T) - \bar{x}(kT) = -TB^T B[\bar{x}(kT) - e(kT)], \quad (3.5)$$

这里， $e(kT) = \bar{x}(kT) - Q(\bar{x}(kT))$ ，因此，(3.5)进一步可写为

$$\bar{x}(kT + T) = (I - TB^T B)\bar{x}(kT) + TB^T Be(kT). \quad (3.6)$$

由(3.6)式， $B$ 矩阵的性质以及采样周期影响多运载体系统渐近收敛性能，在进一步分析之前，本文对多运载体系统的拓扑图做如下假定。

**假定 3.1:** 多运载体系统的拓扑图 $\mathcal{G}$ 是树状结构。

如果图是树状的，则相应的，矩阵 $B^T B$ 是正定的<sup>[78]</sup>。该性质对本节分析量化误差对系统一致性影响是必要的。

多运载体系统的不一致性 $\varphi(t)$ 和(3.6)式中的状态变量 $\bar{x}(kT)$ 有如下关系：

**引理 3.3:** 任意离散时刻 $kT$ ，有 $\varphi(kT) = \|\bar{x}(kT)\|_2^2$ 。

**证明:**  $\varphi(kT) = x^T \mathcal{L}x = x^T BB^T x = (B^T x)^T (B^T x) = \bar{x}^T \bar{x} = \|\bar{x}(kT)\|_2^2$ 。 ■

### 3.1. 多运载体系统量化一致性控制的问题描述

---

引理3.3同时说明，给定 $\varepsilon$ -水平实际一致性要求，则

$$\phi = \varphi(\infty)/\varphi(0) = \|\bar{x}(\infty)\|^2/\|\bar{x}(0)\|^2 \leq \varepsilon.$$

为了研究差分方程(3.6)解的渐近有界性，首先介绍三个引理。

**引理 3.4:** 设 $A, C$ 为两个维数相等的矩阵，则 $\underline{\sigma}(A + C) \geq \underline{\sigma}(A) + \underline{\sigma}(C)$ ，其中 $\underline{\sigma}(\cdot)$ 为最小奇异值。

**证明:** 由定义， $\underline{\sigma}(A + C) = \min_{\|x\|_2=1} \|(A + C)x\|_2 \geq \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 + \min_{\|x\|_2=1} \|Cx\|_2 = \underline{\sigma}(A) + \underline{\sigma}(C)$ . ■

**引理 3.5:** ([81]定理3.9) 假设 $Q$ 是巴拿赫代数的元素。如果 $\|Q\| < 1$ ，那么 $(I - Q)^{-1}$ 存在，并且

$$(I - Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k.$$

**引理 3.6:** 设 $Q$ 和 $(I - Q)$ 非奇异，则

- (1) 若 $\bar{\sigma}(Q) < 1$ ，则 $\bar{\sigma}(I - Q) \leq 1 - \underline{\sigma}(Q)$ 。
- (2)  $\bar{\sigma}(Q) < 1$ ，当且仅当 $\bar{\sigma}(I - Q) \leq 1$ 。

**证明:**

- (1) 由引理3.5知， $(I - Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k$ 。再由引理3.4有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\sigma}(I-Q)} &= \underline{\sigma}((I-Q)^{-1}) \geq 1 + \underline{\sigma}(Q) + \underline{\sigma}(Q^2) + \cdots + \underline{\sigma}(Q^k) + \cdots \\ &= 1 + \underline{\sigma}(Q) + \underline{\sigma}(Q)^2 + \cdots + \underline{\sigma}(Q)^k + \cdots \\ &= \frac{1}{1-\underline{\sigma}(Q)} \end{aligned}$$

从而 $\bar{\sigma}(I - Q) \leq 1 - \underline{\sigma}(Q)$ 。

- (2) 由 $\underline{\sigma}(Q) \leq \bar{\sigma}(Q) < 1$ ，有 $\bar{\sigma}(I - Q) \leq 1 - \underline{\sigma}(Q) < 1$ ，反之，则有 $\bar{\sigma}(Q) = \bar{\sigma}(I - (I - Q)) \leq 1 - \underline{\sigma}(I - Q) < 1$ 。

■

多运载体系统量化后方程(3.6)的解为:

$$\begin{aligned}\bar{x}((k+1)T) &= (I - TB^T B)^{k+1} \bar{x}(0) + \sum_{r=0}^k (I - TB^T B)^{k-r} TB^T B e(r) \\ &= (I - TB^T B)^{k+1} \bar{x}(0) + \sum_{r=0}^k (I - TB^T B)^r TB^T B e(k-r)\end{aligned}\quad (3.7)$$

现在考虑  $k \rightarrow \infty$  时,  $\|\bar{x}(kT)\|_2$  的取值。

**定理 3.1:** 假定(1) $B^T B > 0$ , (2) $T < \frac{1}{\bar{\sigma}(B^T B)}$ , (3) $\|e(k-r)\|_2 \leq \hat{e}$ ,  $\forall k$ , 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{x}(kT)\|_2 \leq \kappa(TB^T B) \hat{e},$$

其中,  $\kappa(TB^T B) = \bar{\sigma}(TB^T B)/\underline{\sigma}(TB^T B)$  为条件数。

**证明:** 由差分方程的解式(3.7), 得

$$\begin{aligned}\|\bar{x}((k+1)T)\|_2 &\leq \bar{\sigma}(I - TB^T B)^{k+1} \|\bar{x}(0)\|_2 \\ &\quad + \sum_{r=0}^k \bar{\sigma}(I - TB^T B)^r \bar{\sigma}(TB^T B) \|e(kT - rT)\|_2.\end{aligned}$$

由于信号  $e(kT - rT)$  有界, 即  $\|e(kT - rT)\|_2 \leq \hat{e}$ ,  $\forall k$ , 则

$$\|\bar{x}((k+1)T)\|_2 \leq \bar{\sigma}(I - TB^T B)^{k+1} \|\bar{x}(0)\|_2 + \left( \sum_{r=0}^k \bar{\sigma}(I - TB^T B)^r \right) \bar{\sigma}(TB^T B) \hat{e}.$$

由于  $\bar{\sigma}(I - TB^T B) < 1$ , 所以当  $k \rightarrow \infty$ , 有

$$\bar{\sigma}(I - TB^T B)^{k+1} \|\bar{x}(0)\|_2 \rightarrow 0.$$

注意到: 假定(2)意味着  $\bar{\sigma}(TB^T B) < 1$ , 从而由引理3.6可得  $\bar{\sigma}(I - TB^T B) \leq 1 - \underline{\sigma}(TB^T B) < 1$ , 进而  $\underline{\sigma}(TB^T B) \leq 1 - \bar{\sigma}(I - TB^T B)$ , 且

$$\frac{1}{1 - \bar{\sigma}(I - TB^T B)} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(TB^T B)},$$

### 3.1. 多运载体系统量化一致性控制的问题描述

---

另外,  $\bar{\sigma}(I - TB^T B) \leq 1 - \underline{\sigma}(TB^T B) < 1$ , 从而

$$\sum_{r=0}^{\infty} \bar{\sigma}(I - TB^T B)^r = \frac{1}{1 - \bar{\sigma}(I - TB^T B)} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(TB^T B)},$$

记矩阵  $TB^T B$  的条件数为

$$\kappa(TB^T B) = \bar{\sigma}(TB^T B)/\underline{\sigma}(TB^T B),$$

最后有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{x}(kT)\|_2 \leq \kappa(TB^T B)\hat{e}$ . ■

注 3.1: 由定理3.1假定(3)

$$\|e(kT - rT)\|_2 \leq \hat{e}, \forall k$$

以及定理3.1结论

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{x}(kT)\|_2 \leq \kappa(TB^T B)\hat{e}$$

可知, 量化误差的上界  $\hat{e}$  影响了多运载体系统的不一致性。在多运载体系统拓扑图给定时,  $\kappa(TB^T B) = \bar{\sigma}(TB^T B)/\underline{\sigma}(TB^T B)$  确定。因此, 降低  $\hat{e}$  能够有效降低多运载体系统不一致性, 并使得最终的不一致性满足给定的  $\varepsilon$ -水平实际一致性要求。

注 3.2: 本节中多运载体系统量化器  $Q$  含有  $m$  个分量, 各分量为标量量化器。给定量一致模型中通讯速率约束, 即单位时间内传输数据量的约束, 这类约束通常反映了系统中用于传输数据的能量约束或者传输信道的带宽约束。这类约束也可以理解为对量化器的量化速率约束, 即量化输出数据一定能被传输, 因此, 本节将通讯速率约束等价于量化器的量化速率约束。

设  $Q$  各分量量化器的量化速率为

$$r_i, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m r_i = R, \quad r_i \in \mathbb{Z}^+,$$

其中,  $R$  是正的整数。由

$$\|e(kT)\|_2 = (\sum_{i=1}^m (\bar{x}_i(kT) - q_i(\bar{x}_i(kT)))^2)^{\frac{1}{2}}$$

知,  $\hat{e}$ 与 $r_i$ ,  $\bar{x}$  (或 $\bar{x}_i$ ) ,  $k$ ,  $Q$  (或 $q_i$ ) 相关。由于 $kT$ 是离散采样时刻, 取值范围不能设计, 所以降低 $\hat{e}$ 需要设计量化速率 $r_i$ 和量化器 $q_i$ 的量化方法, 而量化速率 $r_i$ 是量化器 $q_i$ 的参数。

下面介绍如何设计量化器 $q_i$ 以降低多运载体系统不一致性使得最终满足给定要求的 $\varepsilon$ -水平实际一致性指标。在开展讨论之前, 我们先介绍一类均匀量化器, 它是我们本节量化方法的核心内容之一。确定性的量化方法包括均匀量化, 对数量化, 符号量化等, 统计量化方法包括随机取整、概率量化等<sup>[65]</sup>。其中, 均匀量化器定义如下<sup>[63]</sup>:

$$q(z) = \begin{cases} K, & \text{if } z > (K + 1/2)\Delta \\ -K, & \text{if } z \leq -(K + 1/2)\Delta \\ \lfloor \frac{z}{\Delta} + \frac{1}{2} \rfloor, & \text{if } -(K + 1/2)\Delta < z \leq (K + 1/2)\Delta \end{cases}$$

其中,  $K$ 是正整数, 是该均匀量化器 $q$ 的量化饱和值, 如果量化器的输入 $z$ 在量化器 $q$ 可测量范围之内, 是指 $-(K+1/2)\Delta \leq z \leq (K+1/2)\Delta$ , “ $\lfloor z \rfloor$ ” ( $z \in \mathbb{R}$ ) 表示不超过 $z$ 的最大整数。输出集合 $S = \{0, \pm n \mid n = 1, 2, \dots, K\}$ 。以原点为中心在正负实半轴各取 $K$ 段, 除原点外每段端点记为 $z_k$ ,  $k = \{\pm n \mid n = 1, 2, \dots, K\}$ 。记 $y_k$ 是对 $z_{k-1}$ 到 $z_k$ 段用量化器 $q$ 量化后的输出值。记 $y_k - y_{k-1} = \Delta$ ,  $\Delta$ 是 $q$ 的量化步长, 为非负实数, 当同时有 $y_k = (z_{k-1} + z_k)/2$ 成立时,  $q$ 称作均匀量化器。 $\Delta$ 可以是静态常数, 也可以随时间 $t$ 变化并记为 $\Delta(t)$ 。量化器 $q$ 的量化输出级数有 $2K + 1$ 个, 当 $K < \infty$ 时, 量化器 $q$ 称为有限级数的。量化器 $q$ 的量化速率记为 $r = \log_2(2K + 1)$ ,  $r$ 也称为量化精度, 单位为bit。注意到, 量化误差 $e = z - q(z)$ ,  $z \in R$ , 且有 $|e| \leq \frac{\Delta}{2}$ 。

以下分为两个部分讨论, 一是讨论量化器设计方法, 二是讨论通讯带宽资源分配, 目的是使得量化器量化操作产生的误差对多运载体系统的一致性影响最小。这也是我们本节的主要内容。

## 3.2 量化器设计与通讯带宽分配

### 3.2.1 量化器设计

注意到, 任何量化方法必然会产生真实值与量化输出值的误差。为刻画量

化误差，引入记法：

$$\pi_i \triangleq \{\bar{x}_i(kT) \in |\bar{x}_i(kT + T) = f_i(\bar{x}_i(kT), \bar{x}_j(kT)), , i \neq j\},$$

其中  $f_i$  是状态转移函数，且  $\bar{x}_i(0) = \bar{x}_{i,0} \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{x}_j(0) = \bar{x}_{j,0} \in \mathbb{R}$  分别是  $\bar{x}_i$  和  $\bar{x}_j$  的状态初值。根据实际系统，可设  $\pi_i$  是  $\mathbb{R}$  中紧集，且  $\bar{x}_i(kT) \in \pi_i, i = 1, 2, \dots, m$ 。令  $\pi = \pi_1 \times \dots \times \pi_m$ 。对于给定的  $\bar{x}_0 \in \pi$ , 及量化器结构  $Q$ , 记  $e(\bar{x}_0, Q)(kT) = \bar{x}(kT) - Q(\bar{x}(kT)) \in \mathbb{R}^m, k = 0, 1, \dots$ , 并记  $\|e(\bar{x}_0, Q)\|_\infty = \sup_k \|e(\bar{x}_0, Q)(kT)\|_2$ , 由定理3.1假定知, 对  $\forall \bar{x}_0 \in \pi$  及量化器结构  $Q$ ,  $\|e(\bar{x}_0, Q)\|_\infty$  存在, 且  $\|e(\bar{x}_0, Q)\|_\infty < \infty$ , 从而  $e(\bar{x}_0, Q) \in l_\infty^m$ 。注意到

$$\begin{aligned} \|e(\bar{x}_0, Q)(kT)\|_2 &\leq \max_{\bar{x}_0 \in \pi} \|e(\bar{x}_0, Q)\|_\infty = \max_{\bar{x}_0 \in \pi} \max_k \|\bar{x}(kT) - Q(\bar{x}(kT))\|_2 \\ &= \max_{\bar{x}_{i,0} \in \pi_i} \max_k \left( \sum_{i=1}^m |e_i(\bar{x}_{i,0}, q_i)(kT)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

令

$$\hat{e}(Q) = \max_{\bar{x}_{i,0} \in \pi_i} \max_k (\sum_{i=1}^m |e_i(\bar{x}_{i,0}, q_i)(kT)|^2)^{\frac{1}{2}},$$

则对给定的量化器  $Q$ ,  $\hat{e}(Q)$  表示量化误差的上界。

量化器设计的目的之一就是选择恰当的量化器  $Q$ , 使得  $\hat{e}(Q)$  最小。对此, 有如下引理。

**引理 3.7:** 假定对任意的  $\bar{x}_0 \in \pi$  及量化器  $Q$ ,  $e(\bar{x}_0, Q) \in l_\infty^m$ , 则使得  $\inf_Q \hat{e}(Q)$  存在的系统标量量化器  $Q$  具有如下结构:  $Q(\bar{x}) = [q_1(\bar{x}_1), \dots, q_m(\bar{x}_m)]^T$ , 其中  $q_i : \bar{x}_i \mapsto q_i(\bar{x}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  为第  $i$  分量的标量均匀量化器。

**证明:** 记  $\bar{x}_i$  和  $q_i(\bar{x}_i)$  在  $kT$  时刻的距离为

$$|e_i(\bar{x}_{i,0}, q_i)(kT)| = |\bar{x}_i(kT) - q_i(\bar{x}_i(kT))|,$$

这里  $i = 1, 2, \dots, m$ 。由假设知  $e_i(\bar{x}_{i,0}, q_i) \in l_\infty$ , 并且

$$\|e_i(\bar{x}_{i,0}, q_i)\|_\infty \triangleq \sup_k |e_i(\bar{x}_{i,0}, q_i)(kT)| = \sup_k |\bar{x}_i(kT) - q_i(\bar{x}_i(kT))| < \infty,$$

取

$$\hat{e}_i(q_i) = \max_{\bar{x}_{i,0} \in \pi_i} \|e_i(\bar{x}_{i,0}, q_i)\|_\infty,$$

则由

$$\inf_Q \hat{e}^2(Q) = \inf_Q \sum_{i=1}^m \hat{e}_i(q_i)^2 = \sum_{i=1}^m \inf_{q_i} \hat{e}_i(q_i)^2$$

可知，存在  $Q^*$  使得

$$\hat{e}(Q^*) = \inf_Q \hat{e}(Q)$$

当且仅当存在  $q_i^*$  使得  $\hat{e}_i(q_i^*) = \inf_{q_i} \hat{e}_i(q_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ 。由标量量化器的最优条件知，对于任意概率密度的输入信号  $\bar{x}_i \in \mathbb{R}$  以及给定的输出级数，使得  $\hat{e}_i(q_i)$  最小的最优量化编码结构  $q_i(\cdot)$  为均匀量化器<sup>[63]</sup>。从而使得  $\hat{e}(Q)$  取值最小的系统标量量化器  $Q$  其量化结构为  $Q(\bar{x}) = [q_1(\bar{x}_1), \dots, q_m(\bar{x}_m)]^T$ ，其中， $q_i : \bar{x}_i \mapsto q_i(\bar{x}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ，为第  $i$  分量的均匀标量量化器。 ■

**注 3.3:** 引理 3.7 指出使得  $\hat{e}(Q)$  取值最小的系统标量量化器  $Q$  其量化结构为各分量上的均匀标量量化器， $q_i : \bar{x}_i \mapsto q_i(\bar{x}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ 。由于  $Q$  (或  $q_i$ ) 是  $r_i$  和  $\Delta(kT)$  的函数，记作  $Q(r_i, \Delta(kT))$ ，因此，不同的  $r_i$  和  $\Delta(kT)$  影响  $\hat{e}(Q)$  并最终影响多运载体系统不一致性。

### 3.2.2 通讯速率分配

讨论通讯带宽资源分配，目的是使得量化器量化操作产生的误差对多运载体系统的一致性影响最小。首先固定量化器的量化步长，使得  $\Delta(kT) = \Delta_0$ ,  $k \in [0, k^*)$ ，其中  $k^*$  的取值依赖于系统对一致性水平的要求，取法将在下面介绍。为了强调  $Q$  依赖于  $r_i$  和  $\Delta_0$ ，将  $Q$  记作  $Q(r_i, \Delta_0)$ ，又因为  $\hat{e}$  是  $Q$  的函数，记作  $\hat{e}(Q)$ ，也可以记作  $\hat{e}(Q((r_i, \Delta_0)))$ 。给定量速率约束  $\sum_{i=1}^m r_i = R$ ,  $r_i \in \mathbb{R}^+$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ 。由于多运载体系统一致性要求个体之间要有通讯，则对量化器的量化速率要求为  $r_i > 0$ 。为了度量标量均匀量化器  $q(\cdot)$  输入  $\bar{x}_i$  的取值范围，记  $|\pi_i| = \max_{\bar{x}_i \in \pi_i} \bar{x}_i - \min_{\bar{x}_i \in \pi_i} \bar{x}_i$ 。

**引理 3.8:** 当  $\bar{x}_i$  在量化器  $q_i$  可量化范围， $|\pi_i|$  可估算为  $|\pi_i| \approx |\bar{x}_i(0) - \kappa(TB^T B)\Delta/2\sqrt{m}|$ ，如果量化步长  $\Delta$  足够小， $|\pi_i| \approx |\bar{x}_i(0)|$ 。

证明: 由(3.6)式及定理3.1, 知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}(kT + T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^k (I - TB^T B)^{k-r} TB^T B e(rT),$$

由  $e_i(rT) \leq \frac{\Delta}{2}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $\bar{\sigma}(TB^T B) < 1$ ,  $\bar{\sigma}(I - TB^T B) < 1$ , 得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{x}_i(kT + T)| \leq \frac{\Delta \kappa(TB^T B)}{2\sqrt{m}}$$

当量化步长  $\Delta$  足够小时,  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{x}_i(kT + T)| \rightarrow 0$ 。由

$$\bar{x}(kT + T) - \bar{x}(kT) = -TB^T B Q(\bar{x}(kT)),$$

及

$$0 < \bar{\sigma}(TB^T B) < 1,$$

知, 当  $\bar{x}_i(0) > 0, \forall i$ ,  $\bar{x}_i(kT)$  递减, 当  $\bar{x}_i(0) < 0, \forall i$ ,  $\bar{x}_i(kT)$  递增, 又

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{x}_i(kT + T)| \leq \frac{\Delta \kappa(TB^T B)}{2\sqrt{m}}$$

且  $\bar{x}_i(\infty) \neq 0$ , 则对  $|\pi_i|$  的估计值为  $|\pi_i| \approx |\bar{x}_i(0) - \kappa(TB^T B)\Delta/2\sqrt{m}|$ , 当标量均匀量化器的量化步长  $\Delta$  足够小, 有  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{x}_i(kT + T)| \rightarrow 0$ , 则  $|\pi_i|$  可估算为  $|\pi_i| \approx |\bar{x}_i(0)|$ 。 ■

注 3.4: 当采样周期  $T$  较小, 且  $\sum_{j=1}^m [B^T B]_{ij} \bar{x}_j(0) > 0$  时,  $\bar{x}_i(kT)$  递减, 其中,  $k < \tilde{k}$ ,  $\tilde{k}$  为某时刻;  $\sum_{j=1}^m [B^T B]_{ij} \bar{x}_j(0) < 0$ , 则  $\bar{x}_i(kT)$ ,  $k < \hat{k}$  递增,  $\hat{k}$  为某时刻。因此, 由

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{x}_i(kT + T)| \leq \frac{\Delta \kappa(TB^T B)}{2\sqrt{m}}$$

且

$$\bar{x}_i(\infty) \neq 0,$$

则  $|\pi_i|$  可近似取

$$|\pi_i| \approx |\bar{x}_i(0) - \kappa(TB^T B)\Delta/2\sqrt{m}|,$$

当标量均匀量化器的量化步长 $\Delta$ 足够小，则 $|\pi_i|$ 近似为 $|\pi_i| \approx |\bar{x}_i(0)|$ ，这种取法由于忽略了系统演化过程中各运载体系统状态信息的耦合对运载体系统之间相对状态信息变化的影响，因而具有较大的保守性。

下面记“ $[z]$ ”（ $z \in \mathbb{R}$ ）为大于 $z$ 的最小整数，在讨论给定量化速率约束、分配 $R$ 降低 $\hat{e}(Q((r_i, \Delta_0)))$ 的问题之前给定如下引理。

引理 3.9: ([82]) 一个标准的凸优化问题可以记为以下形式：

$$\begin{cases} \min f_0(x) \\ s.t. f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ a_i^T x = b_i, i = 1, \dots, p \end{cases}$$

其中 $f_0, \dots, f_m$ 是凸函数。它的等价凸优化问题(Epigraph形式)记作

$$\begin{cases} \min t \\ s.t. f_0(x) - t < 0 \\ f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ a_i^T x = b_i, i = 1, \dots, p \end{cases}$$

注 3.5: 当用 $r_i$ 个输出级数表示量化取值范围 $|\pi_i|$ 时，其量化步长 $\Delta = \frac{|\pi_i|}{2^{r_i-1}}$ ，且 $\bar{e}_i = \frac{\Delta}{2} = \frac{|\pi_i|}{2^{r_i}}$ ，则

$$\hat{e} = \max_{\bar{x} \in \pi} \|\bar{e}\|_2 = \max_{\bar{x}_i \in \pi_i} \left( \sum_{i=1}^m (\bar{e}_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left[ \sum_{i=1}^m \left( \frac{|\pi_i|}{2^{r_i}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

那么问题

$$\begin{cases} \min_Q \hat{e} \\ s.t. \sum_{i=1}^m r_i = R, r_i \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

由于 $0 < r_i < R$ 是凸集，并且 $\sum_{i=1}^m (|\pi_i|^2 2^{-2r_i})$ 是 $r_i$ 的凸函数，则其等价凸优化问题

可以表示为<sup>[82]</sup>:

$$\begin{cases} \min_{\{r_i\}, \tau} \tau \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^m (|\pi_i|^2 2^{-2r_i}) \leq \tau \\ \sum_{i=1}^m r_i = R, r_i \geq 0 (1 \leq i \leq m) \end{cases}$$

因此，给定量化速率约束、分配R降低 $\hat{e}(Q((r_i, \Delta_0)))$ 有如下定理。

**定理 3.2:** 给定多运载体系统总量化速率的约束 $\sum_{i=1}^m r_i = R$ ,  $r_i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $1 \leq i \leq m$ , 使得多运载体系统达到实际一致性且取得 $\min_Q \hat{e}$ 的标量均匀量化器 $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , 具有如下次优量化速率:

$$r_i^* = \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{|\bar{x}_i(0)|^2}{\tau} \right), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

其中 $\tau$ 为满足 $\sum_{i=1}^m r_i^* = R$ 的常数。考虑到受约束的量化速率为整数值 $r_i^* \in \mathbb{Z}^+$ , 这时有次优量化速率:

$$\tilde{r}_i^* = \begin{cases} \lceil r_i^* \rceil, & i \leq R - \sum_{i=1}^m \lfloor r_i \rfloor \\ \lfloor r_i^* \rfloor, & \text{other.} \end{cases}$$

证明: 用拉格朗日乘子法解Epigraph形式变换后的优化问题:

$$\begin{cases} \min_{\{r_i\}, \tau} \tau \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^m (|\pi_i|^2 2^{-2r_i}) \leq \tau \\ \sum_{i=1}^m r_i = R, r_i \geq 0 (1 \leq i \leq m) \end{cases}$$

有 $L(\tau, r_i, \lambda, v, \mu) = \tau + \lambda \left( \sum_{i=1}^m |\pi_i|^2 2^{-2r_i} - \tau \right) - \sum_{i=1}^m v_i r_i + \mu \left( \sum_{i=1}^m r_i - R \right)$ 。上述最优问题的Karush – Kuhn – Tucker (KKT) 条件为<sup>[82]</sup>:

- (1)  $\sum_{i=1}^m |\pi_i|^2 2^{-2r_i} \leq \tau$ ;
- (2)  $\sum_{i=1}^m r_i = R$ ,  $r_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;
- (3)  $v_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ );  $\mu > 0$ ,  $\lambda \geq 0$ ;

$$(4) \lambda(|\pi_i|^2 2^{-2r_i} - \tau) = 0, v_i r_i > 0, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$(5) \frac{\partial L}{\partial r_i} = -2\lambda \ln(2) |\pi_i|^2 2^{-2r_i} - v_i + \mu = 0, i = 1, 2, \dots, m.$$

由一致性条件  $r_i > 0$  以及  $v_i r_i > 0$ , 知  $v_i = 0$ ; 又  $\mu > 0$ , 由 KKT 条件(5)得  $\lambda > 0$ 。由 KKT 条件(4)解出  $\tau = |\pi_i|^2 2^{-2r_i}$ , 代入(5)得  $\lambda = \frac{\mu}{2\ln(2)\tau}$ , 于是  $\mu = 2\lambda \ln(2) |\pi_i|^2 2^{-2r_i}, (\forall i)$ , 进而  $2^{2r_i} = \frac{2\lambda \ln(2) |\pi_i|^2}{\mu}, \mu > 0$ 。

由一致性条件  $r_i > 0$ , 知  $2^{2r_i} = \frac{2\lambda \ln(2) |\pi_i|^2}{\mu} > 1$ , 进而

$$r_i = \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{|\pi_i|^2}{\tau} \right), \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{|\pi_i|^2}{\tau} \right) \right\} = R,$$

因此可以解出  $\tau$  和  $r_i$ 。注意到, 当  $|\pi_i| = |\pi_j|$ ,  $1 \leq i, j \leq m$  时, 有  $r_i = r_j$ 。当使用  $|\pi_i| \approx |\bar{x}_i(0)|$  估算值时, 以上  $r_i$  结果为  $\min_Q \hat{e}$  的次优解。由于受约束量化器的量化速率是整数, 考虑  $\tau = |\pi_i|^2 2^{-2r_i}$  和  $\min \tau$ , 设  $r_i = (M-1) + \vartheta, 0 < \vartheta < 1, M \in \mathbb{Z}^+$ , 有  $|\pi_i|^2 2^{-2[r_i]} > |\pi_i|^2 2^{-2r_i} > |\pi_i|^2 2^{-2[r_i]}$ , 则  $r_i^*$  值应取

$$r_i^* = \begin{cases} \lceil r_i \rceil, & i \leq R - \sum_{i=1}^m \lfloor r_i \rfloor \\ \lfloor r_i \rfloor, & \text{otherwise} \end{cases}$$

当  $|\pi_i| = |\pi_j|$ ,  $1 \leq i, j \leq m$  时, 同样地, 由于使用上述  $\pi_i$  估算值, 此时次优量化速率  $\tilde{r}_i^*$  值应取

$$\tilde{r}_i^* = \begin{cases} \lceil \frac{R}{m} \rceil, & i \leq R - \sum_{i=1}^m \lfloor \frac{R}{m} \rfloor \\ \lfloor \frac{R}{m} \rfloor, & \text{otherwise} \end{cases}$$

■

**注 3.6:** 量化速率资源分配和  $|\bar{x}_i(0)|$  的联系说明, 为降低量化误差对多运载体系统一致性的影响, 在量化步长  $\Delta_0$  较小时,  $|\bar{x}_i(0)|$  越大, 需要分配给量化器  $q_i$  的  $r_i$  越大。

**注 3.7:** 定理 3.2 给出了  $\min_Q \hat{e}$  即  $\min_{Q(r_i, \Delta_0)} \hat{e}$  取值对  $R$  分配的估算要求。由多运载体系统  $\varepsilon$ -水平实际一致性指标

$$\varphi(\infty) = \frac{\phi(\infty)}{\phi(0)} = \frac{\|\bar{x}(\infty)\|_2^2}{\|\bar{x}(0)\|_2^2} \leq \varepsilon$$

并且

$$\|\bar{x}(\infty)\|_2 \leq \kappa(TB^T B) \hat{e}$$

可知对量化误差 $\hat{e}$ 的要求为 $\hat{e} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}\|\bar{x}(0)\|_2}{\kappa(TB^T B)}$ 。当 $\min_{Q(r_i, \Delta_0)} \hat{e} > \frac{\sqrt{\varepsilon}\|\bar{x}(0)\|_2}{\kappa(TB^T B)}$ 时，必须进一步设计量化器的参数 $\Delta$ 。

记

$$\begin{aligned} \tilde{e}(Q(r_i^*, \Delta(t)))|_{t=0} &= \tilde{e}_0(Q(r_i^*, \Delta_0)) = \min_{Q(r_i, \Delta_0)} \hat{e} = \min_{\{r_i\}, \tau} \tau^{\frac{1}{2}}, \\ \rho &= \frac{\tilde{e}_0 \kappa(TB^T B)}{\sqrt{\varepsilon} \|\bar{x}(0)\|_2}, \end{aligned}$$

$o(\tilde{e}_0)$ 为相比于 $\tilde{e}_0$ 的极小常数，例如取 $o(\tilde{e}_0) = 0.01\tilde{e}_0$ 。下面讨论量化器的参数 $\Delta$ 取值。由于多运载体系统量化器 $Q$ 有 $m$ 个分量，为保证系统数据编码、传输、解码有效性， $m$ 个标量均匀量化器其量化步长均取 $\Delta(kT)$ 。我们有如下设计方法。

**引理 3.10:** 当 $\|\bar{x}(k^*T)\|_2^2 > \varepsilon \|\bar{x}(0)\|_2^2$ 时，那么取 $\Delta(kT) = \frac{\Delta_0}{\rho}$ ,  $k \geq k^* + 1$ ，则多运载体系统随时间能够满足 $\varepsilon$ -水平实际一致性，即 $\varphi(\infty) \leq \varepsilon$ 。其中， $k^*$ 可取 $\|\bar{x}(kT)\|_2$ 值随时间已变化不大的任意 $k$ 时刻。

**证明:** 由 $\varepsilon$ -水平实际一致性要求知

$$\hat{e}(\infty) \leq \frac{\sqrt{\varepsilon} \|\bar{x}(0)\|_2}{\kappa(TB^T B)}$$

而

$$\frac{\tilde{e}_0}{\rho} = \frac{\sqrt{\varepsilon} \|\bar{x}(0)\|_2}{\kappa(TB^T B)}$$

因此需证，当 $\Delta(kT) = \frac{\Delta_0}{\rho}$ ,  $k = k^* + 1, k^* + 2, \dots$ 时， $\hat{e}(\infty) \leq \frac{\tilde{e}_0 + o(\tilde{e}_0)}{\rho}$ 。即当 $\Delta_0$ 缩小 $\rho$ 倍时量化误差 $\tilde{e}_0 + o(\tilde{e}_0)$ 缩小 $\rho$ 倍。此时有 $\hat{e}(\infty) \leq \frac{\tilde{e}_0 + o(\tilde{e}_0)}{\rho} \approx \frac{\sqrt{\varepsilon} \|\bar{x}(0)\|_2}{\kappa(TB^T B)}$ 。当 $r_i^*$ 固定，

$$e(kT) \leq \left( \sum_{i=1}^m \left( \frac{\Delta_0}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad k < k^* + 1,$$

$$e(kT) \leq \left( \sum_{i=1}^m \left( \frac{\Delta_0}{2\rho} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad k \geq k^* + 1.$$

因此，显然有，

$$\hat{e}(\infty) \leq \frac{\tilde{e}_0}{\rho} \approx \frac{\tilde{e}_0 + o(\tilde{e}_0)}{\rho}.$$

■

**注 3.8：**固定 $r_i^*$ ，减小 $\Delta_0$ 的过程使得量化器可测量 $\bar{x}_i$ 取值范围减小。在量化实际一致性状态收敛过程中，取值范围渐近缩小和稳定，所以调整量化步长的方法是合理的。

**注 3.9：**对于 $\bar{x}$ 渐近收敛的各分量来说，编写程序运行寻找 $k^*$ 时需要考虑较长一段时间内多运载体系统不一致性的变化，但是通常这个时刻在可接受的时间范围内能够取到。

### 3.3 仿真

下面给出仿真示例。假设4个多运载体系统(3.1)组成的网络系统，它们之间的拓扑建模为无向图 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ 。相应的邻接矩阵为

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

相应的关联矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

设运载体系统状态初值 $x_0 = [20.22, -20.22, 20.22, -20.22]^T$ ，约束 $\sum_{i=1}^m r_i = 60$ ，均匀量化器量化步长 $\Delta = 1$ ， $\varepsilon = 0.0001$ 。根据 $T < 1/\bar{\sigma}(B^T B)$ ，计算采样时间 $T$ 需 $T < 0.2929s$ ，因此，取采样时间 $T = 0.1s$ 。因为各相对状态 $\bar{x}_i$ 收敛于0的邻域，估算为 $|\pi_i| = |\pi_j|$ ， $1 \leq i, j \leq 3$ ，有次优量化速率 $r_i = r_j = 20$ 。任取其它量化速率分配， $r_1 = 36, r_2 = 20, r_3 = 4$ 。图3.1给出上述两种量化速率分配下，多运载体系统其不一致性的值。仿真知，本文给

### 3.3. 仿真

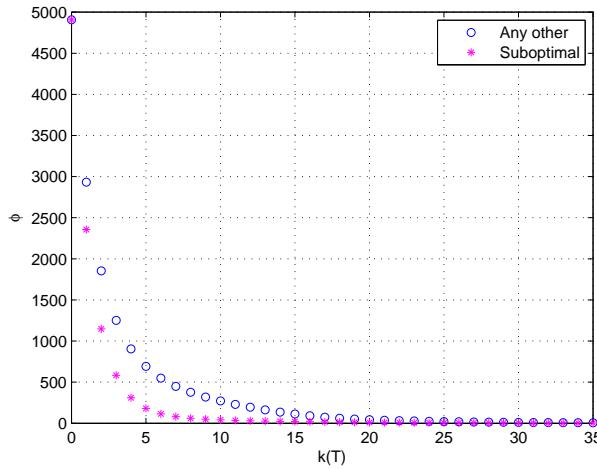


图 3.1 次优与其它量化速率分配方法不一致性对比

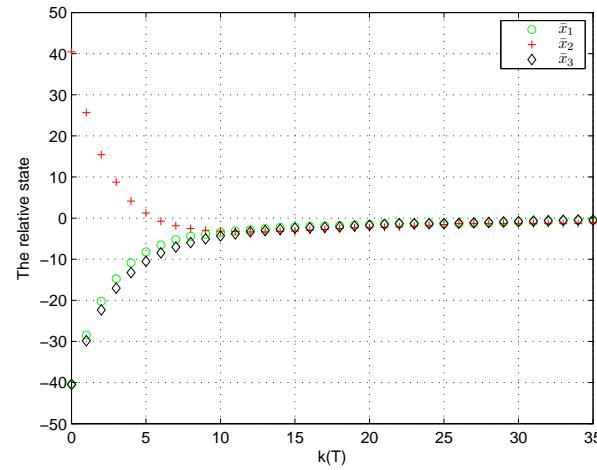


图 3.2 多运载体系统相对状态值(次优量化速率分配方法)

出的量化速率分配策略，在降低不一致性和相应的量化误差方面是有效的。图3.2给出相对状态值的变化。由初值，计算对一致性的要求为 $\phi \leq 0.49$ 。而图3.1中其不一致性稳定后在0.517。调整量化步长 $\Delta = 1$ 为 $\Delta = 0.5$ 后，多运载体系统最终不一致性逐渐降低到0.49以下，见图3.3。

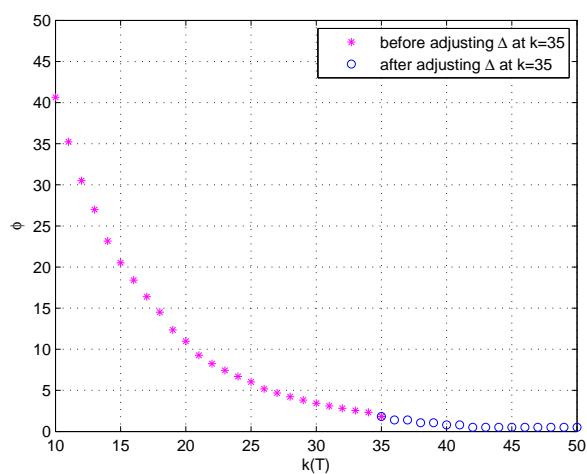


图 3.3 量化步长调整过程中的不一致性对比(在 $k=35$ 时刻调整步长 $\Delta$  )



## 第四章 多运载体渐近一致与编队——运动学模型

### 4.1 问题描述

在工程应用中，一群具有感知、通信、决策、运动能力的运载体系统协同工作，能更好地完成空间上分布的各类任务。在执行这些任务时，由于个体通信、测量范围有限，一般只有相邻的个体之间能够进行信息交换。因此，运载体系统基于局部的信息决策自身运动，其中，所涉及的基于局部信息的规则称为是分布式的。这一内部建立了局部信息互联、并依据分布式规则决策自身运动的多运载体系统群体称为一个运载体系统网络。本章将运载体系统建模为欧氏群上的刚体运动学模型，定义了多运载体系统协同渐近一致和编队问题，并设计了相应的控制策略。

#### 4.1.1 运载体系统的运动学模型

设 $g$ 为李群上 $G$ 的元素， $G$ 上 $N$ 个节点组成的网络其第*i*个节点的运动学模型描述为：

$$\dot{g}_i = g_i \hat{\xi}_i^l, i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.1)$$

其中 $g_i \in SE(3)$ 是第*i*个运载体系统的状态，即第*i*个刚体的位形； $\hat{\xi}_i^l \in \mathfrak{se}(3)$ 是第*i*个运载体系统的控制输入，它表示在刚体坐标系下的速度。

系统(4.1)的对偶系统表示为：

$$\dot{g}_i = \hat{\xi}_i^r g_i, i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.2)$$

其中，方程(4.2)里 $g_i$ 是和式(4.1)中第*i*个运载体系统相同的位形； $\hat{\xi}_i^r \in \mathfrak{se}(3)$ 是第*i*个运载体系统的在空间坐标系下的控制输入，它表示在空间坐标系下的速度。

本章将 $N$ 个节点之间通讯互联结构记为 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ 。

#### 4.1.2 协同一致与编队

多运载体系统(4.1)的一致性控制是指设计节点控制律 $\hat{\xi}_i^l$ (或 $\hat{\xi}_i^r$ )，使得 $g_i \rightarrow g_j, \forall i, j \in \mathcal{V}, t \rightarrow \infty$ 。即，使得当 $t \rightarrow \infty$ 时，满足 $g_j g_i^{-1} = I$ ，称为李群 $G$ 上的右

一致性，或者  $g_j^{-1}g_j = I$  称为李群  $G$  上的左一致性。

式  $g_j g_i^{-1} = I$  表示节点  $j$  相对于节点  $i$  的位形在空间坐标系下相等，而式  $g_i^{-1}g_j = I$  表示节点  $j$  相对于节点  $i$  的位形在节点  $i$  本体坐标系下相等。

多运载体系统(4.1)的编队控制是指设计节点控制律  $\hat{\xi}_i^l$ (或  $\hat{\xi}_i^r$ )，使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_1^{-1}(t)g_i(t) = \bar{g}_{1i}^l, i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.3)$$

或

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_i^{-1}(t)g_j(t) = \bar{g}_{ij}^l, i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (4.4)$$

其中  $\bar{g}_{1i}^l$  是常矩阵，是由编队任务指定的，它是节点  $i$  相对于节点 1 所期望的相对位形，描述了编队的几何要求。式(4.3)也暗示了节点  $i$  相对于节点 1 的相对位形是时变的，且渐近收敛到期望的队形  $\bar{g}_{1i}^l$ 。同样地， $\bar{g}_{ij}^l$  是常矩阵，是节点  $j$  相对于节点  $i$  所期望的相对位形。当给定编队任务  $\bar{g}_{1i}^l$  时， $\bar{g}_{ij}^l = (\bar{g}_{1i}^l)^{-1}(\bar{g}_{1j}^l)$  同时确定。因此，式(4.4)暗示了节点  $j$  相对于节点  $i$  的相对位形是时变的，且渐近收敛到期望的队形  $\bar{g}_{ij}^l$ 。

期望编队的几何形式其对偶描述表示为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_i(t)g_1^{-1}(t) = \bar{g}_{1i}^r, i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.5)$$

或

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_j(t)g_i^{-1}(t) = \bar{g}_{ij}^r, i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.6)$$

## 4.2 控制设计的理论分析

记  $g_i^{-1}g_j$  为  $g_{ij}$ ， $g_j g_i^{-1}$  为  $g_{ij}^r$ ，记  $g_i$  的指数坐标为  $x_i = \log(g_i)$ ，相应地，记  $x_{ij} = \log(g_i^{-1}g_j) = \log(g_{ij})$ ， $x_{ij}^r = \log(g_j g_i^{-1}) = \log(g_{ij}^r)$ 。

由引理2.7 Baker Campbell Hausdorff 公式易知，

$$x_{ij} = \log(g_i^{-1}g_j) = x_j - x_i + \frac{1}{2}[x_j, x_i] + \frac{1}{12}[x_i, [x_i, x_j]] + \frac{1}{12}[x_j, [x_j, x_i]] + \text{higher order terms}$$

其中，higher order terms 为  $x_i$  和  $x_j$  作李括号运算的高阶项。如果  $g_i$  和  $g_j$  相等，那么  $[x_j, x_i] = 0$ ， $\log(g_i^{-1}g_j) = 0$ 。对于  $\log(g_j g_i^{-1})$  有类似的解释。

一致性控制和编队控制存在一定的联系。对于多个运载体来说，当它们的位形，包括位置和姿态，渐近达到相等时( $g_i = g_j$ )，称为达到一致性；当它们的位形，渐近达到固定的相对位置和相对姿态时，即节点之间相对位置和相对姿态是一个常量时，称为达到编队，如果相对位形常量为 $I$ ，那么编队退化为一致性。因此，在研究编队控制之前，我们先来考虑一致性控制。

#### 4.2.1 两个节点的一致性控制

两个( $N = 2$ )运载体协同控制是多个( $N > 2$ )运载体协同控制的特殊问题。在考虑多个运载体的一致性控制之前，我们首先考虑两个个体的情况。假设两个节点之间是双向通讯，即每个个体均能接收对方的信息。由左一致性和右一致性的定义已知，满足 $g_j g_i^{-1} = I$ ，称为李群 $G$ 上的右一致性；满足 $g_i^{-1} g_j = I$ 称为李群 $G$ 上的左一致性。将两个个体控制到位形相同，等价为将两个个体在李群 $G$ 上的相对位形控制到单位元 $e$ ；对于 $SE(2)$ 和 $SE(3)$ 来说，单位元 $e$ 分别为相应维数的单位矩阵 $I$ 。因此，对于相对位形 $g_{12} = g_1^{-1} g_2$ 和 $g_{12}^r = g_2 g_1^{-1}$ ，下面考虑它们相应的动态方程。

将相对位形 $g_{12}^r = g_2 g_1^{-1}$ 对时间求微分，则有

$$\begin{aligned}\dot{g}_{12}^r &= \dot{g}_2 g_1^{-1} - g_2 g_1^{-1} \dot{g}_1 g_1^{-1} = \dot{g}_2 g_2^{-1} (g_2 g_1^{-1}) - (g_2 g_1^{-1})(\dot{g}_1 g_1^{-1}) \\ &= \hat{\xi}_2^r g_{12}^r - g_{12}^r \hat{\xi}_1^r = (\hat{\xi}_2^r - \text{Ad}_{g_{12}^r} \hat{\xi}_1^r) g_{12}^r,\end{aligned}$$

定义

$$\hat{\xi}_{12}^r \triangleq \dot{g}_{12}^r (g_{12}^r)^{-1} = (\hat{\xi}_2^r - \text{Ad}_{g_{12}^r} \hat{\xi}_1^r),$$

则相对位形 $g_{12}^r$ 的动态方程为

$$\dot{g}_{12}^r = \hat{\xi}_{12}^r g_{12}^r. \quad (4.7)$$

类似地，对于相对位形 $g_{12} = g_1^{-1} g_2$ 来说，其时间导数为

$$\begin{aligned}\dot{g}_{12} &= -g_1^{-1} \dot{g}_1 g_1^{-1} g_2 + g_1^{-1} \dot{g}_2 = -g_1^{-1} \dot{g}_1 (g_1^{-1} g_2) + (g_1^{-1} g_2) g_2^{-1} \dot{g}_2 \\ &= -\hat{\xi}_1^l g_{12} + g_{12} \hat{\xi}_2^l = g_{12} (\hat{\xi}_2^l - \text{Ad}_{g_{12}} \hat{\xi}_1^l),\end{aligned}$$

定义

$$\hat{\xi}_{12}^l \triangleq g_{12}^{-1} \dot{g}_{12} = (\hat{\xi}_2^l - \text{Ad}_{g_{12}} \hat{\xi}_1^l),$$

则相对位形 $g_{12}$ 的动态方程为

$$\dot{g}_{12} = g_{12}\hat{\xi}_{12}^l. \quad (4.8)$$

针对左一致性控制目标 $g_i^{-1}g_j = I$ 和右一致性控制目标 $g_jg_i^{-1} = I$ , 对两个运载体个体分别设计如下控制律,

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1^l &= x_{12} = \log(g_{12}) \\ \hat{\xi}_2^l &= x_{21} = \log(g_{21}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1^r &= x_{12}^r = \log(g_{12}^r) \\ \hat{\xi}_2^r &= x_{21}^r = \log(g_{21}^r), \end{aligned} \quad (4.10)$$

我们有如下定理。

**定理 4.1:** 给定控制律(4.9), 双向通讯的两个运载体 $\dot{g}_i = g_i\hat{\xi}_i^l, i = 1, 2$ 渐近达到左一致性 $g_i^{-1}g_j = I$ ; 给定控制律(4.10), 双向通讯的两个运载体 $\dot{g}_i = \hat{\xi}_i^r g_i, i = 1, 2$ 渐近达到右一致性 $g_j g_i^{-1} = I$ 。

**证明:** 我们先来考虑左一致性。由引理2.8, 易得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log(g_{12}) &= d \log_{-\log(g_{12})}(\hat{\xi}_2^l - \text{Ad}_{g_{12}}\hat{\xi}_1^l) \\ &= (\hat{\xi}_2^l - \text{Ad}_{g_{12}}\hat{\xi}_1^l) + \frac{1}{2}[\log(g_{12}), (\hat{\xi}_2^l - \text{Ad}_{g_{12}}\hat{\xi}_1^l)] \\ &\quad + \frac{1}{12}[\log(g_{12}), [\log(g_{12}), (\hat{\xi}_2^l - \text{Ad}_{g_{12}}\hat{\xi}_1^l)]] + \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

将控制律(4.9)代入式(4.11), 由

$$\hat{\xi}_2^l = -\log(g_1^{-1}g_2) \quad (4.12)$$

$$-\text{Ad}_{g_{12}}\hat{\xi}_1^l = -\log(g_1^{-1}g_2) \quad (4.13)$$

则 $\hat{\xi}_2^l - \text{Ad}_{g_{12}}\hat{\xi}_1^l = -2\log(g_1^{-1}g_2)$ , 注意到 $\text{ad}_{x_{12}}^j(\hat{\xi}_2^l - \text{Ad}_{g_{12}}\hat{\xi}_1^l) = 0$ , 那么(4.11)式可整理为

$$\frac{d}{dt} \log(g_1^{-1}g_2) = -2\log(g_1^{-1}g_2).$$

易知该系统渐近稳定, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,  $\log(g_1^{-1}g_2) \rightarrow 0$ , 即 $g_1^{-1}g_2 \rightarrow I$ 。

针对右一致性控制目标, 利用引理2.8, 有

$$\begin{aligned}\dot{x}_{12}^r &= \frac{d}{dt} \log(g_{12}^r) = d \log_{\log(g_{12}^r)}(\hat{\xi}_2^r - \text{Ad}_{g_{12}^r} \hat{\xi}_1^r) \\ &= (\hat{\xi}_2^r - \text{Ad}_{g_{12}^r} \hat{\xi}_1^r) - \frac{1}{2} [\log(g_{12}^r), (\hat{\xi}_2^r - \text{Ad}_{g_{12}^r} \hat{\xi}_1^r)] \\ &\quad + \frac{1}{12} [\log(g_{12}^r), [\log(g_{12}^r), (\hat{\xi}_2^r - \text{Ad}_{g_{12}^r} \hat{\xi}_1^r)]] + \dots\end{aligned}\quad (4.14)$$

将控制律(4.10)代入式(4.14), 由

$$\hat{\xi}_2^r = -\log(g_2(t)g_1^{-1}(t)) = -x_{12}^r, \quad (4.15)$$

$$-\text{Ad}_{g_{12}^r} \hat{\xi}_1^r = -\log(g_2(t)g_1^{-1}(t)) = -x_{12}^r, \quad (4.16)$$

易得  $\hat{\xi}_2^r - \text{Ad}_{g_{12}^r} \hat{\xi}_1^r = -2 \log(g_2(t)g_1^{-1}(t)) = -2x_{12}^r$ 。注意到  $\text{ad}_{x_{12}^r}^j(\hat{\xi}_2^r - \text{Ad}_{g_{12}^r} \hat{\xi}_1^r) = 0$ , 则

$$\frac{d}{dt} \log(g_2 g_1^{-1}) = -2 \log(g_2(t)g_1^{-1}(t)) \quad (4.17)$$

上述系统渐近稳定, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\log(g_2(t)g_1^{-1}(t)) \rightarrow 0$ , 即  $g_2 g_1^{-1} \rightarrow I$ 。 ■

#### 4.2.2 两个节点的编队控制

我们考虑  $N = 2$  即两个运载体双向通讯时编队控制问题, 编队任务由如下方程给定,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_1^{-1}(t)g_2(t) = \bar{g}_{12}^l. \quad (4.18)$$

如果  $\lim_{t \rightarrow \infty} g_2^{-1}(t)g_1(t) = \bar{g}_{21}^l$ , 那么  $\bar{g}_{12}^l = (\bar{g}_{21}^l)^{-1}$ 。因此, 本小节我们只考虑编队任务(4.18)的实现。编队控制和一致性控制存在一定联系, 针对两个运载体的编队控制问题, 本小节将其转化为两个变换系统的一致性控制问题, 进而转化为考虑相对变换系统的平衡点镇定问题。在给出主要结果之前, 我们先对运载体系统进行变换, 并推导出两个运载体其相对变换系统的动态方程。

记

$$\tilde{g}_2(t) = g_2(t)\bar{g}_{21}^l, \quad \tilde{x}_2 = \log(\tilde{g}_2), \quad \tilde{g}_{12} = \tilde{g}_1^{-1}\tilde{g}_2, \quad \tilde{x}_{12} = \log(\tilde{g}_{12}).$$

注意到  $\tilde{x}_{12} \in \mathfrak{se}(3)$  是将李群  $SE(3)$  上的相对位形转换到相应李代数  $\mathfrak{se}(3)$  上的指数坐标, 且  $\bar{g}_{11}^l = I$ ,  $\tilde{g}_1 = g_1$ ,  $\tilde{x}_1 = x_1 = \log(g_1)$ 。定义  $\tilde{\xi}_1^l \triangleq \text{Ad}_{(\bar{g}_{11}^l)^{-1}} \hat{\xi}_1^l = \hat{\xi}_1^l$ ,  $\tilde{\xi}_2^l \triangleq$

$\text{Ad}_{(\tilde{g}_{21}^l)^{-1}}\hat{\xi}_2^l$ , 则两个运载体的变换系统为

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{g}}_1 &= \tilde{g}_1 \tilde{\xi}_1^l \\ \dot{\tilde{g}}_2 &= \tilde{g}_2 \tilde{\xi}_2^l\end{aligned}\quad (4.19)$$

在推导相对变换系统动态方程之前, 先来介绍两个重要等式: 由  $\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{22} = \mathbf{0}$ , 推论2.3 和引理2.6, 易知

$$\tilde{x}_{21} = \log(\tilde{g}_{21}) = -\log(\tilde{g}_{12}) = -\tilde{x}_{12},$$

$$\text{Ad}_{\tilde{g}_{12}^{-1}}\tilde{x}_{12} = \text{Ad}_{\tilde{g}_{12}^{-1}}\log(\tilde{g}_{12}) = \log(\tilde{g}_{12}) = \tilde{x}_{12}.$$

相对位形  $\tilde{g}_{12}$  的时间导数为

$$\dot{\tilde{g}}_{12} = -\tilde{g}_1^{-1}\dot{\tilde{g}}_1\tilde{g}_1^{-1}\tilde{g}_2 + \tilde{g}_1^{-1}\dot{\tilde{g}}_2 = \tilde{g}_{12}(\tilde{\xi}_2^l - \text{Ad}_{(\tilde{g}_{12})^{-1}}\tilde{\xi}_1^l). \quad (4.20)$$

设  $\tilde{\xi}_{12}^l \triangleq \tilde{\xi}_2^l - \text{Ad}_{(\tilde{g}_{12})^{-1}}\tilde{\xi}_1^l$ , 则

$$\dot{\tilde{g}}_{12} = \tilde{g}_{12}\tilde{\xi}_{12}^l. \quad (4.21)$$

注意到  $\tilde{x}_{12} = \log(\tilde{g}_{12}) \in \mathfrak{g}$ . 由引理2.8, 得两个运载体相对变换系统的动态方程为:

$$\dot{\tilde{x}}_{12} = \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{12}}\tilde{\xi}_{12}^l. \quad (4.22)$$

由  $\dot{g}_i = g_i \hat{\xi}_i^l$ ,  $\tilde{g}_i = g_i \bar{g}_{i1}^l$  以及  $\dot{\tilde{g}}_i = \tilde{g}_i \tilde{\xi}_i^l$ , 易得  $\hat{\xi}_i^l = \bar{g}_{i1}^l \tilde{\xi}_i^l (\bar{g}_{i1}^l)^{-1}$ , 这里  $i = 1, 2$ 。因此, 只需要设计  $\tilde{\xi}_i^l$ ,  $i = 1, 2$  即可。我们提出如下编队控制律

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_1^l &= c\tilde{x}_{12}, \\ \tilde{\xi}_2^l &= c\tilde{x}_{21},\end{aligned}\quad (4.23)$$

其中  $c > 0$  是常数。那么, 存在如下定理。

**定理 4.2:** 在控制律(4.23)下, 双向通讯的两个运载体  $\dot{g}_i = g_i \hat{\xi}_i^l$ ,  $i = 1, 2$  漸近地达到给定编队队形, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} g_1^{-1}(t)g_2(t) = \bar{g}_{12}^l$ 。

证明：不失一般性，取 $c = 1$ ；由 $\tilde{x}_{21} = -\tilde{x}_{12}$ 以及 $\text{Ad}_{\tilde{g}_{12}^{-1}}\tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{12}$ ，可得

$$\tilde{\xi}_{12}^l = \tilde{\xi}_2^l - \text{Ad}_{(\tilde{g}_{12})^{-1}}\tilde{\xi}_1^l = -\tilde{x}_{12} - \tilde{x}_{12} = -2\tilde{x}_{12}, \quad (4.24)$$

基于引理2.9，对于 $X \in \mathfrak{g}$ ，存在 $\mathcal{B}_X X = X$ 以及 $\mathcal{B}_{-X} X = X$ ，因此，式(4.22)可整理为

$$\dot{\tilde{x}}_{12} = \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{12}}\tilde{\xi}_{12}^l = -2\tilde{x}_{12}.$$

注意到上述系统 $\tilde{x}_{12}$ 渐近收敛至0点，因此有 $t \rightarrow \infty$ 时， $\log(\tilde{g}_{12}) \rightarrow 0$ ，即 $\tilde{g}_{12} \rightarrow I$ ，从而有 $g_1(t)^{-1}g_2(t)\bar{g}_{21}^l \rightarrow I$ ，即 $g_1(t)^{-1}g_2(t) \rightarrow \bar{g}_{12}^l$ 。从而，编队任务得以实现。 ■

注 4.1：对于同样的两个节点，当其模型由对偶系统方程(4.2)描述，两个节点之间双向通讯，其编队任务的对偶形式表示为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_2(t)g_1^{-1}(t) = \bar{g}_{12}^r. \quad (4.25)$$

记

$$\hat{g}_2(t) = \bar{g}_{21}^r g_2(t), \quad \hat{x}_2 = \log(\hat{g}_2), \quad \hat{g}_{12} = \hat{g}_2 \hat{g}_1^{-1}, \quad \hat{x}_{12} = \log(\hat{g}_{12}),$$

注意到 $\bar{g}_{11}^r = I$ ， $\hat{g}_1 = g_1$ ， $\hat{x}_1 = x_1 = \log(g_1)$ 且 $\hat{x}_{12} \in \mathfrak{se}(3)$ 将李群 $SE(3)$ 上的相对位形转换为相应李代数 $\mathfrak{se}(3)$ 上的指数坐标。 $\hat{x}_{12}$ 和 $\tilde{x}_{12}$ 含义类似。

那么，两个运载体个体(4.2)的变换系统为：

$$\begin{aligned} \dot{\hat{g}}_1 &= \hat{\xi}_1^r \hat{g}_1 \\ \dot{\hat{g}}_2 &= \hat{\xi}_2^r \hat{g}_2 \end{aligned}$$

其中 $\hat{\xi}_2^r = Ad_{(\bar{g}_{12}^r)^{-1}}\hat{\xi}_2^r$ ，设计控制律，

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1^r &= c\hat{x}_{12}, \\ \hat{\xi}_2^r &= c\hat{x}_{21}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

这里， $c > 0$ 为常数控制增益，则编队任务(4.25)能够实现。

### 4.2.3 多个节点的一致性控制与编队控制

观察两个运载体个体的一致性控制协议(4.9)和(4.10), 编队控制律(4.23)、(4.26), 运载体系统(4.1)(其中 $N = 2$ )的编队控制, 可以转化为变换系统(4.19)的一致性控制, 这一转化同样适用于多个节点的情况, 对此, 我们有如下引理。

**引理 4.1:** 对于多个运载体系统(4.1), 设计编队控制律实现编队任务(4.3)和(4.4)当且仅当设计一致性控制协议实现其运载体变换系统的左一致性,

$$\dot{\tilde{g}}_i = \tilde{g}_i \tilde{\xi}_i^l, i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.27)$$

其中,  $\tilde{g}_i(t) = g_i(t)\bar{g}_{i1}$ ,  $\tilde{\xi}_i^l = \text{Ad}(\bar{g}_{i1}^l)^{-1}\hat{\xi}_i^l$ , 并且有 $\dot{\tilde{\xi}}_i^l = \tilde{u}_i$ 。

证明: 如果变换后的系统(4.27)达到左一致性, 那么

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{g}_{ij} \rightarrow I. \quad (4.28)$$

由 $\tilde{g}_{ij}$ 的定义知, 式(4.28)满足当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (g_i(t)\bar{g}_{i1})^{-1}(g_j(t)\bar{g}_{j1}) \rightarrow I,$$

即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{g}_{i1}^{-1} g_i^{-1}(t) g_j(t) \bar{g}_{j1} \rightarrow I,$$

由此可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_{ij} \rightarrow \bar{g}_{i1} \bar{g}_{1j} = \bar{g}_{ij}. \quad (4.29)$$

因此, 为多个运载体系统(4.1)设计编队控制协议实现编队任务(4.3)和(4.4)等价于为其变换系统(4.27)设计左一致性控制律。 ■

对于多个运载体系统的对偶系统描述(4.2)及对偶编队任务(4.5)、(4.6), 同样存在等价于其如下变换系统的右一致性控制协议设计,

$$\dot{\widehat{g}}_i = \widehat{\xi}_i^r \widehat{g}_i, i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.30)$$

其中,  $\bar{g}_i(t) = \bar{g}_{i1}^r g_i(t)$ ,  $\hat{\xi}_i^r = \text{Ad}_{\bar{g}_{i1}^r} \hat{\xi}_i^r$ 。特别地, 当编队控制任务由  $\bar{g}_{ij}^l = e$  或  $\bar{g}_{ij}^r = e$  时, 即对于矩阵李群  $SE(3)$  来说,  $\bar{g}_{ij}^l = I$  或  $\bar{g}_{ij}^r = I$  时, 编队问题退化为一致问题。

当考虑多个( $N > 2$ )运载体系统的一致性控制与编队控制时, 通讯拓扑的形式会更富有变化, 系统收敛性分析较两个节点的情况相比变得复杂。本节将多个运载体系统之间的通讯拓扑建模为有向图  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ , 其邻接矩阵由  $A = [a_{ij}]_{N \times N}$  或归一化邻接矩阵  $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]_{N \times N}$  描述, 如果节点  $i$  能够获得节点  $j$  的状态信息, 则  $a_{ij} = 1$ , 否则,  $a_{ij} = 0$ 。

记

$$\tilde{g}_i(t) = g_i(t)\bar{g}_{i1}^l, \quad \tilde{g}_{ij} = \tilde{g}_i^{-1}\tilde{g}_j, \quad \tilde{x}_{ij} = \log(\tilde{g}_{ij}),$$

$$\hat{g}_i(t) = \bar{g}_{i1}^r g_i(t), \quad \hat{g}_{ij} = \hat{g}_j \hat{g}_i^{-1}, \quad \hat{x}_{ij} = \log(\hat{g}_{ij}),$$

其中,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ , 且  $\bar{g}_{11}^l = \bar{g}_{11}^r = I$ 。注意到  $\tilde{x}_{ij} \in \mathfrak{se}(3)$  将李群  $SE(3)$  上的相对位形转换到相应李代数  $\mathfrak{se}(3)$  上的指数坐标。 $\hat{x}_{ij}$  和  $\tilde{x}_{ij}$  含义类似。

由  $\tilde{x}_{ii} = \tilde{x}_{jj} = \mathbf{0}$ , 推论2.3 和引理2.6, 有

$$\tilde{x}_{ji} = \log(\tilde{g}_{ji}) = -\log(\tilde{g}_{ij}) = -\tilde{x}_{ij},$$

$$\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{x}_{ij} = \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \log(\tilde{g}_{ij}) = \log(\tilde{g}_{ij}) = \tilde{x}_{ij}.$$

相对位形  $\tilde{g}_{ij}$  的时间导数为

$$\dot{\tilde{g}}_{ij} = -\tilde{g}_i^{-1} \dot{\tilde{g}}_i \tilde{g}_i^{-1} \tilde{g}_j + \tilde{g}_i^{-1} \dot{\tilde{g}}_j = \tilde{g}_{ij} (\tilde{\xi}_j^l - \text{Ad}_{(\tilde{g}_{ij})^{-1}} \tilde{\xi}_i^l). \quad (4.31)$$

令  $\tilde{\xi}_{ij}^l \triangleq \tilde{\xi}_j^l - \text{Ad}_{(\tilde{g}_{ij})^{-1}} \tilde{\xi}_i^l$ , 则

$$\dot{\tilde{g}}_{ij} = \tilde{g}_{ij} \tilde{\xi}_{ij}^l. \quad (4.32)$$

注意到  $\tilde{x}_{ij} = \log(\tilde{g}_{ij}) \in \mathfrak{g}$ . 由引理2.8, 得

$$\dot{\tilde{x}}_{ij} = \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{ij}} \tilde{\xi}_{ij}^l. \quad (4.33)$$

由  $\dot{g}_i = g_i \dot{\xi}_i^l$ ,  $\tilde{g}_i = g_i \bar{g}_{i1}^l$  以及  $\dot{\tilde{g}}_i = \tilde{g}_i \tilde{\xi}_i^l$ , 有  $\tilde{\xi}_i^l = \bar{g}_{i1}^l \tilde{\xi}_i^l (\bar{g}_{i1}^l)^{-1}$ 。因此, 只需要设

计控制律  $\tilde{\xi}_i^l$  即可换算出原编队控制律  $\hat{\xi}_i^l$ 。我们提出如下编队控制律

$$\tilde{\xi}_i^l = \frac{c}{a_i} \sum_{j=1}^N a_{ij} \tilde{x}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.34)$$

其中,  $c > 0$  是常数控制增益, 不失一般性, 取  $c = 1$  并不影响编队结果;  $a_{ij} \geq 0, a_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ ;  $\tilde{x}_{ij} = \log(\tilde{g}_{ij})$ ; 使得

$$\tilde{\xi}_{ij}^l = \tilde{\xi}_j^l - \text{Ad}_{(\tilde{g}_{ij})^{-1}} \tilde{\xi}_i^l = - \sum_{k=1}^N (\bar{a}_{jk} \tilde{x}_{kj} - \bar{a}_{ik} \text{Ad}_{(\tilde{g}_{ij})^{-1}} \tilde{x}_{ki}). \quad (4.35)$$

由引理2.7中Baker Campbell Hausdorff 方程得,

$$\text{Ad}_{(\tilde{g}_{ij})^{-1}} \tilde{x}_{ki} = \tilde{g}_{ij}^{-1} \log(\tilde{g}_{ki}) \tilde{g}_{ij} = \tilde{x}_{ji} + \tilde{x}_{kj} + \text{higher order terms}, \quad k \neq i. \quad (4.36)$$

注意到  $\sum_{k=1}^N \bar{a}_{ik} = 1$ , 将(4.35)和(4.36)代入(4.33), 得

$$\dot{\tilde{x}}_{ij} = -\tilde{x}_{ij} - \bar{a}_{ji} \tilde{x}_{ij} - \sum_{k=1, k \neq i}^N \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{ij}} (\bar{a}_{ik} - \bar{a}_{jk}) \tilde{x}_{jk} + \text{higher order terms}. \quad (4.37)$$

假定每个节点能够获得至多其它1个节点的信息, 则  $\tilde{\xi}_i^l = \tilde{x}_{ih}, \tilde{\xi}_j^l = \tilde{x}_{ji} = -\tilde{x}_{ij}, i, j, h \in \{1, 2, \dots, N\}, h \leq i < j$ ,, 从而有

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{ij} &= \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{ij}} \tilde{\xi}_{ij}^l = \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{ij}} (\tilde{\xi}_j^l - \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{\xi}_i^l) \\ &= -\tilde{x}_{ij} + \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{ij}} \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{x}_{hi} \\ &= -2\tilde{x}_{ij} + \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{ij}} (\tilde{x}_{hi} + \text{higher order terms}). \end{aligned} \quad (4.38)$$

系统(4.38)是一个仿射非线性系统,  $(\tilde{x}_{hi} + \text{higher order terms})$  是该系统的控制输入。下面我们介绍几个重要结果。

**定理 4.3:** 假设  $N$  个运载体系统(4.1)的通讯拓扑为树状图, 则在控制协议(4.34)下该网络系统渐近地达到期望的编队队形(4.3)。

**证明:** 如果  $N$  个节点的通讯拓扑为树状图, 设如图4.1所示, 则相邻两个节点其相对位形指数坐标的动态方程描述为(4.38)。如果  $h = i$ , 则  $i$  为根节点。

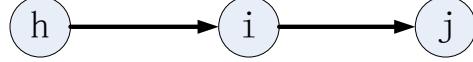
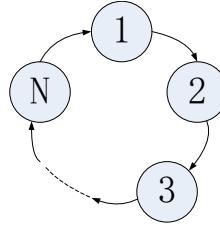


图 4.1 树状通讯拓扑图

注意到 $\tilde{x}_{ii} = \mathbf{0}$ 。由引理2.9，式(4.38)重新整理为 $\dot{\tilde{x}}_{ij} = -2\tilde{x}_{ij} + \tilde{x}_{ij} = -\tilde{x}_{ij}$ 。该系统在 $t \rightarrow \infty$ 时，其状态 $\tilde{x}_{ij} \rightarrow \mathbf{0}$ 。当 $h < i$ 且 $\tilde{x}_{ih} \rightarrow \mathbf{0}$ ，则 $\tilde{x}_{hj} \rightarrow \tilde{x}_{ij}$ ，从而 $\dot{\tilde{x}}_{ij} \rightarrow -\tilde{x}_{ij}$ ，那么 $\tilde{x}_{ij} \rightarrow \mathbf{0}$ 。通过归纳法得，多个运载体系统(4.1)在树状通讯拓扑图下，通过给定的控制协议(4.34)渐近达到期望的编队(4.3)。 ■

**注 4.2：**在一类特殊的通讯拓扑图：环形拓扑图情况下，设如图4.2所示，每个节点向另外两个不同的节点传递信息，相邻两个节点其相对位形指数坐标的动

图 4.2  $N$  个节点的环形通讯拓扑图

态(和式(4.33)类似)由如下方程描述，

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_{i,i+1} &= \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{i,i+1}} \tilde{\xi}_{i,i+1}^l = \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{i,i+1}} (\tilde{\xi}_{i+1}^l - \text{Ad}_{\tilde{g}_{i,i+1}^{-1}} \tilde{\xi}_i^l) \\ &= -\tilde{x}_{i,i+1} + \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{i,i+1}} \text{Ad}_{\tilde{g}_{i,i+1}^{-1}} \tilde{x}_{i-1,i}.\end{aligned}$$

当任意两个相邻节点其相对位形的初始值相等时，即存在 $\tilde{x}_{i,i+1}(0) = \tilde{x}_{i-1,i}(0)$ ，则

$$\dot{\tilde{x}}_{i,i+1} = -\tilde{x}_{i,i+1} + \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{i,i+1}} \text{Ad}_{\tilde{g}_{i,i+1}^{-1}} \tilde{x}_{i,i+1} = -\tilde{x}_{i,i+1} + \tilde{x}_{i,i+1} = \mathbf{0}. \quad (4.39)$$

系统(4.39)不收敛。事实上，系统(4.39)的收敛性依赖于各个节点的相对初始值。下一节仿真我们将给出环形拓扑下多个运载体系统编队控制失效的例子。注意到，当从环形拓扑中切断最多一条边（代表通讯信道）时，新的图形是一个树状图，我们已证明树状图能够在给定协议下实现期望的编队，因此可以观察到，通过为通讯拓扑图添加边，虽然增加了节点之间的信息联系，但减弱了多运载体系统达到期望队形的能力。相似的结论见文献 [83]。

注 4.3: 定理4.3中对于多个运载体系统通讯拓扑为树状图的要求不同于文献 [84]中对拓扑图含有一个生成树的要求。在刚体运动群上的编队控制情形中，我们给出了一个反例，即环形拓扑图是含有生成树的一个有向图，但是环形拓扑图不能保证在给定控制协议下使得系统从任意的初始条件都能达到期望的编队队形(参考注4.2)。我们在稍后的数值仿真内容将说明这一点。

对于多个运载体系统的情况，当其通讯拓扑为完全图的情形，我们有如下结论。

**定理 4.4:** 假设 $N$ 个运载体系统(4.1)的通讯拓扑图为完全图，则在控制协议(4.34)下，该运载体网络渐近地达到期望的编队队形(4.3)。

**证明:** 对于完全图，有 $a_{ij} = 1$ 以及 $\bar{a}_{ik} = \bar{a}_{jk} = 1/(N - 1)$ ， $\forall i, j, k = 1, \dots, N$ 。对于式(4.36)以及系统(4.37)，高阶项对收敛性的影响小于线性项，且当节点趋近于期望的编队队形时，高阶项渐近递减。在期望队形的某个邻域内，省略系统(4.37)的高阶项是合理的。此时，我们有 $\dot{\tilde{x}}_{ij} = -\tilde{x}_{ij} - \bar{a}_{ji}\tilde{x}_{ij}$ ，该系统是一个渐近稳定的线性系统。因此，当 $t \rightarrow \infty$ 时， $\tilde{x}_{ij} = \log(\tilde{g}_{ij}) \rightarrow 0$  ( $\tilde{g}_{ij} \rightarrow I$ ， $g_1^{-1}g_i \rightarrow \bar{g}_{1i}^l$ ， $\forall i, j \in \mathcal{V}$ )；从而渐近地达到编队(4.3)。 ■

**注 4.4:** 给定树状通讯拓扑图和完全通讯拓扑图，对多个运载体系统(4.1)设计控制协议(4.34)能够实现该运载体网络渐近地趋近于编队(4.3)。给定相同的树状通讯拓扑图和完全通讯拓扑图，其对偶形式的系统(4.2)，则在如下控制协议下能够渐近地实现对偶形式的编队任务(4.5)，

$$\widehat{\xi}_i^r = \frac{c}{a_i} \sum_{j=1}^N a_{ij} \widehat{x}_{ij}, \quad (4.40)$$

其中常数 $c > 0$ 是控制增益， $a_{ij} \geq 0$ ， $a_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ ， $i = 1, 2, \dots, N$ ， $\dot{\widehat{g}}_i = \widehat{\xi}_i^r \widehat{g}_i$ ， $\widehat{g}_i = \bar{g}_{i1}^r g_i$ ， $\widehat{g}_{ij} = \bar{g}_j \bar{g}_i^{-1}$ ， $\widehat{x}_{ij} = \log(\widehat{g}_{ij})$ 。

**注 4.5:** 对于特殊的编队任务 $\bar{g}_{ij}^l = \bar{g}_{ij}^r = I$ ， $\forall i, j = 1, 2, \dots, N$ ，控制律(4.34)和(4.40)即为一致性控制律。此时，多个运载体系统的位形渐近达到一致。

### 4.3 仿真

本节仿真假设在 $SE(2)$ 上有4个节点(运载体)，由如下方程描述 $\dot{g}_i = g_i \hat{\xi}_i^l$ ,  $g_i \in SE(2)$ ,  $\hat{\xi}_i^l \in \mathfrak{se}(2)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ 。考虑下面4个仿真例子。

例1. 假设4个节点的通讯拓扑图如图4.3所示，设四个节点的初始值为

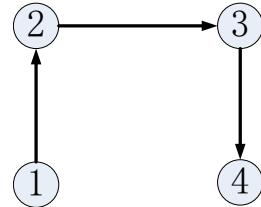


图 4.3 4个节点的树状通讯拓扑图

$$g_1(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, g_2(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$g_3(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 15 \\ 0 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, g_4(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 15 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

期望的编队为

$$\bar{g}_{11}^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{g}_{12}^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{g}_{13}^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{g}_{14}^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则编队时各节点运动轨迹如图4.4所示，4个节点最终达到了期望的队形，它们的状态与控制如图4.5所示。

例2. 考虑相同的4个节点的编队，其通讯拓扑为环形，如图4.6所示。4个节点和例1中有相同的初始值，期望的编队也相同，注意到 $\tilde{x}_{21}(0) = \tilde{x}_{32}(0) = \tilde{x}_{43}(0) = \tilde{x}_{14}(0)$ 且 $\dot{\tilde{x}}_{i,i+1}(0) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ 。节点的运动轨迹图如图4.7所示。由该

### 4.3. 仿真

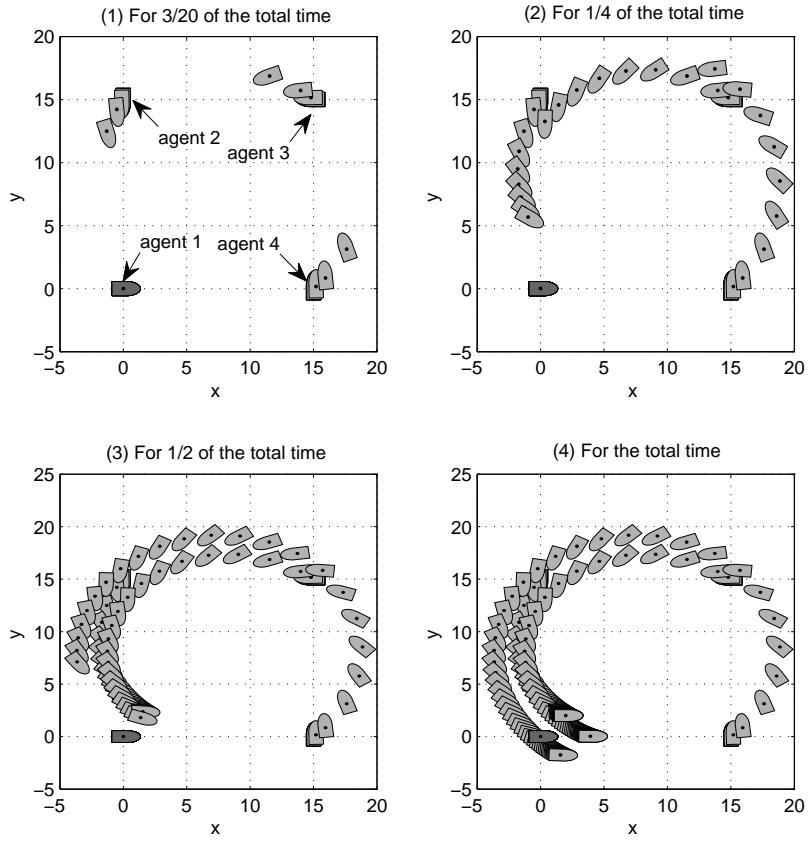


图 4.4  $SE(2)$ 上的4个运动学节点带有姿态的轨迹图(树状图,4个子图按顺序分别为3/20, 1/4, 1/2以及全部仿真时间的节点运行轨迹)

图中观察到，4个节点在环形拓扑图情形下无法达到期望的编队。因此，正如我们在注4.2 所陈述，通过对生成树添加边，无法改善节点达到期望队形的能力。节点的状态与控制如图4.8所示。

**例3.** 对于相同的环形拓扑图4.6，除节点2的初值更改为

$$g_2(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其余节点和例1，例2中初值相同，期望编队也和例1，例2中相同。则，编队控制中个体随时间的运动轨迹如图4.9所示。各节点的状态与控制如图4.10所示。注意到，正如我们在注4.2所陈述，本例中节点能够达到期望编队是建立在和

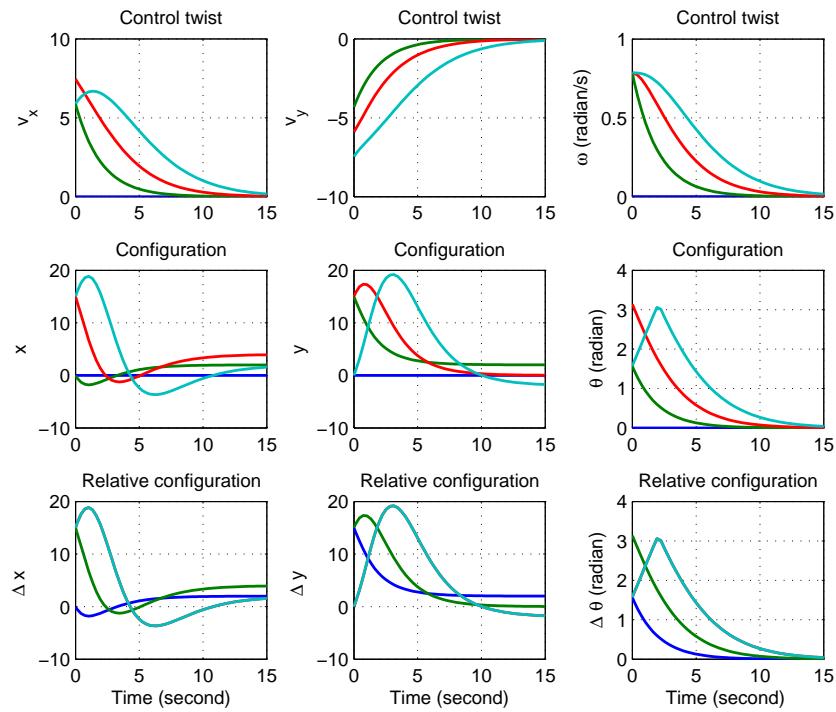


图 4.5 运动学节点状态与控制(树状图), 由上到下: 节点的控制输入, 位形和相对位形(相对于节点1); 由左到右: 平面坐标系的 \$x\$ 轴, \$y\$ 轴以及姿态 \$\theta\$ 表示。

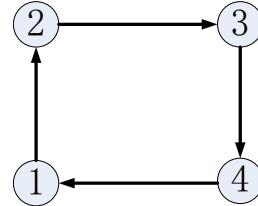


图 4.6 4个节点的环形通讯拓扑图

例2不同的相对位形情形下。

**例4.** 现在考虑4个节点的通讯拓扑图为完全图的情形, 如图4.11所示。4个节点的初始值为

$$g_1(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, g_2(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

### 4.3. 仿真

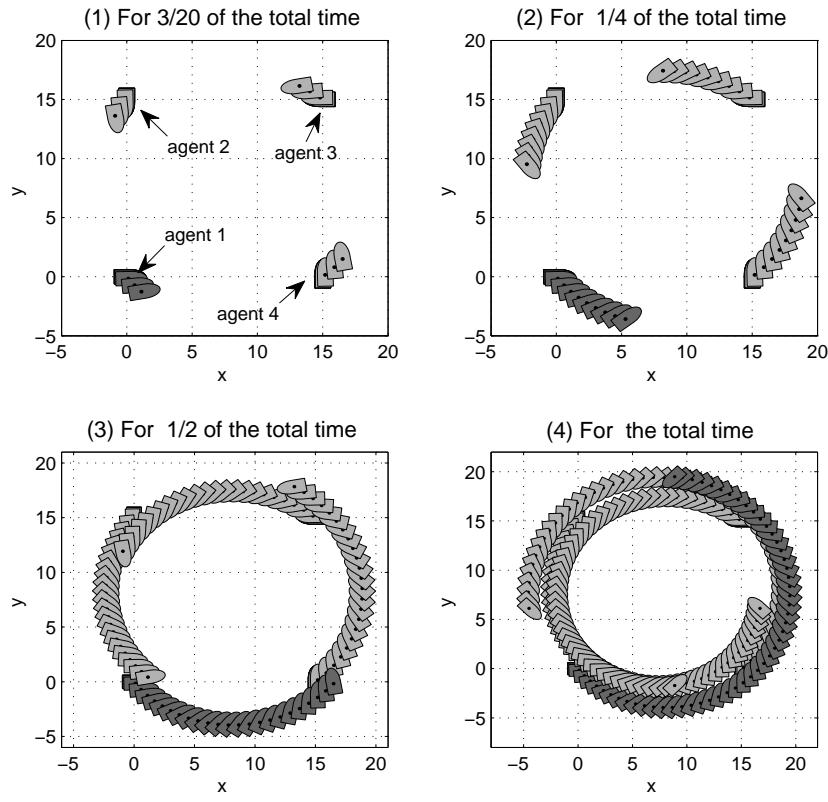


图 4.7  $SE(2)$ 上的4个运动学节点带有姿态的轨迹图(环形图,不能达到期望编队,4个子图按顺序为3/20, 1/4, 1/2及全部仿真时间下的节点运行轨迹)

$$g_3(0) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 15 \\ 0.5 & 0.866 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, g_4(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 15 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

期望的编队队形和例1相同。

4个节点的完全图其邻接矩阵由如下矩阵表示:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

采用一致性控制协议(4.34), 编队中个体随时间的运动轨迹、状态与控制如

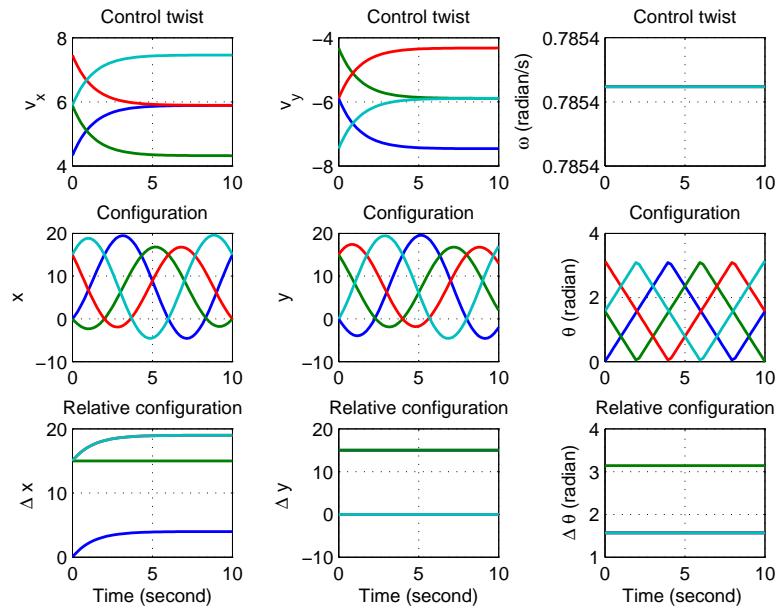


图 4.8 运动学节点状态与控制(环形图,不能达到期望编队), 由上到下: 节点的控制输入, 位形和相对位形(相对于节点1); 由左到右: 平面坐标系的 $x$ 轴,  $y$ 轴以及姿态 $\theta$ 表示。

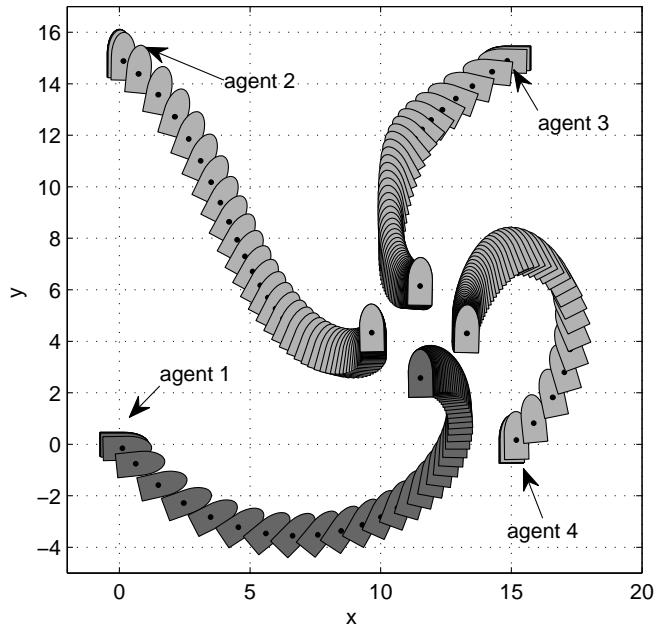


图 4.9  $SE(2)$ 上的4个运动学节点带有姿态的轨迹图(环形通讯拓扑图,达到期望编队)

### 4.3. 仿真

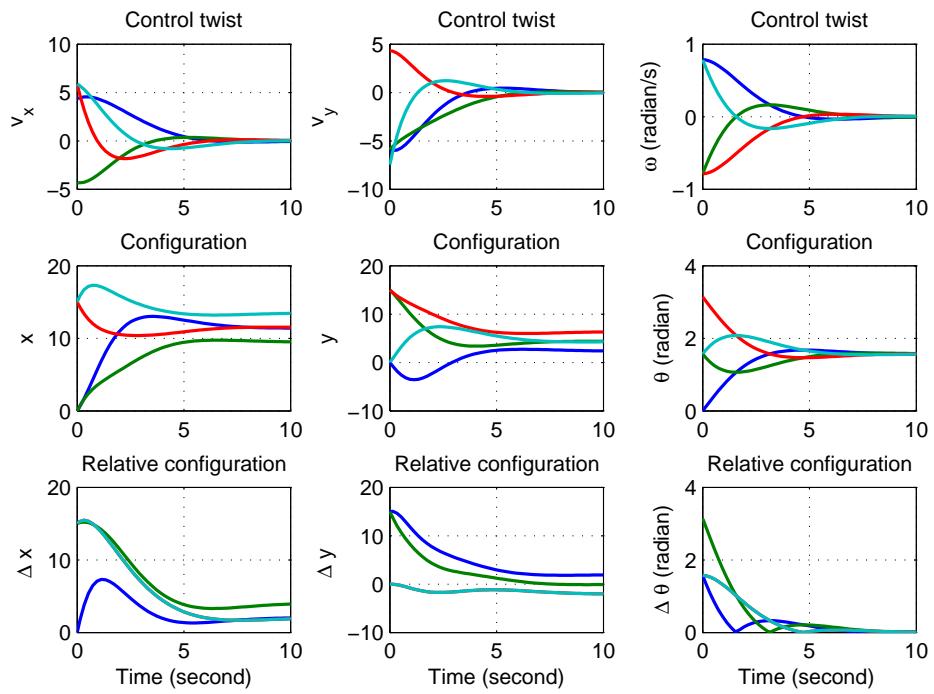


图 4.10 运动学节点状态与控制(环形图,达到期望编队), 由上到下: 节点的控制输入, 位形和相对位形(相对于节点1); 由左到右: 平面坐标系的 $x$ 轴,  $y$ 轴以及姿态 $\theta$ 表示。

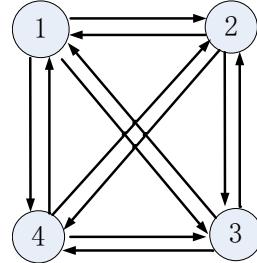


图 4.11 4个节点的完全通讯拓扑图

图4.12和图4.13所示。注意到, 在完全通讯拓扑图情形下, 采用设计的控制协议能够使得网络系统达到期望的编队。

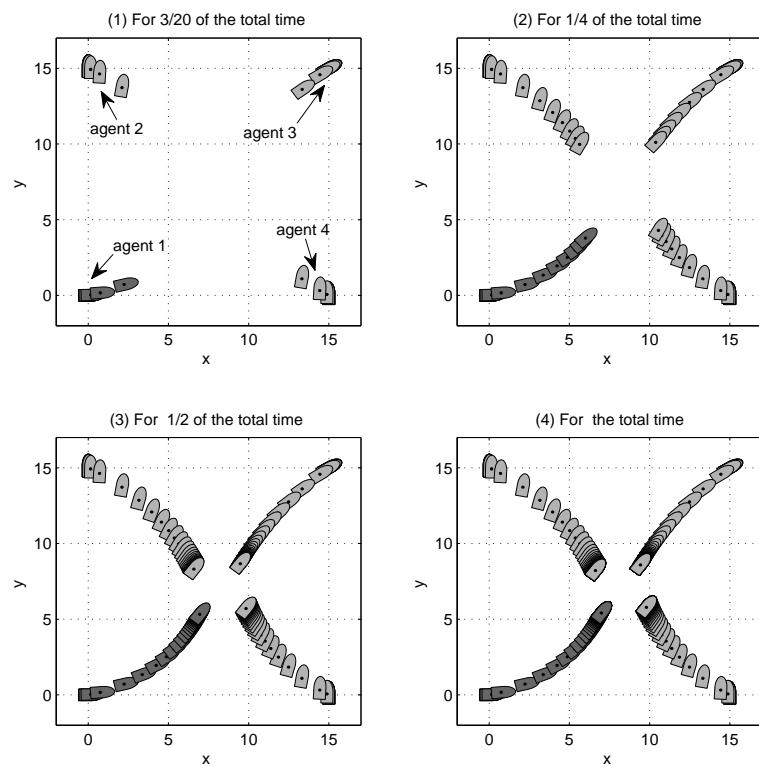


图 4.12  $SE(2)$ 上的4个运动节点带有姿态的轨迹图(完全图,4个子图按顺序分别为 $3/20$ ,  $1/4$ ,  $1/2$ 以及全部仿真时间内的各节点运动轨迹)

### 4.3. 仿真

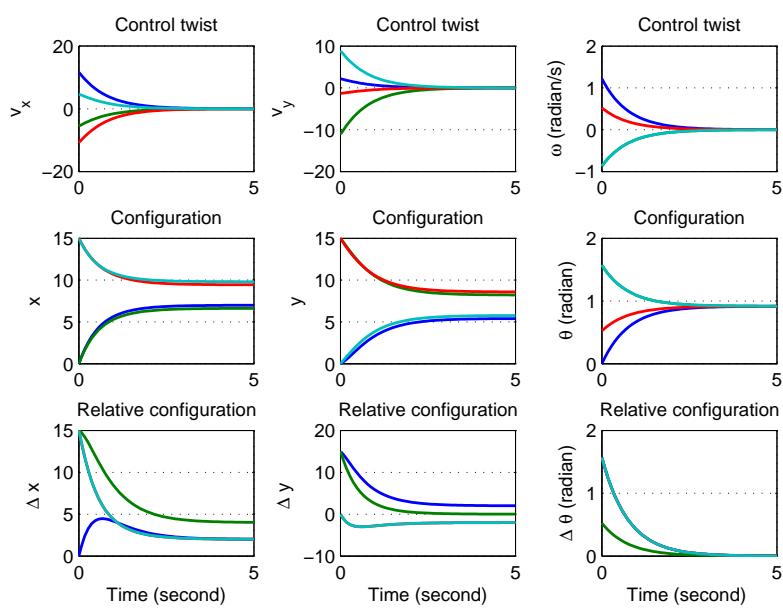


图 4.13 运动学节点状态与控制(完全图)。由上到下：节点的控制输入，位形和相对位形(相对于节点1)；由左到右：平面坐标系的 $x$ 轴， $y$ 轴以及姿态 $\theta$ 表示

## 第五章 多运载体渐近一致、编队与跟踪——动力学模型

### 5.1 问题描述

本章将运载体系统个体建模为刚体运动群上的动力学模型，进而考虑 $N$ 个力学运载体系统在刚体运动群 $SE(i), i = 2, 3$ 上一致性、编队和以编队方式进行跟踪的问题(下文如果没有特殊说明，我们首先考虑 $SE(3)$ )。

#### 5.1.1 运载体系统的动力学模型

考虑 $N$ 个力学运载体系统在刚体运动群 $SE(3)$ 上的编队问题，且运载体网络系统中的每个节点都是全驱动的，即系统中独立控制的维数等于系统位形空间的维数。运载体系统个体的动态模型由下式描述(记为 $\Sigma$ )，

$$\Sigma. \quad \begin{cases} \dot{g}_i = g_i \hat{\xi}_i^l, \\ \dot{\hat{\xi}}_i^l = u_i, \end{cases}, i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.1)$$

其中， $g_i \in SE(3)$ 是第*i*个节点的位形； $\hat{\xi}_i^l \in \mathfrak{se}(3)$ 表示第*i*个节点刚体坐标系下的速度； $u_i \in \mathfrak{se}(3)$ 是节点*i*的控制输入。

系统 (5.1) 的对偶系统表示为：

$$\begin{aligned} \dot{g}_i &= \hat{\xi}_i^r g_i \\ \dot{\hat{\xi}}_i^r &= u_i^r \end{aligned} \quad (5.2)$$

其中， $g_i$ 是和式 (5.1) 中第*i*个运载体系统相同的位形； $\hat{\xi}_i^r \in \mathfrak{se}(3)$ 表示第*i*个运载体系统空间坐标系下的速度； $u_i^r$ 是节点*i*在空间坐标系下的控制输入。

在以编队形式跟踪(简称：编队跟踪)问题中，存在一个全局领导者角色的运载体(用下标 $o$ 区别)，称为全局 leader，它的运行轨迹是其它 $N$ 个运载体(称为 follower )跟踪的路径。设全局 leader 动态方程为，

$$\Sigma_o. \quad \begin{cases} \dot{g}_o = g_o \hat{\xi}_o^l, \\ \dot{\hat{\xi}}_o^l = u_o, \end{cases} \quad (5.3)$$

这里  $g_o \in SE(3)$  是全局 leader 的位形；  $\hat{\xi}_o^l \in \mathfrak{se}(3)$  表示全局 leader 在刚体坐标系下的速度；  $u_o \in \mathfrak{se}(3)$  是全局 leader 的控制输入，它是事先设定用于产生跟踪轨迹的，因此不能设计。全局 leader (5.3) 存在和其它运载体对偶系统(5.2)类似的对偶系统，将下标由  $i$  替换为  $o$  即可，且存在  $\hat{\xi}_o^r = \text{Ad}_{g_o} \hat{\xi}_o^l$ 。

本章将节点之间通讯互联结构记为  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ 。

### 5.1.2 协同一致、编队与编队跟踪

多运载体系统(5.1)的一致性控制是指设计节点控制律  $u_i$ (或  $u_i^r$ )，使得当  $t \rightarrow \infty$  时， $g_i \rightarrow g_j, \hat{\xi}_j^l(t) - \text{Ad}_{g_{ij}^{-1}(t)} \hat{\xi}_i^l(t) = \mathbf{0}, \forall i, j \in \mathcal{V}$ 。

下文记  $g_i^{-1}(t)g_j(t)$  为  $g_{ij}(t)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, N$ )，它表示节点  $j$  关于节点  $i$  的相对位形。我们称  $N$  个多运载体系统达到所期望的编队是指当他们的状态满足如下方程，

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} g_{1i}(t) = \bar{g}_{1i}, \end{array} \right. \quad (5.4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\xi}_i^l(t) - \text{Ad}_{g_{1i}^{-1}(t)} \hat{\xi}_1^l(t) = \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (5.4b)$$

或者等价为

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} g_{ij}(t) = \bar{g}_{ij}, \end{array} \right. \quad (5.5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\xi}_j^l(t) - \text{Ad}_{g_{ij}^{-1}(t)} \hat{\xi}_i^l(t) = \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (5.5b)$$

其中， $i, j = 1, 2, \dots, N$ ， $\bar{g}_{1i} \in SE(3)$  是依据给定编队任务确定的常量矩阵（欧氏群元素）。 $\bar{g}_{1i}$  表示节点  $i$  关于节点 1 所期望的相对位形，描述了编队的几何形式。同样地， $\bar{g}_{ij}$  是常矩阵，是节点  $j$  关于节点  $i$  所期望的相对位形。当给定编队任务  $\bar{g}_{1i}$  时， $\bar{g}_{ij} = (\bar{g}_{1i})^{-1}(\bar{g}_{1j})$  同时确定。方程(5.5) 表示随着时间的增长，从节点  $j$  的刚体坐标系看节点  $i$  的速度，它是和节点  $j$  的刚体速度相等的。方程(5.5b) 保证了多个运载体系统在运动时仍能保持刚性编队。

当  $\bar{g}_{ij} = I$ ，即当  $t \rightarrow \infty$  时，有  $g_{ij}(t) \rightarrow I$ ， $\text{Ad}_{g_{ij}^{-1}(t)} \rightarrow I$  以及  $\hat{\xi}_j^l(t) \rightarrow \hat{\xi}_i^l(t)$ ，即  $N$  个多运载体系统达到了一致性。因此，在本章中，一致性控制可以视为编队控制的特例。

$N$  个运载体  $\Sigma$  以编队方式跟踪全局 leader， $\Sigma_o$ ，是指  $N$  个运载体状态满足

下列等式,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_{io}(t) = \bar{g}_{io}, \quad (5.6a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\xi}_o^l(t) - \text{Ad}_{\bar{g}_{io}^{-1}(t)} \hat{\xi}_i^l(t) = \mathbf{0}, \quad (5.6b)$$

其中,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\bar{g}_{io} \in SE(3)$  是节点  $i$  和全局 leader 的需要达到的相对位形, 它是一个常量群元素, 表示根据编队跟踪任务设定的编队队形, 由节点  $i$  和全局 leader 保持常量相对位形  $\bar{g}_{io}$  同时也决定了跟踪任务的实现; 等式(5.6b)保证了  $N$  个运载体在跟踪时保持编队队形。当给定编队跟踪任务  $\bar{g}_{io}$  (or  $\bar{g}_{oi}$ ) 时,  $\bar{g}_{ij} \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} g_{ij}(t) = (\bar{g}_{oi})^{-1}(\bar{g}_{oj})$  同时也确定。编队跟踪需要满足的式(5.6)和编队任务需要满足的式(5.4)区别在于, 式(5.6)中全局 leader 由于控制律事先给定, 因此它的位形和速度是供 follower 参考跟踪的, 因此不依赖于和其它运载体的通讯。

回顾多运载体系统运动学模型情形下讨论的一致和编队控制, 在动力学模型中编队控制也可以通过“变换系统”的一致控制来实现。为了介绍该结果, 我们首先做如下准备工作。

定义

$$\tilde{g}_i(t) = g_i(t)\bar{g}_{i1}, i = 1, 2, \dots, N,$$

则,

$$\dot{\tilde{g}}_i = \dot{g}_i \bar{g}_{i1} = g_i \hat{\xi}_i^l \bar{g}_{i1} = \tilde{g}_i \text{Ad}_{\bar{g}_{i1}^{-1}} \hat{\xi}_i^l.$$

记  $\tilde{\xi}_i^l \triangleq \text{Ad}_{\bar{g}_{i1}^{-1}} \hat{\xi}_i^l$ , 易得  $\dot{\tilde{g}}_i = \tilde{g}_i \tilde{\xi}_i^l$ 。 $\tilde{\xi}_i^l$  的时间导数为  $\dot{\tilde{\xi}}_i^l = \bar{g}_{i1}^{-1} \dot{\tilde{g}}_i \bar{g}_{i1} = \bar{g}_{i1}^{-1} u_i \bar{g}_{i1}$ 。记  $\tilde{u}_i \triangleq \bar{g}_{i1}^{-1} u_i \bar{g}_{i1}$ , 则  $\dot{\tilde{\xi}}_i^l = \tilde{u}_i$ 。因此, 变换后的多运载体系统为

$$\tilde{\Sigma}. \quad \begin{cases} \dot{\tilde{g}}_i = \tilde{g}_i \tilde{\xi}_i^l, \\ \dot{\tilde{\xi}}_i^l = \tilde{u}_i, \end{cases} \quad (5.7)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, N$ 。同样地, 记  $\tilde{g}_{ij}(t) \triangleq \tilde{g}_i^{-1}(t) \tilde{g}_j(t)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, N$ ), 即节点  $j$  的变换系统关于节点  $i$  的变换系统的相对位形。变换系统  $\tilde{\Sigma}$  达到一致性是指当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $\tilde{g}_{ij}(t) \rightarrow I$  ( $\tilde{g}_j(t) \rightarrow \tilde{g}_i(t)$ ) 以及  $\tilde{\xi}_j^l(t) \rightarrow \tilde{\xi}_i^l(t)$ 。我们通过下面的引理来说明编队和一致的关系。

**引理 5.1:** 多运载体系统  $\Sigma$  达到给定编队当且仅当变换系统  $\tilde{\Sigma}$  达到一致性。

### 5.1. 问题描述

---

证明：变换系统 $\tilde{\Sigma}$ 达到一致性是指

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{g}_{ij} \rightarrow I, \quad (5.8)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\xi}_j(t) - \tilde{\xi}_i(t) = \mathbf{0}. \quad (5.9)$$

由 $\tilde{g}_{ij}$ 的定义知式(5.8)满足当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (g_i(t)\bar{g}_{i1})^{-1}(g_j(t)\bar{g}_{j1}) \rightarrow I,$$

易知，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{g}_{i1}^{-1} g_i^{-1}(t) g_j(t) \bar{g}_{j1} \rightarrow I$$

以及

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_{ij} \rightarrow \bar{g}_{i1}\bar{g}_{1j} = \bar{g}_{ij}. \quad (5.10)$$

由 $\tilde{\xi}_i$ 及 $\tilde{\xi}_j$ 的定义，知式(5.9)等价于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Ad}_{g_{j1}^{-1}(t)} \hat{\xi}_j^l(t) - \text{Ad}_{g_{i1}^{-1}(t)} \hat{\xi}_i^l(t) = \mathbf{0},$$

即有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\xi}_j^l(t) - \text{Ad}_{g_{j1}(t)} \text{Ad}_{g_{1i}(t)} \hat{\xi}_i^l(t) = \mathbf{0}$$

以及

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\xi}_j^l(t) - \text{Ad}_{g_{ji}(t)} \hat{\xi}_i^l(t) = \mathbf{0}.$$

则易得下式，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\xi}_j^l(t) - \text{Ad}_{g_{ij}^{-1}(t)} \hat{\xi}_i^l(t) = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

■

因此，设计控制律解决多运载体系统 $\Sigma$ 的编队问题可以转化为设计控制律解决“变换系统” $\tilde{\Sigma}$ 的一致问题。对于运载体系统*i*来说，原系统的编队控制 $u_i$ 和“变换系统”的一致性控制 $\tilde{u}_i$ 存在如下关系： $u_i = \bar{g}_{i1}\tilde{u}_i\bar{g}_{i1}^{-1}$ 。

对于编队跟踪问题，有类似的结论。即*N*个 follower  $\Sigma$ 和1个全局 leader  $\Sigma_o$ 组成的运载体网络实现编队跟踪当且仅当*N*+1个节点之间“变换系统”达到

一致性。证明和引理5.1类似，不再赘述。

## 5.2 控制设计的理论分析

### 5.2.1 一致性与编队控制

为了解决 $SE(3)$ 上变换系统 $\tilde{\Sigma}$ 的一致性问题，我们考虑镇定节点之间的相对动力学系统。

定义

$$\tilde{x}_{ij} \triangleq \log(\tilde{g}_{ij}) \quad (5.12)$$

以及

$$\tilde{\xi}_{ij}^l \triangleq \tilde{\xi}_j^l - \text{Ad}_{(\tilde{g}_{ij})^{-1}} \tilde{\xi}_i^l, \quad (5.13)$$

其中 $\tilde{x}_{ij} \in \mathfrak{se}(3)$ 称为 $\tilde{g}_{ij}$ 的指数坐标，它也可以理解为一个同胚映射，将 $SE(3)$ 上的相对位形映射为 $\mathfrak{se}(3)$ 该相对位形的指数坐标。对于 $\tilde{g}_{ij}$ 以及 $\tilde{x}_{ij}$ ，由关系式 $\tilde{x}_{ii} = \tilde{x}_{jj} = \mathbf{0}$ ，推论2.3，引理2.6，知存在下列等式，

$$\tilde{x}_{ji} = \log(\tilde{g}_{ji}) = -\log(\tilde{g}_{ij}) = -\tilde{x}_{ij}, \quad (5.14)$$

$$\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{x}_{ij} = \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \log(\tilde{g}_{ij}) = \tilde{g}_{ij}^{-1} \log(\tilde{g}_{ij}) \tilde{g}_{ij} = \log(\tilde{g}_{ij}^{-1} \tilde{g}_{ij} \tilde{g}_{ij}) = \tilde{x}_{ij}. \quad (5.15)$$

由定义(5.13)， $\tilde{\xi}_{ij}^l \triangleq \tilde{\xi}_j^l - \text{Ad}_{(\tilde{g}_{ij})^{-1}} \tilde{\xi}_i^l$ 可以理解为相对速度，即在节点j的刚体坐标系下，节点j和节点i的速度差。下面我们研究相对位形 $\tilde{g}_{ij}$ 的动力方程。 $\tilde{g}_{ij}$ 的时间导数如下式所示，

$$\dot{\tilde{g}}_{ij} = -\tilde{g}_i^{-1} \dot{\tilde{g}}_i \tilde{g}_i^{-1} \tilde{g}_j + \tilde{g}_i^{-1} \dot{\tilde{g}}_j = \tilde{g}_{ij} (\tilde{\xi}_j^l - \text{Ad}_{(\tilde{g}_{ij})^{-1}} \tilde{\xi}_i^l). \quad (5.16)$$

由(5.13)的定义，易得

$$\dot{\tilde{g}}_{ij} = \tilde{g}_{ij} \tilde{\xi}_{ij}^l. \quad (5.17)$$

已知 $\tilde{x}_{ij} = \log(\tilde{g}_{ij}) \in \mathfrak{g}$ ，由引理2.8，可得

$$\dot{\tilde{x}}_{ij} = \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{ij}} \tilde{\xi}_{ij}^l. \quad (5.18)$$

式(5.18)即为变换系统 $\tilde{\Sigma}$ 节点之间相对位形其指数坐标的动力学演化方程。其中， $\tilde{x}_{ij}$ 在 $\mathfrak{se}(3)$ 上取值，且 $\mathfrak{se}(3)$ 为同构于 $\mathbb{R}^6$ 的线性空间。因此，式(5.18)将 $SE(3)$ （非线性流形）上的编队控制问题转化为 $\mathfrak{se}(3)$ （线性空间）上的镇定问题。类似地，我们定义 $\dot{\tilde{g}}_{ij} = \tilde{\xi}_{ij}^r \tilde{g}_{ij}$ 。在讨论相对速度 $\tilde{\xi}_{ij}^l$ 的动力学演化之前，我们首先介绍如下引理（详细证明，参考附录A）

**引理 5.2:** 基于相对速度(5.13)的定义，下列等式成立。

(i)

$$\tilde{\xi}_{ik}^r = -\tilde{\xi}_{ki}^l, \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}} \tilde{\xi}_{ij}^l = -\tilde{\xi}_{ji}^l, \quad (5.19)$$

(ii)

$$\frac{d}{dt} (\text{Ad}_{\tilde{g}_{ji}}) \tilde{\xi}_k^l = \text{Ad}_{\tilde{g}_{ji}} [\tilde{\xi}_{ji}^l, \tilde{\xi}_k^l], \quad (5.20)$$

(iii)

$$\text{Ad}_{\tilde{g}_{ik}} [\tilde{\xi}_k^l, \tilde{\xi}_{ik}^l] = -[\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{ki}^l]. \quad (5.21)$$

基于式(5.19), (5.20) 以及(5.21)，易知，

$$\frac{d}{dt} \left( \text{Ad}_{(\tilde{g}_{ij})^{-1}} \right) \tilde{\xi}_i^l = [\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{ij}^l].$$

那么，相对速度 $\tilde{\xi}_{ij}^l \triangleq \tilde{\xi}_j^l - \text{Ad}_{(\tilde{g}_{ij})^{-1}} \tilde{\xi}_i^l$ 的时间导数可表示为

$$\dot{\tilde{\xi}}_{ij}^l = \dot{\tilde{\xi}}_j^l - \text{Ad}_{(\tilde{g}_{ij})^{-1}} \dot{\tilde{\xi}}_i^l - [\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{ij}^l]. \quad (5.22)$$

式(5.22)和式(5.18)一起组成了以变换系统为基础的相对变换系统动态方程，

$$\tilde{\Sigma}_r. \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_{ij} = \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{ij}} \tilde{\xi}_{ij}^l, \\ \dot{\tilde{\xi}}_{ij}^l = \tilde{u}_{ij}, \end{cases} \quad (5.23)$$

其中 $\tilde{u}_{ij} = \tilde{u}_j - \text{Ad}_{(\tilde{g}_{ij})^{-1}} \tilde{u}_i - [\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{ij}^l]$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  且 $i \neq j$ 。和文献[85]中 $SE(3)$ 上运动学模型编队控制相比较，动力学模型编队控制的主要挑战在于相对速度的时间导数出现了李括号项，因此在编队控制协议设计时要考虑该项对相对系统镇定的影响。在系统 (5.23) 中， $\tilde{x}_{ij}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  意味着 $\tilde{g}_{ij}(t) \rightarrow I$ 。当 $\tilde{g}_{ij}(t) \rightarrow I$ ,  $\tilde{\xi}_{ij}^l(t) \rightarrow \mathbf{0}$ 时，有 $\tilde{\xi}_j^l(t) \rightarrow \tilde{\xi}_i^l(t)$ 。

因此，当系统 $\Sigma$ 达到编队，或系统 $\tilde{\Sigma}$ 达到一致性时，有系统 $\tilde{\Sigma}_r$ 的状态满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_{ij}(t) = \mathbf{0} \text{ and } \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\xi}_{ij}^l(t) = \mathbf{0}.$$

此时，编队问题被转化为设计控制律 $\tilde{u}_i$ 和 $\tilde{u}_j$ 使得受控系统(5.23)镇定到原点。为了解决该问题，我们引入一个重要引理。

**引理 5.3:** ([76] 定理6)对于 $SE(3)$ 上二阶全驱系统(2.6)，设 $K_p$ 和 $K_d$ 为正定增益。则，控制律

$$u(g, \hat{\xi}^l) = -K_p \log(g) - K_d \hat{\xi}^l \quad (5.24)$$

局部指数镇定状态 $g$ 至点 $I \in SE(3)$ .

并且，当增益取标量( $K_p = k_p I_6$ ,  $K_d = k_d I_6$ )，且 $k_p$ 和 $\omega(0)$ (刚体坐标系下初始角速度)满足

$$k_p > \frac{\|\omega(0)\|^2}{\pi^2 - \|R(0)\|_{SO(3)}^2}, \quad (5.25)$$

则给定系统任意初值 $g(0) = (R(0), p(0))$ ,  $\text{tr}(R(0)) \neq -1$ ，控制律(5.24)指数镇定状态 $g$ 由 $g(0)$ 至点 $I$ 。其中， $\|R\|_{SO(3)}$ 是元素 $R \in SO(3)$ 和单位元 $e_{SO(3)} = I \in SO(3)$ 的距离，它由下列对数函数的范数定义：

$$\|R\|_{SO(3)} = \langle \log(R), \log(R) \rangle^{1/2},$$

这里， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是李代数上的内积运算(参考 [76])。

**注 5.1:** 注意到 $\text{tr}(R(0)) \neq -1$ 以及引理5.3中 $k_p$ 的选择是为了避免多运载体系统之间相对姿态是 $\pi$ 还是 $-\pi$ 的歧义异性讨论。在实际应用中，当多运载体系统随时间演化过程中，其相对姿态为 $\pi$ (或 $-\pi$ )时，可根据该时刻姿态以及姿态的导数来确定是 $\pi$ 还是 $-\pi$ ；唯一需要注意的是，在初始时刻，需要首先指定歧义姿态是 $\pi$ 还是 $-\pi$ 。

对于多个运载体系统的变换系统 $\tilde{\Sigma}$ ，我们提出如下一致性控制律 $\tilde{u}_i$ ，

$$\tilde{u}_i = \sum_{k=1}^N \bar{a}_{ik} \left( c_1 \tilde{x}_{ik} + c_2 \tilde{\xi}_{ik}^r + [\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{ki}^l] \right), \quad (5.26)$$

## 5.2. 控制设计的理论分析

---

其中  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\bar{a}_{ik} = \frac{a_{ik}}{\sum\limits_{j=1}^N a_{ij}}$  是归一化邻接矩阵元素;  $c_1 > 0$  和  $c_2 > 0$  是常数控制增益。为了分析闭环系统, 我们首先介绍以下重要等式, 有关证明见附录B。

**引理 5.4:** 基于相对速度(5.13)的定义, 以下等式成立。

(i)

$$\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{\xi}_{ij}^r = \tilde{\xi}_{ij}^l, \quad (5.27)$$

(ii)

$$\tilde{\xi}_{ij}^l = -\text{Ad}_{\tilde{g}_{ji}} \tilde{\xi}_{ji}^l \quad (i \neq j), \quad \tilde{\xi}_{ij}^l = 0 \quad (i = j), \quad (5.28)$$

(iii)

$$\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{\xi}_{ik}^r = \tilde{\xi}_{ij}^l - \tilde{\xi}_{kj}^l, \quad (5.29)$$

(iv)

$$\text{Ad}_{\tilde{g}} [\hat{\xi}_1^l, \hat{\xi}_2^l] = [\text{Ad}_{\tilde{g}} \hat{\xi}_1^l, \text{Ad}_{\tilde{g}} \hat{\xi}_2^l], \quad (5.30)$$

(v)

$$\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{x}_{ki} = \tilde{x}_{ji} + \tilde{x}_{kj} + \text{higher order terms}, \quad k \neq i. \quad (5.31)$$

由引理2.7, 式(5.31)中的高阶项有如下形式:

$$\frac{1}{2} [\tilde{x}_{ji}, \tilde{x}_{kj}] + \frac{1}{12} [\tilde{x}_{ji}, [\tilde{x}_{ji}, \tilde{x}_{kj}]] + \frac{1}{12} [\tilde{x}_{kj}, [\tilde{x}_{kj}, \tilde{x}_{ji}]] - \frac{1}{24} [\tilde{x}_{ji}, [\tilde{x}_{kj}, [\tilde{x}_{ji}, \tilde{x}_{kj}]]] + \dots,$$

可以理解为相对位形指数坐标的高阶项。二阶动力学闭环相对系统中也存在相对速度的高阶项, 稍后将介绍。基于式(5.26), 第  $j$  个运载体系统的控制律由下式给定,

$$\tilde{u}_j = \sum_{k=1}^N \bar{a}_{jk} \left( c_1 \tilde{x}_{jk} + c_2 \tilde{\xi}_{jk}^r + [\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{kj}^l] \right). \quad (5.32)$$

将控制律(5.26)和(5.32)代入到变换后的相对动力学系统  $\tilde{\Sigma}_r$  中, 则闭环系统  $\tilde{\Sigma}_r$  重写为

$$\tilde{\Sigma}_{cl.} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_{ij} = \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{ij}} \tilde{\xi}_{ij}^l, \\ \dot{\tilde{\xi}}_{ij}^l = \sum_{k=1}^N \bar{a}_{jk} \left( c_1 \tilde{x}_{jk} + c_2 \tilde{\xi}_{jk}^r + [\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{kj}^l] \right) \\ \quad - \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \left( \sum_{k=1}^N \bar{a}_{ik} \left( c_1 \tilde{x}_{ik} + c_2 \tilde{\xi}_{ik}^r + [\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{ki}^l] \right) \right) - [\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{ij}^l]. \end{cases} \quad (5.33)$$

因此,  $\tilde{u}_{ij}$  可表达为

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{ij} &= c_1 \sum_{k=1}^N \left( \bar{a}_{jk} \tilde{x}_{jk} - \bar{a}_{ik} \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{x}_{ik} \right) + c_2 \sum_{k=1}^N \left( \bar{a}_{jk} \tilde{\xi}_{jk}^r - \bar{a}_{ik} \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{\xi}_{ik}^r \right) \\ &\quad + \left( \sum_{k=1}^N \left( \bar{a}_{jk} [\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{kj}^l] - \bar{a}_{ik} \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} [\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{ki}^l] \right) - [\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{ij}^l] \right).\end{aligned}\quad (5.34)$$

记

$$\begin{aligned}T_1 &\triangleq \sum_{k=1}^N \left( \bar{a}_{jk} \tilde{x}_{jk} - \bar{a}_{ik} \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{x}_{ik} \right), \\ T_2 &\triangleq \sum_{k=1}^N \left( \bar{a}_{jk} \tilde{\xi}_{jk}^r - \bar{a}_{ik} \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{\xi}_{ik}^r \right), \\ T_3 &\triangleq \left( \sum_{k=1}^N \left( \bar{a}_{jk} [\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{kj}^l] - \bar{a}_{ik} \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} [\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{ki}^l] \right) - [\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{ij}^l] \right).\end{aligned}$$

注意到  $\tilde{x}_{ii} = \mathbf{0}$ ,  $\tilde{\xi}_{ii}^l = \mathbf{0}$ ,  $[\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{ii}^l] = \mathbf{0}$  以及  $\sum_{j=1}^N \bar{a}_{ij} = 1$ 。则下文将分析这三项:  $T_1$ ,  $T_2$  和  $T_3$ 。

( $T_1$ ) 首先, 由式(5.31)  $\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{x}_{ki} = \tilde{x}_{ji} + \tilde{x}_{kj} + \text{higher order terms}, k \neq i$ , 得

$$T_1 = \sum_{k=1}^N (\bar{a}_{jk} \tilde{x}_{jk} + \bar{a}_{ik} \tilde{x}_{ji} + \bar{a}_{ik} \tilde{x}_{kj}) + \text{higher order terms}.$$

由式  $\sum_{j=1}^N \bar{a}_{ij} = 1$  以及(5.14)  $\tilde{x}_{ji} = -\tilde{x}_{ij}$ , 可得

$$T_1 = -(1 + \bar{a}_{ji}) \tilde{x}_{ij} + \sum_{k=1, k \neq i}^N (\bar{a}_{jk} - \bar{a}_{ik}) \tilde{x}_{jk} + \text{higher order terms}. \quad (5.35)$$

( $T_2$ ) 由式(5.29)  $\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{\xi}_{ik}^r = \tilde{\xi}_{ij}^l - \tilde{\xi}_{kj}^l$ ,  $T_2$  可重写为

$$T_2 = \sum_{k=1}^N \left( \bar{a}_{jk} \tilde{\xi}_{jk}^r - \bar{a}_{ik} \tilde{\xi}_{ij}^l + \bar{a}_{ik} \tilde{\xi}_{kj}^l \right).$$

利用等式  $\sum_{j=1}^N \bar{a}_{ij} = 1$ ,

$$T_2 = -\tilde{\xi}_{ij}^l + \bar{a}_{ji}\tilde{\xi}_{ji}^r + \sum_{k=1, k \neq i, j}^N (\bar{a}_{jk}\tilde{\xi}_{jk}^r + \bar{a}_{ik}\tilde{\xi}_{kj}^l).$$

由方程(5.19)  $\tilde{\xi}_{ik}^r = -\tilde{\xi}_{ki}^l$ ,

$$T_2 = -(1 + \bar{a}_{ji})\tilde{\xi}_{ij}^l + \sum_{k=1, k \neq i, j}^N (\bar{a}_{ik} - \bar{a}_{jk})\tilde{\xi}_{kj}^l.$$

( $T_3$ ) 由方程(5.29)  $\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}}\tilde{\xi}_{ik}^r = \tilde{\xi}_{ij}^l - \tilde{\xi}_{kj}^l$ , (5.19)  $\tilde{\xi}_{ik}^r = -\tilde{\xi}_{ki}^l$  以及  $\sum_{j=1}^N \bar{a}_{ij} = 1$ , 得  $T_3$  为

$$T_3 = \sum_{k=1}^N (\bar{a}_{jk}[\tilde{\xi}_j^l, \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}}\tilde{\xi}_{ki}^l] - \bar{a}_{ik}\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}}[\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{ki}^l]).$$

利用等式(5.30)  $\text{Ad}_{\tilde{g}}[\hat{\xi}_1^l, \hat{\xi}_2^l] = [\text{Ad}_{\tilde{g}}\hat{\xi}_1^l, \text{Ad}_{\tilde{g}}\hat{\xi}_2^l]$ ,  $T_3$  可重写为

$$T_3 = \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \sum_{k=1}^N (\bar{a}_{jk}[\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}}\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{ki}^l] - \bar{a}_{ik}[\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{ki}^l]),$$

进而有

$$T_3 = \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \sum_{k=1}^N ([\bar{a}_{jk}\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}}\tilde{\xi}_j^l - \bar{a}_{ik}\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{ki}^l]).$$

$T_1$  中的 “higher order terms” 是相对位形指数坐标的高阶项,  $T_3$  则是相对速度的高阶项。下面, 由  $\bar{a}_{ij}$  的取值对编队结果的影响, 我们将陈述通讯拓扑在相对动力学系统中的作用。主要结果介绍如下。

**定理 5.1:** 当  $N$  个运载体系统的通讯拓扑是完全图时, 在给定控制律(5.26)下, 多运载体系统(5.1)渐近达到指定编队(5.4)或等价编队(5.5)。

**证明:** 对于多个运载体系统, 当  $N = 2$  时, 设两个运载体分别由图上的节点 1 和 2 来表示, 此时完全图意味着两个运载体系统之间双向通信, 因此,  $\bar{a}_{12} = \bar{a}_{21}$ 。给定编队任务(5.4), 使用控制律(5.26), 则闭环系统  $\tilde{\Sigma}_{cl}$  中  $T_1$ ,  $T_2$  和  $T_3$  可表示

为:  $T_1 = -2c_1\tilde{x}_{12}$ ,  $T_2 = -2c_2\tilde{\xi}_{12}^l$  以及  $T_3 = \mathbf{0}$ 。即, 当  $N = 2$  时,  $T_1$  和  $T_3$  中的高阶项不存在, 取  $k_p = 2c_1$ ,  $k_d = 2c_2$ , 相对系统的闭环系统  $\tilde{\Sigma}_{cl}$  整理为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_{12} = \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{12}}\tilde{\xi}_{12}^l, \\ \dot{\tilde{\xi}}_{12}^l = -k_p\tilde{x}_{12} - k_d\tilde{\xi}_{12}^l. \end{cases} \quad (5.36)$$

由引理5.3 以及注5.1, 如果两个节点相对姿态的初值为歧义姿态, 那么当该相对姿态指定唯一的姿态时, 闭环系统全局收敛, 即, 两个节点达到渐近编队。

当  $N > 2$  时, 完全图意味着  $\bar{a}_{ij} = \frac{1}{(N-1)}$ , 其中,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ,  $i \neq j$ 。则有,

$$\begin{aligned} T_1 &= -(1 + \bar{a}_{ji})\tilde{x}_{ij} + \text{higher order terms}, \\ T_2 &= -(1 + \bar{a}_{ji})\tilde{\xi}_{ij}^l, \\ T_3 &= -\frac{1}{N-1} \left[ \sum_{k=1}^N \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{\xi}_{ki}^l, \tilde{\xi}_{ij}^l \right] \end{aligned}$$

当运载体系统趋近于指定编队时, 高阶项对系统收敛的影响小于线性项, 因此忽略高阶项的影响是合理的。在这个假设条件下, 设  $k_p = c_1(1 + \bar{a}_{ji})$ ,  $k_d = c_2(1 + \bar{a}_{ji})$ , 相对动力学系统的闭环系统  $\tilde{\Sigma}_{cl}$  为,

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_{ij} = \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{ij}}\tilde{\xi}_{ij}^l, \\ \dot{\tilde{\xi}}_{ij}^l = -k_p\tilde{x}_{ij} - k_d\tilde{\xi}_{ij}^l. \end{cases} \quad (5.37)$$

由引理5.3及注5.1, 可得控制律(5.26) 指数镇定状态  $\tilde{x}_{ij}$  和  $\tilde{\xi}_{ij}^l$  到  $\mathbf{0}$ 。此时, 多运载体系统  $\Sigma$  渐近达到给定编队, 该结果对于  $N > 2$  时是非全局的。 ■

**注 5.2:** 定理5.1中运载体系统在李群  $SE(3)$  上的结果同样适用于  $SE(2)$  情况。对于  $N > 2$  时完全图情况, 尽管编队收敛结果是非全局的, 但我们选择了多个初值进行仿真, 多运载体系统均达到渐近编队。这说明该控制律具有大范围的编队收敛性。

**注 5.3:** 系统(5.37)的平衡点是运载体的相对平衡点, 即运载体速度保持常量, 其时间导数为0, 它表明所有的运载体系统网络中个体能够以编队形式保持匀速直线运动, 或匀速原地旋转、匀速圆周运动, 或匀速螺旋运动, 更特殊地, 保

持静止。以 $g \in SE(2)$ 上单个动力学模型运载体(2.6)为例, 注意到,

$$\hat{\xi}^l = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $v_x$ 和 $v_y$ 是刚体坐标系下的线速度。当角速度 $\omega = 0$ 时,  $\hat{\omega} = \mathbf{0}_{2 \times 2}$ 。系统(2.6)的平衡点对应运载体个体的相对平衡点, 其运动有如下几种类型: (i) 当 $\omega \neq 0$ 以及 $v_x = v_y = 0$ , 个体系统在原地旋转; (ii) 当 $\omega \neq 0$ 以及 $v_x, v_y$ 中的一个等于0, 个体系统将在平面上做圆周运动; (iii) 当 $\omega \neq 0$ 以及 $v_x \neq 0, v_y \neq 0$ 时, 个体系统在平面上做螺旋线运动; (iv) 当 $\omega = 0$ 以及 $v_x, v_y$ 中至少有1个为0时, 个体系统做直线运动。特别地, 当 $\omega = 0$ 以及 $v_x = v_y = 0$ 时, 个体系统保持静止。

定理5.1中考虑了完全图, 它是有向边最多的有向连通图, 下面我们介绍树状图, 即有向边最少的有向连通图的结果。

**定理 5.2:** 如果 $N$ 个运载体系统(5.1)的通讯拓扑图是树状图, 在控制律(5.26)下, 多运载体系统渐近达到给定编队(5.5)。

**证明:** 如果 $N$ 个运载体系统(5.1)的通讯拓扑图是树状图, 如图5.1所示(和第4章中的图4.1相同), 则相邻两个运载体系统的相对动力系统可由 $\tilde{\Sigma}_r$ 描述。使用控

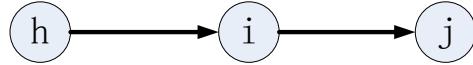


图 5.1 树状通讯拓扑图(抽象)

制律(5.26), 可得

$$\tilde{u}_i = \bar{a}_{ih}(c_1\tilde{x}_{ih} + c_2\tilde{\xi}_{ih}^r + [\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{hi}^l]) \quad (5.38)$$

以及

$$\tilde{u}_j = \bar{a}_{ji}(c_1\tilde{x}_{ji} + c_2\tilde{\xi}_{ji}^r + [\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{ij}^l]). \quad (5.39)$$

将控制律(5.38)和(5.39)代入到相对动力系统 $\tilde{\Sigma}_r$ 的第二个式子, 则 $\dot{\tilde{\xi}}_{ij}^l$ 重写为

$$c_1(\bar{a}_{ji}\tilde{x}_{ji} - \bar{a}_{ih}\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}}\tilde{x}_{ih}) + c_2(\bar{a}_{ji}\tilde{\xi}_{ji}^r - \bar{a}_{ih}\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}}\tilde{\xi}_{ih}^r) + \bar{a}_{ji}[\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{ij}^l] - \bar{a}_{ih}\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}}[\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{hi}^l] - [\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{ij}^l]. \quad (5.40)$$

这里我们假设 $h$ 是不固定的( $h = i$ 或 $h < i$ )。因此,  $\bar{a}_{ih} = a_{ih} = 1$ ,  $\bar{a}_{ji} = a_{ji} = 1$ 。

由式(5.31)  $\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{x}_{ki} = \tilde{x}_{ji} + \tilde{x}_{kj} + \text{higher order terms}, k \neq i$ , (5.29)  $\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{\xi}_{ik}^r = \tilde{\xi}_{ij}^l - \tilde{\xi}_{kj}^l$  和式(5.19)  $\tilde{\xi}_{ik}^r = -\tilde{\xi}_{ki}^l$ , 可得

$$\dot{\tilde{\xi}}_{ij}^l = c_1(-2\tilde{x}_{ij} + \tilde{x}_{hj} + \text{higher order terms}) + c_2(-2\tilde{\xi}_{ij}^l + \tilde{\xi}_{hj}^l) + [\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{ij}^l] - \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} [\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{hi}^l] - [\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{ij}^l].$$

当 $h = i$ 时,  $i$ 代表根节点, 此时高阶项不存在。由 $\tilde{x}_{ii} = \mathbf{0}$ 以及 $\tilde{\xi}_{ii}^l = \mathbf{0}$ , 可得

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_{ij} = \mathcal{B}_{-\tilde{x}_{ij}} \tilde{\xi}_{ij}^l, \\ \dot{\tilde{\xi}}_{ij}^l = -c_1 \tilde{x}_{ij} - c_2 \tilde{\xi}_{ij}^l. \end{cases} \quad (5.41)$$

否则, 当 $h < i$ 时, 首先我们可以推导出 $\tilde{x}_{hi} \rightarrow \mathbf{0}$ 以及 $\tilde{\xi}_{hi} \rightarrow \mathbf{0}$ , 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $\tilde{g}_h \rightarrow \tilde{g}_i$ 和 $\text{Ad}_{\tilde{g}_{hi}^{-1}} \tilde{\xi}_h^l \rightarrow \tilde{\xi}_i^l$ 。接着, 我们推导出当 $t \rightarrow \infty$ 时 $\tilde{x}_{hj} = \log(\tilde{g}_h^{-1} \tilde{g}_j) \rightarrow \log(\tilde{g}_i^{-1} \tilde{g}_j) = \tilde{x}_{ij}$ 以及 $\tilde{\xi}_{hj}^l = \tilde{\xi}_j^l - \text{Ad}_{\tilde{g}_{hj}^{-1}} \tilde{\xi}_h^l \rightarrow \tilde{\xi}_j^l - \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{\xi}_i^l = \tilde{\xi}_{ij}^l$ 。记 $T_e = \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} [\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{hi}^l]$ , 由相对速度的定义,

$$\begin{aligned} T_e &= \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} [\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{hi}^l] \\ &= \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} (\tilde{\xi}_i^l \tilde{\xi}_{hi}^l - \tilde{\xi}_{hi}^l \tilde{\xi}_i^l) \\ &= \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} (\tilde{\xi}_i^l (\tilde{\xi}_i^l - \text{Ad}_{\tilde{g}_{hi}^{-1}} \tilde{\xi}_h^l) - (\tilde{\xi}_i^l - \text{Ad}_{\tilde{g}_{hi}^{-1}} \tilde{\xi}_h^l) \tilde{\xi}_i^l) \\ &= \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} (\text{Ad}_{\tilde{g}_{hi}^{-1}} \tilde{\xi}_h^l \tilde{\xi}_i^l - \tilde{\xi}_i^l \text{Ad}_{\tilde{g}_{hi}^{-1}} \tilde{\xi}_h^l). \end{aligned}$$

基于以上分析, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,  $\text{Ad}_{\tilde{g}_{hi}^{-1}} \tilde{\xi}_h^l \rightarrow \tilde{\xi}_i^l$  ( $\tilde{\xi}_{hi} \rightarrow \mathbf{0}$ )。此时有,  $T_e \rightarrow \mathbf{0}$ 。基于和定理5.1中同样的线性项逼近, 可得到非全局的收敛结果。此时, 系统 $\tilde{\Sigma}_r$ 可重新写为式(5.41)。由引理5.3通过归纳得, 多运载体系统在树状通讯拓扑图下渐近收敛到指定编队队形。 ■

**注 5.4:** 树状图的根节点可以视为领导者(leader)。在实际应用中, 多运载体网络中个体最终的位形和速度将根据编队任务和领导者的运动轨迹来决定。并且这个领导者甚至可以是虚拟的, 参考轨迹可由外部信号产生。

### 5.2.2 编队跟踪控制

本小节考虑 $N$ 个运载体 $\Sigma$ 和1个全局 leader  $\Sigma_o$ 所组成的运载体网络的编队跟踪问题。假设(1)每个运载体都是全驱动的, 即独立控制的维数等于运载体位

形空间的维数; (2)通讯拓扑为树状图, 且全局 leader  $\Sigma_o$  为根节点; (3)当相对姿态初值为歧义姿态时, 指定一个确切的姿态。沿用本章所定义的变量符号和记号, 我们给出如下编队跟踪控制律:

$$\tilde{u}_i^l = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (c_1 \tilde{x}_{ij} + c_2 \tilde{\xi}_{ij}^r + [\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{ji}^l] + \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}}(\dot{\tilde{\xi}}_j^l)), \quad (5.42)$$

其中,  $\mathcal{N}_i$  是  $i$  节点的邻居节点集合, 这些节点给节点  $i$  传递信息。由于我们假设通讯拓扑为树状图, 因此每一条有向边定义了一对leader-follower关系,  $N+1$  个节点的编队跟踪可以通过实现  $N$  对两节点的一致性控制来实现。我们有如下定理。

**定理 5.3:** 使用控制律(5.42),  $N$  个运载体  $\Sigma$  渐近地以编队形式(5.6) 跟踪全局 leader  $\Sigma_o$ 。

**证明:** 基于树状通讯拓扑图, 不失一般性, 假设节点  $i$  的唯一父节点为节点  $j$ , 即  $a_{ij} = 1, i \neq j$ , 节点  $j$  也可以是全局 leader。将控制律(5.42)代入相对系统  $\tilde{\Sigma}_o$ (5.23), 则相对速度(变换系统形式)的等式整理为

$$\dot{\tilde{\xi}}_{ij}^l = \tilde{u}_j^l - \dot{\tilde{\xi}}_j^l - [\tilde{\xi}_j^l, \tilde{\xi}_{ij}^l] - \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (c_1 \tilde{x}_{ij} + c_2 \tilde{\xi}_{ij}^r + [\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{ji}^l]) \right) \quad (5.43)$$

由引理5.4, 等式(5.21)以及  $\dot{\tilde{\xi}}_j^l = \tilde{u}_j^l$ , 可得

$$\dot{\tilde{\xi}}_{ij}^l = -c_1 \tilde{x}_{ij} - c_2 \tilde{\xi}_{ij}^l. \quad (5.44)$$

因此, 相对位形和相对速度的动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{g}}_{ij} &= \tilde{g}_{ij} \dot{\tilde{\xi}}_{ij}^l, \\ \dot{\tilde{\xi}}_{ij}^l &= -c_1 \tilde{x}_{ij} - c_2 \tilde{\xi}_{ij}^l. \end{aligned} \quad (5.45) \quad \blacksquare$$

由引理5.3, 系统(5.45)渐近收敛到平衡点  $\tilde{g}_{ij} = I$  以及  $\tilde{\xi}_{ij}^l = \mathbf{0}$ , 即, 基于一条有向边联系的任意两个运载体其变换系统渐近达到了一致性。因为  $j$  也可以取全局

领导者 $o$ , 因此,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_{io}(t) \rightarrow \bar{g}_{io} \text{ and } \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\xi}_r^l(t) - \text{Ad}_{g_{io}^{-1}(t)} \hat{\xi}_i^l(t) = \mathbf{0}.$$

当 $\bar{g}_{io}$ (或 $\bar{g}_{oi}$ )由编队跟踪任务指定时,  $\bar{g}_{ij} \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} g_{ij}(t) = (\bar{g}_{oi})^{-1}(\bar{g}_{oj})$ 同时确定。因此, 使用控制律(5.42),  $N$ 个运载体实现了以编队形式跟踪全局 leader  $\Sigma_o$ 。

**注 5.5:** 本小节编队跟踪问题所涉及的编队队形是刚性的, 它在整体平移运动同时可以进行旋转。编队队形可以根据任务任意指定。同时,  $N$ 个运载体的运动沿着全局领导者运载体的轨迹前进, 因而实现了跟踪, 不再是依赖于动力系统相对平衡点固定形式的运动。

**注 5.6:** 本章内容主要针对 $SE(3)$ 的动力学模型展开的, 但结论同样适用于 $SE(2)$ 情形。

### 5.3 仿真

本小节给出数值仿真示例。为了简便, 我们考虑 $SE(2)$ 上3个运载体系统(5.1), 这里 $i = 1, 2, 3$ 。

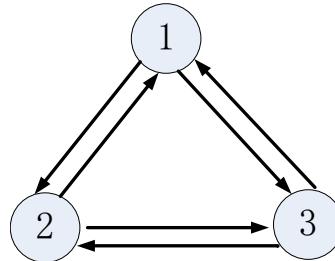


图 5.2 3个节点的完全通讯拓扑图

**例1.**首先给出一个完全图编队控制的例子。完全图如图5.2所示。3个节点的初始位形和初始速度给定为

$$g_1(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, g_2(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 43 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, g_3(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 30 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 5.3. 仿真

以及

$$\hat{\xi}_1^l(0) = \hat{\xi}_2^l(0) = \mathbf{0}, \hat{\xi}_3^l(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 10 \\ -0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

指定编队队形:

$$\bar{g}_{11}^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{g}_{12}^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{g}_{13}^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

则, 编队队形的几何形式为一个三角。设常数控制增益  $c_1 = c_2 = 5$ 。节点随时间的运动轨迹如图5.3所示, 在设计的控制律下, 多运载系统渐近地保持编队队形并做匀速圆周运动。多运载体系统的状态如图5.4所示, 它是基于我们搭建的Simulink仿真模块输出来绘制的, 参考附录C。

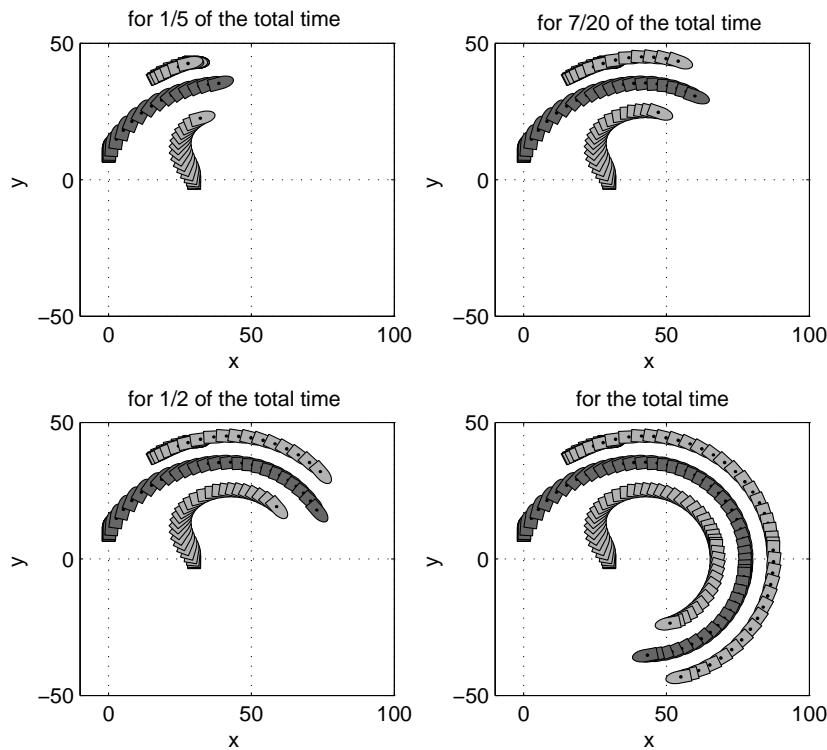


图 5.3  $SE(2)$ 上动力学节点带有姿态的运动轨迹图(完全图, 4个子图按顺序分别为 $1/5$ ,  $7/20$ ,  $1/2$ 以及全部仿真时间的各节点运动轨迹图)

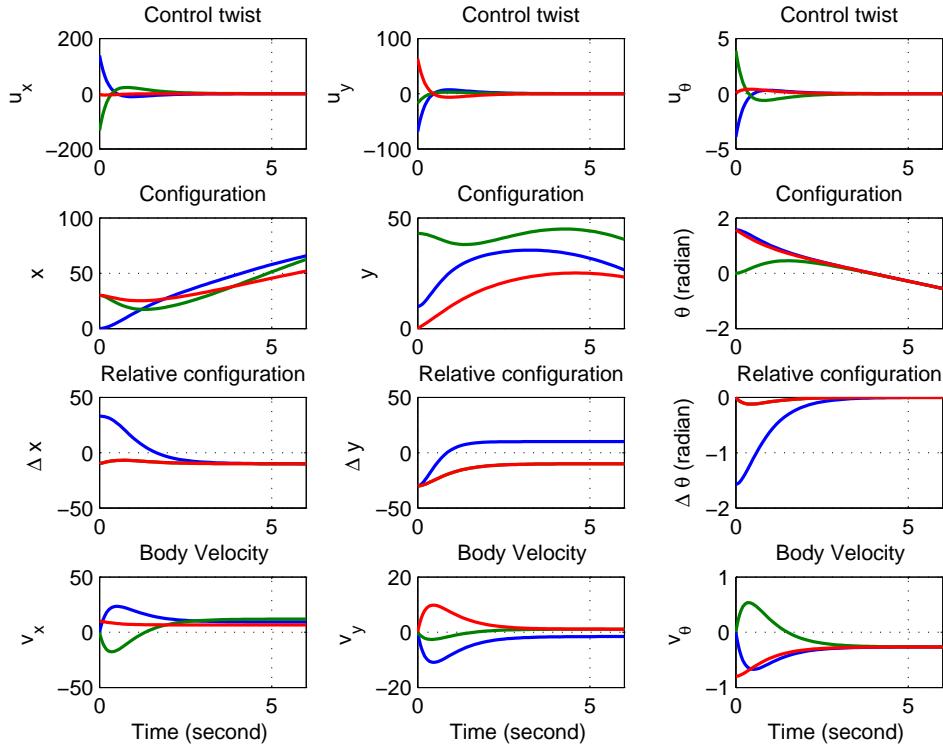


图 5.4 动力学节点状态与控制(完全图)。从上到下：节点的控制输入，位形，相对位形(相对于节点1)以及本体速度；从左到右：关于  $x$ ,  $y$  坐标以及姿态  $\theta$  坐标。

**例2.** 然后给出一个树状图编队控制的例子，其中树状图如图5.1所示。设  $h = 1, i = 2, j = 3$  分别表示第1个，第2个和第3个运载体系统。3个节点的初始位形和初始速度分别为(设  $c_\theta = \cos(\frac{\pi}{4}), s_\theta = \sin(\frac{\pi}{4})$ )

$$g_1(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, g_2(0) = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 30 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, g_3(0) = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 10 \\ s_\theta & c_\theta & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以及

$$\hat{\xi}_1^l(0) = \hat{\xi}_2^l(0) = \hat{\xi}_3^l(0) = \mathbf{0}.$$

### 5.3. 仿真

指定编队队形为

$$\bar{g}_{11}^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{g}_{12}^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{g}_{13}^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

因此编队队形的几何形式为一条直线。

设常数控制增益为  $c_1 = c_2 = 15$ 。在本章所设计的控制律下，节点随时间的运动轨迹如图5.5所示，多个运载体系统最终保持给定队形渐近达到静止。运载体系统的各个状态值如图5.6所示。

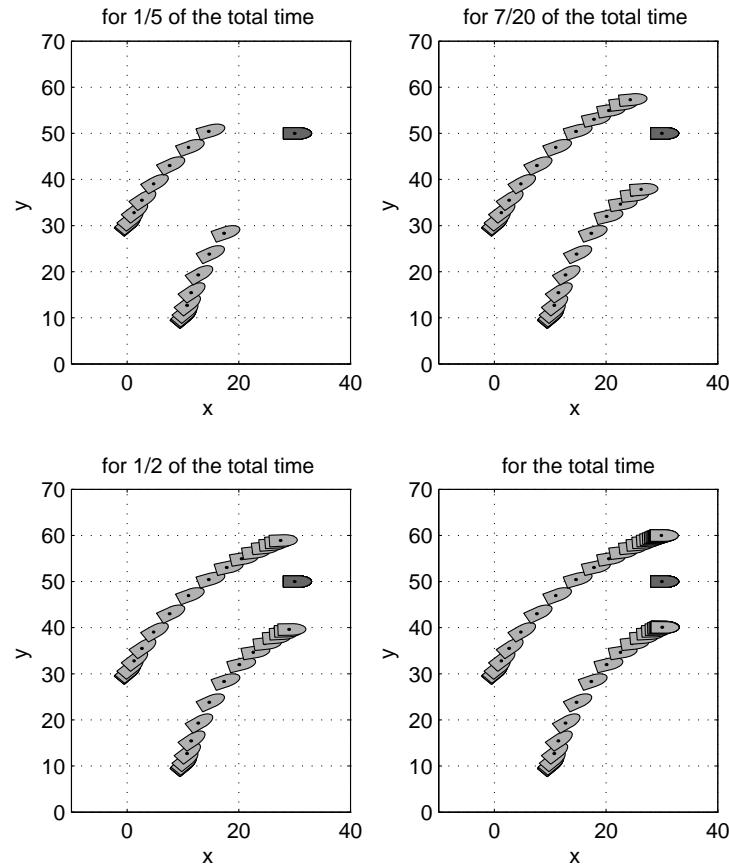


图 5.5  $SE(2)$ 上动力学节点带有姿态的运动轨迹(树状图，4个子图按顺序分别为1/5, 7/20, 1/2 以及全部仿真时间的运动轨迹)

例3. 最后给出一个编队跟踪的例子。考虑4个节点 $\Sigma$ 以编队形式跟踪1个全局

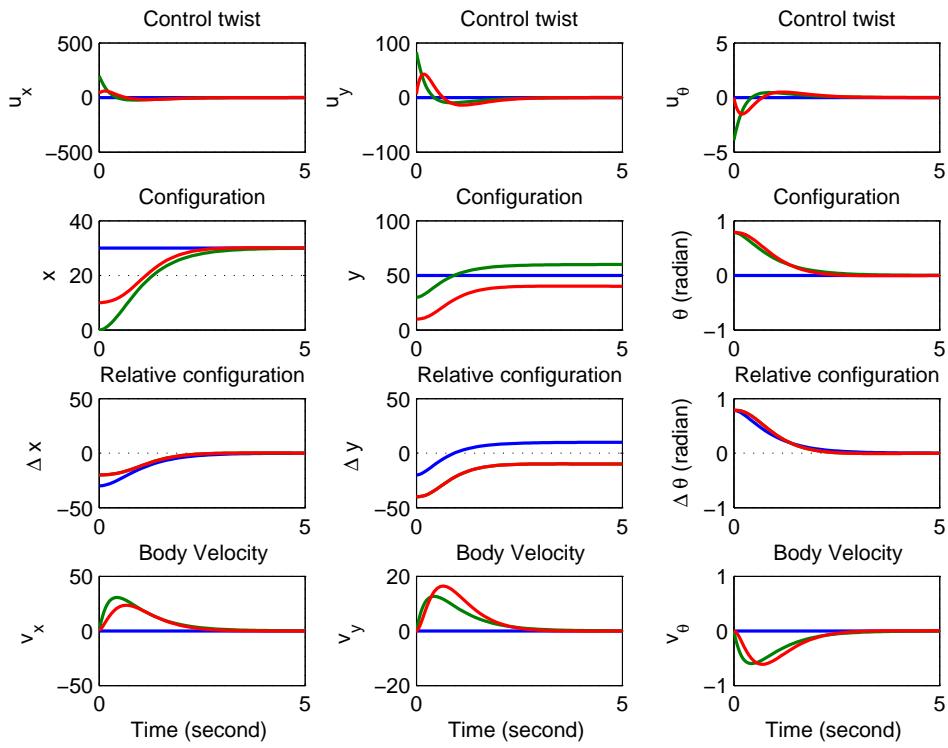


图 5.6 动力学节点状态与控制(树状图)。由上到下：节点的控制输入，位形，相对位形(关于节点1)以及速度；从左到右：关于  $x$ ,  $y$  坐标以及姿态  $\theta$  坐标。

表 5.1 编队跟踪节点初值

node	$x_0$	$y_0$	$\theta_0$	$v_{x0}$	$v_{y0}$	$\omega_0$
o	0	0	0	10	0	0.04
1	-100	500	$-(\pi/4)$	0	0	0
2	-500	250	0	0	0	0
3	-500	0	0	0	0	0
4	-500	-250	$\pi/4$	0	0	0

leader,  $\Sigma_o$ , 给定通讯拓扑如图5.7所示。给定4个节点的初值如表5.1所示，其中  $x_0$ ,  $y_0$  是初始位置,  $\theta_0$ 是初始姿态;  $v_{x0}$ ,  $v_{y0}$ 是节点关于  $x$ 坐标,  $y$ 坐标的初始速度,  $\omega_0$ 是初始角速度。

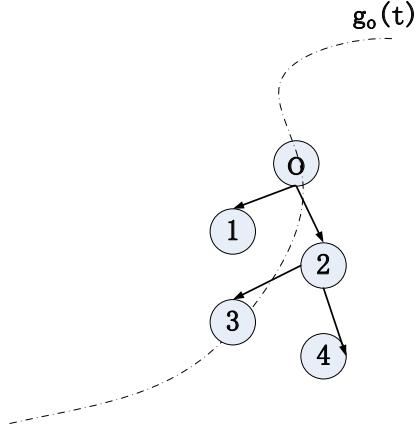


图 5.7 跟踪轨迹及树状通讯拓扑示意图

给定编队队形  $\bar{g}_{o1}, \bar{g}_{o2}, \bar{g}_{o3}, \bar{g}_{o4}$ ,

$$\begin{aligned}\bar{g}_{o1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -150 \\ 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{g}_{o2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \bar{g}_{o3} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -150 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{g}_{o4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -150 \\ 0 & 1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

注意到  $\bar{g}_{o2} = I$ , 说明节点2以达到一致的方式渐近跟踪上全局 leader。全局 leader 的控制输入  $u_o$  是事先指定的, 这里假设为

$$u_o = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(0.1 \times t) & 100 \\ \sin(0.1 \times t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中  $t$  是时间。则使用编队跟踪控制律(5.42) (设  $c_1 = c_2 = 10$ ),  $N$  个 follower 运载体以编队形式渐近跟踪全局 leader, 各节点的运动轨迹如图5.8所示。各节点

状态和控制的时间行为如图5.9所示。

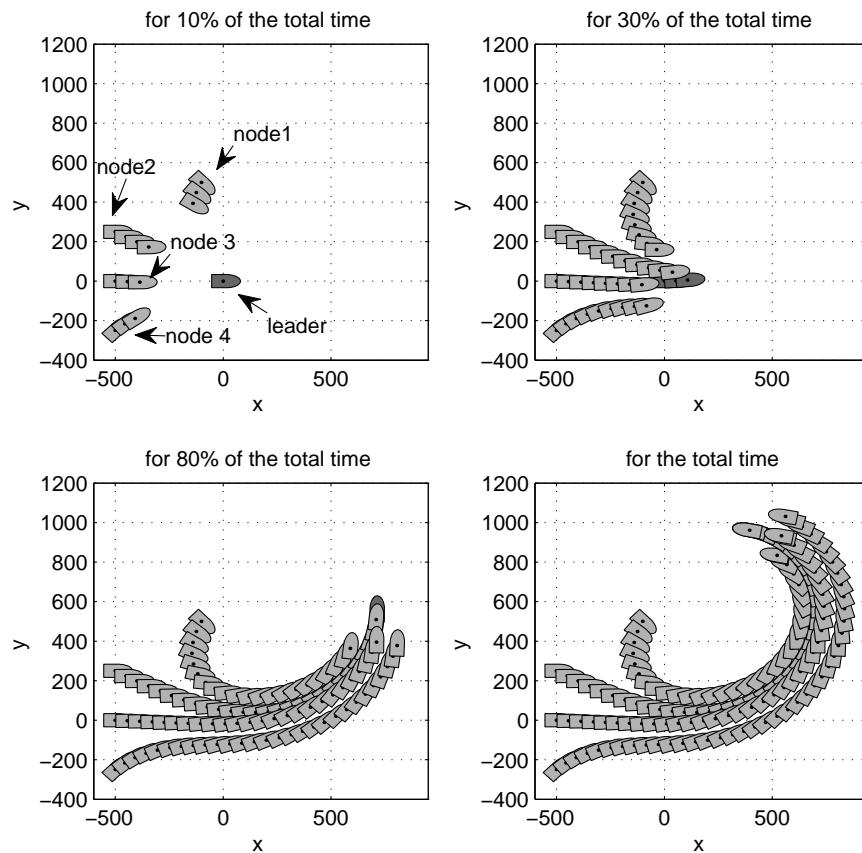


图 5.8 编队跟踪问题节点的运动轨迹，4个子图按顺序分别为10%，30%，80% 以及全部仿真时间的运动轨迹。

### 5.3. 仿真

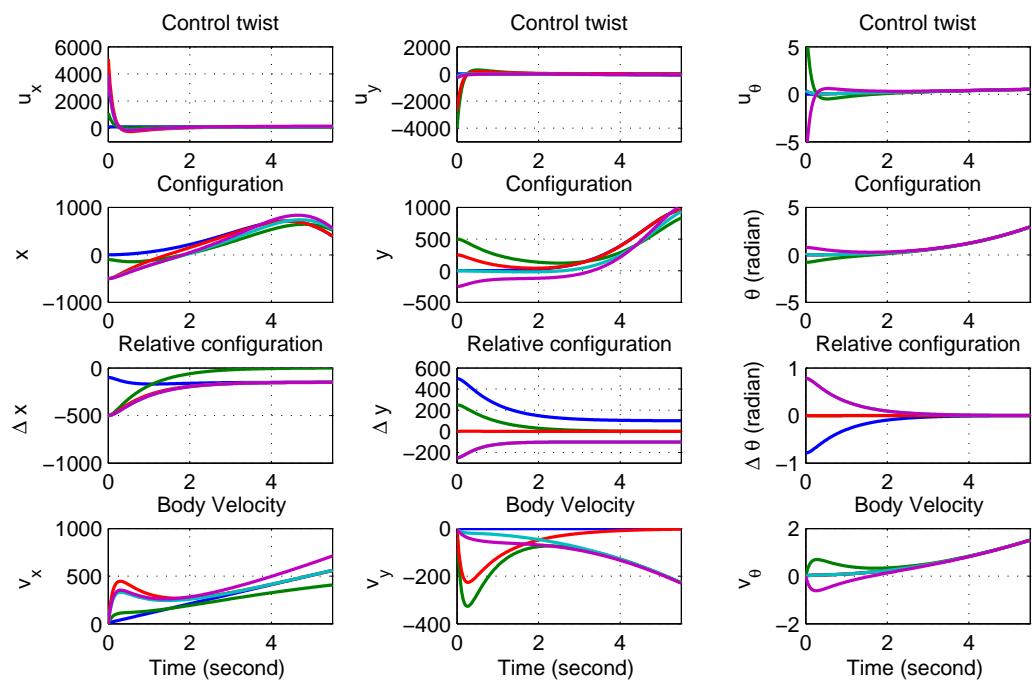


图 5.9 编队跟踪问题节点状态与控制，由上到下：节点的控制输入，位形，相对位形(关于全局 leader ) 以及本体速度；从左到右：关于  $x$ ,  $y$  坐标以及姿态  $\theta$  坐标。

## 结 论

多运载体一致性和编队的渐近运动是近些年来协同控制领域新兴的研究课题，其研究地位和价值日益显著。在近几年，国内外很多学者都参与到此项研究行列，涌现了大量相关科技文献，获得了很多有意义的成果。一致性和编队的研究内容也因此得到了极大的扩充。本文主要针对以下几个方面开展了较为深入的研究：

1. 通讯带宽受限时多运载体的一致性控制和编队控制。为了解决多运载体通讯带宽受限，本文采用了量化通讯的办法。定义了一致性水平概念，并设计了均匀量化器。依据次优方法和多运载体系统相对初值，分配了总数据通讯带宽。本文指出，动态调整均匀量化器的量化步长参数能有效地减小量化对一致性的影响，从而提高一致性水平。

2. 多运载体刚体运动学模型的一致性控制和编队控制。为了描述运载体的位置和姿态，我们采用了欧氏群 $SE(2)$ 和 $SE(3)$ 上全驱刚体运动学模型。针对一致性控制目标，本文设计了对数反馈控制律，并将该一致性控制方法推广为任意给定刚性队形的编队控制。本文将欧氏群 $SE(2)$ 和 $SE(3)$ (李群)两个非线性流形上的一致性控制、编队控制问题转化为其各自相关李代数两个线性空间里的系统镇定问题；指出，在树状、完全的通讯拓扑条件下，两个运载体达到全局渐近一致性、编队，多个运载体达到非全局渐近一致性、编队；同时指出，在环形通讯拓扑条件下，多运载体达到渐近一致性和指定编队队形受运载体初值的影响。

3. 多运载体刚体动力学模型的一致性控制和编队控制。在树状、完全通讯拓扑下，针对刚体动力学模型一致性控制目标，本文设计了比例微分反馈控制律，并推广为任意给定刚性队形的编队控制。主要方法是利用 $SE(2)$ 和 $SE(3)$ 上刚体模型的位形空间具有对称性，将多运载体系统满足相对构形约束(编队队形)下的本体速度同步问题转化为多运载体相对动力学系统的平衡点镇定问题；并描述了多运载体系统达到一致性和编队时的整体运动形式：静止，直线运动，旋转运动(分为原地旋转和圆周运动)，螺旋运动。在树状通讯拓扑下，所设计的编队跟踪控制律，实现了多个动力学运载体以编队形式跟踪全局领导者运载体。

为了进一步深入研究多运载体的协同控制理论，尚有许多问题有待解决，

例如

(1)考虑更复杂的个体模型。本文中将个体建模为简单的一阶积分器，以及相对复杂的刚体运动学模型、动力学模型，但并未涉及到运载体力学系统中力的表述。并且，本文假设个体模型是全驱的，即独立控制的维数等于系统位形空间的维数，不涉及独立控制的维数少于系统位形空间维数的约束，即欠驱动约束。同时，本文刚体模型是自由刚体，不涉及非完整约束。基于欠驱动和非完整模型的协同渐近刚性编队控制和一致性控制目前研究成果还比较少，因此，还有大量的工作需要去做。

(2)考虑更复杂的或者具有实际应用背景的通信拓扑模型。在实际通信中，除了通讯带宽受限，还可能受到诸如丢包、时滞、间歇通讯、时变通讯等特殊条件的约束，在这些约束下的协同渐近控制，将面临更多挑战。

(3)本文考虑的协同渐近一致性和编队控制，均为渐近控制。假定多运载体对达到控制目标有时间限制，那么设计和分析针对有限时间完成协同目标的控制律将使得理论更具有实际意义。

(4)如何把一致性和编队控制的理论结果推广、应用到更多其它工程应用领域中去，如编队队形变换、编队跟踪并防止运载体运动时碰撞等任务。

(5)当多运载体网络受到各类干扰时，如何保证系统的鲁棒性，使得系统整体收敛性能保持稳定。

上述问题及其它相关问题的研究和解决将使我们对协同渐近控制理论有更为深刻的认识。由于作者学识所限，缺点、讹误在所难免，恳请诸位专家、同行批评指正。作者在此表示衷心感谢。

## 参考文献

- [1] M. H. DeGroot. Reaching a consensus[J]. *Journal of American Statistical Association*. 1974, **69**(345):118–121
- [2] V. Borkar, P. Varaiya. Asymptotic agreement in distributed estimation[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1982, **27**(3):650–655
- [3] J. Tsitsiklis, M. Athans. Convergence and asymptotic agreement in distributed decision problems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1984, **29**(1):42–50
- [4] C. W. Reynolds. Flocks, herds, and schools: A distributed behavioral model[J]. *Computer Graphics*. 1987, **21**(4):25–34
- [5] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, O. Shochet. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. *Physical Review Letters*. 1995, **75**(6):1226–1229
- [6] V. Gazi, K. M. Passino. Stability analysis of swarms[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2003, **48**(4):692–697
- [7] R. Olfati-Saber, R. M. Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2004, **49**(9):1520–1533
- [8] J. A. Fax, R. M. Murray. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2004, **49**(9):1465–1476
- [9] G. Lafferriere, A. Williams, J. Caughman, J. J. P. Veerman. Decentralized control of vehicle formations[J]. *Systems & Control Letters*. 2005, **54**(9):899–910
- [10] R. Olfati-Saber. Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2006, **51**(3):401–420
- [11] J. Cortés. Finite-time convergent gradient flows with applications to network consensus[J]. *Automatica*. 2006, **42**(11):1993–2000
- [12] F. Cucker, S. Smale. Emergent behavior in flocks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2007, **52**(5):852–862
- [13] H. Min, Y. Liu, S. Wang, F. Sun. An overview on coordination control problem of multi-agent system[J]. *Acta Automatica Sinica*. 2012, **38**(10):1557–1570
- [14] R. M. Murray. Recent research in cooperative control of multi-vehicle systems[J]. *Trans ASME, Journal of dynamic systems, measurement, and control*. 2007, **129**(5):571–583

- [15] M. Mesbahi. On state-dependent dynamic graphs and their controllability properties[C]. in Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control. 2004, 2473–2478
- [16] M.Porfiri, D. G. Roberson, D.J.Stilwell. Tracking and formation control of multiple autonomous agents: A two-level consensus approach[J]. *Automatica*. 2007, **43**(8):1318–1328
- [17] W. Ren, Y. Cao. Distributed coordination of multi-agent networks: Emergent problems, models, and issues[M]. *Communications and Control Engineering*, Springer, 2011
- [18] W. Yu, G. Chen, M. Cao, J. Kurths. Second-order cosensus for multi-agent systems with directed topologies and nonlinear dynamics[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B*. 2010, **40**(3):881–891
- [19] H. Jiang, Q. Bi, S. Zheng. Impulsive consensus in directed networks of identical nonlinear oscillators with switching topologies[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2012, **17**(1):378–387
- [20] W. Ren, R. W. Beard. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2005, **50**(5):655–661
- [21] Q. Song, J. Cao, W. Yu. Second-order leader-following consensus of nonlinear multi-agent systems via pinning control[J]. *Systems & Control Letters*. 2010, **59**(9):553–562
- [22] Y. Liu, Y. Jia. Leader-following consensus protocol for second-order multi-agent systems using neural networks[C]. in proceedings of the 27th Chinese control conference. 2008, 535–539
- [23] M. Porfiri, D.G. Roberson, D.J. Stilwell. Tracking and formation control of multiple autonomous agents: A two-level consensus approach[J]. *Automatica*. 2007, **43**(8):1318–1328
- [24] D. H. S. Maithripala, J.M. Berg, W. P. Dayawansa. Almost-global tracking of simple mechanical systems on a general class of Lie groups[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2006, **51**(2):216–225
- [25] Dimos V. Dimarogonas, Karl H. Johansson. Stability analysis for multi-agent systems using the incidence matrix: Quantized communication and formation control[J]. *Automatica*. 2010, **46**(4):695–700
- [26] A. Jadbabaie, J. Lin, A. S. Morse. Coordination of groups of mobile autonomous agents using neares neighbor rules[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2003, **48**(9):988–1001
- [27] W. Ren, E. Atkins. Second-order consensus protocols in multiple vehicle systems with local interactions[C]. In AIAA guidance, navigation, and control conference. San Francisco, CA, 2005

- [28] W. Yu, G. Chen, M. Cao. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems[J]. *Automatica*. 2010, **46**(6):1089–1095
- [29] W. Ren, K. Moore, Y. Chen. High-order consensus algorithms in cooperative vehicle systems[C]. in Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control. 2006, 457–462
- [30] Z. Li, X. Liu, P. Lin, W. Ren. Consensus of linear multi-agent systems with reduced-order observer-based protocols[J]. *Systems & Control Letters*. 2011, **60**(7):510–516
- [31] J. H. Seo, H. Shim, J. Back. Consensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: Low gain approach[J]. *Automatica*. 2009, **45**(11):2659 –2664
- [32] H. Su, G. Chen, X. Wang, Z. Lin. Adaptive second-order consensus of networked mobile agents with nonlinear dynamics[J]. *Automatica*. 2011, **47**(2):368–375
- [33] J. Mei, W. Ren, G. Ma. Distributed coordinated tracking with a dynamic leader for multiple Euler-Lagrange systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2011, **56**(6):1415 – 1421
- [34] D. V. Dimarogonas, K. J. Kyriakopoulos. On the rendezvous problem for multiple nonholonomic agents[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2007, **52**(5):916–922
- [35] J. R. Lawton, R. W. Beard. Synchronized multiple spacecraft rotations[J]. *Automatica*. 2002, **38**(8):1359–1364
- [36] R. M. Murray, Z. Li, S. S. Sastry. A mathematical introduction to robotic manipulation[M]. CRC Press, 1994
- [37] A. Sarlette, R. Sepulchre, N. Leonard. Cooperative attitude synchronization in satellite swarms: A consensus approach[C]. in Proc. 17th IFAC Symp. Autom. Control Aerosp. 2007
- [38] A. Sarlette, S. Bonnabel. Coordinated motion design on Lie groups[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2010, **55**(5):1047–1058
- [39] R. Sepulchre, D. Paley, N. Leonard. Stabilization of planar collective motion with limited communication[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2008, **53**(3):706–719
- [40] R. Sepulchre. Consensus on nonlinear spaces[J]. *Annual Reviews in Control*. 2011, **35**(1):56–64
- [41] H.Tomohisa, M.Takuji, H.Shinji. Formation control of multi-agent sytems with sampled information[C]. 2006, 4333–4338

- [42] W. Dong, Y. Guo, J. A. Farrell. Formation control of nonholonomic mobile robots[C]. in Proceedings of the 2006 American Control Conference. 2006, 5602–5607
- [43] F. Xiao, L. Wang, J. Chen, Y. Gao. Finite-time formation control for multi-agent systems[J]. Automatica. 2009, **45**(11):2605–2611
- [44] K.D.Do. Practical formation control of multiple underactuated ships with limited sensing ranges[J]. Robotics and Autonomous Systems. 2011, **59**(6):457–471
- [45] Y. Liu, Y. Jia. An iterative learning approach to formation control of multi-agent systems[J]. Systems & Control Letters. 2012, **61**(8):148–154
- [46] K. D. Listmann, M. V. Masalawala, J. Adamy. Consensus for formation control of nonholonomic mobile robots[C]. in Proceedings of 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2009, 3886–3891
- [47] T. C. Aysal, M. J. Coates, M. G. Rabbat. Distributed average consensus with dithered quantization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 2008, **56**(10):4905–4918
- [48] R. Carli, S. Zampieri. Efficient quantization in the average consensus problem[J]. Advances in Control Theory and Applications. 2007, **353**:31–49
- [49] M. Franceschelli, A. Giua, C. Seatzu. Load balancing on networks with gossip-based distributed algorithms[C]. In Proceedings of the 46th IEEE conference on decision and control. New Orleans, Louisiana USA, 2007, 500–505
- [50] R. Carli, F. Fagnani, A. Speranzon, S. Zampieri. Communication constraints in the average consensus problem[J]. Automatica. 2008, **44**(3):671–684
- [51] T. C. Aysal, M. J. Coates, M. G. Rabbat. Distributed average consensus using probabilistic quantization[J]. In IEEE/SP 14th workshop on statistical signal processing. 2007:640–644
- [52] R. Carli, F. Fagnani, P. Frasca, S. Zampieri. Gossip consensus algorithms via quantized communication[J]. Automatica. 2010, **46**(1):70–80
- [53] M. Zhu, S. Martinez. On the convergence time of distributed quantized averaging algorithms[C]. In 47th IEEE conference on decision and control. Cancun, Mexico, 2008, 3971–3976
- [54] J. Lavaei, R. M. Murray. On quantized consensus by means of gossip algorithm–Part I: convergence proof[C]. In proceedings of American control conference. St. Louis, MO, USA, 2009, 394–401
- [55] J. Lavaei, R. M. Murray. On quantized consensus by means of gossip algorithm–Part II: convergence time[C]. In proceedings of American control conference. St. Louis, MO, USA

- [56] S. Boyd, A. Ghosh, B. Prabhakar, D. Shah. Randomized gossip algorithms[J]. IEEE Transactions on Information Theory. 2006, **52**(6):2508–2530
- [57] M. Franceschelli, A. Giua, C. Seatzu. A Gossip-based algorithm for discrete consensus over heterogeneous networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 2010, **55**(5):1244–1249
- [58] M. Franceschelli, A. Giua, C. Seatzu. Hamiltonian quantized gossip[C]. In Proceedings of 2009 IEEE multi-conference on systems and control. St. Petersburg, Russia, 2009, 648–654
- [59] Kashay, T. Basar, R. Srikant. Quantized consensus[J]. Automatica. 2007, **43**(7):1192–1203
- [60] F.Bullo, D.Liberzon. Quantized cobtrol via locational optimization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 2006, **51**(1):2–13
- [61] T. Li, M. Fu, L. Xie, J. F. Zhang. Distributed consensus with limited communication data rate[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 2011, **56**(2):279–292
- [62] G.N.Naire, R.J.Evans. Exponential stabilisability of finite-dimensional linear systems with limited data rates[J]. Automatica. 2003, **39**(5):85–93
- [63] A. Gersho, R.M. Gray. Vector quantization and signal compression[M]. Kluwer Academic, 1991
- [64] R. Carli, F. Fagnani, P. Frasca, S. Zampieri. A probabilistic analysis of the average consensus algorithm with quantized communication[C]. in Proceedings of the 17th IFAC World Congress. 2008, 8062–8067
- [65] A.Censi, R.M. Murray. Real-valued average consensus over noisy quantized channels[C]. in proceedings of American Control Conference (ACC '09). 2009, 4361–4366
- [66] J. Fang, H. Li. Distributed consensus with quantized data via sequence averaging[J]. IEEE Transactions on Signal Process. 2010, **58**(2):944 – 948
- [67] Y. Cui, V.K.N. Lau. Convergence-optimal quantizer design of distributed contraction-based iterative algorithms with quantized message passing[J]. IEEE Transactions on Signal Process. 2010, **58**(10):5196–5205
- [68] 晏谦. 几何动力学概论[J]. 北京理工大学学报. 1996, **16**(S1):172–175
- [69] R. Abraham, J. E. Marsden. Foundations of mechanics, 2nd edition[M]. Reading, MA: Addison-Wesley, 1987
- [70] V. I. Arnold. Mathematical methods of classical mechanics, 2nd edition[M]. New York, NY: Springer-Verlag, 1989

- [71] J. E. Marsden, T. S. Ratiu. Introduction to symmetry and mechanics[M]. New York, NY: Springer-Verlag, 1994
- [72] F. Bullo, A. D. Lewis. Geometric control of mechanical systems: modeling, analysis, and design for simple mechanical control systems[M]. Springer Science and Business Media, 2005
- [73] C. J. Isham. Modern differential geometry for physicists[M]. World Scientific, 1989
- [74] Nicholas J.Higham. Functions of matrices, theory and computation[M]. United Kingdom: University of Manchester Manchester, 2008
- [75] J. A. Oteo. The baker-campbell-hausdorff formula and nested commutator identities[J]. Journal of Mathematical Physics. 1991, **32**(2):419–424
- [76] F. Bullo, R.M. Murray. Proportional derivative (PD) control on the Euclidean group[C]. In European Control Conference. Rome, 1995
- [77] Arieh Iserles. Lie-group methods[J]. Acta Numerica. 2000, **9**:215–365
- [78] C. Godsil, G. Royle. Algebraic graph theory[M]. Springer-Verlag, 2001
- [79] H. Khalil. Nonlinear systems[M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996
- [80] J. Meng, M. Egerstedt. Distributed coordination control of multiagent systems while preserving connectedness[J]. IEEE Transactions on Robotics. 2007, **23**(4):693–703
- [81] G. E. Dullerud, F. Paganini. A course in robust control theory[M]. Springer-Verlag, 2000
- [82] S. Boyd, L. Vandenberghe. Convex optimization[M]. Cambridge University Press, 2004
- [83] G. Chen, Z. Duan. Network synchronizability analysis: A graphtheoretic approach[J]. Chaos. 2008, **18**(3)
- [84] W. Ren, R. W. Beard, T. W. McLain. Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems[J]. Cooperative Control. 2004, **309**
- [85] R. Dong, Z. Geng. Consensus based formation control laws for systems on Lie groups[J]. Systems & Control Letters. 2013, **62**(2):104–111

## 附录 A 引理5.2的证明

$$(i) \quad \tilde{\xi}_{ik}^r = -\tilde{\xi}_{ki}^l, \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}} \tilde{\xi}_{ij}^l = -\tilde{\xi}_{ji}^l.$$

证明:

$$\tilde{\xi}_{ik}^r = \dot{\tilde{g}}_{ik} \tilde{g}_{ik}^{-1} = \tilde{g}_{ik} (\tilde{\xi}_k^l - \tilde{g}_{ik}^{-1} \tilde{\xi}_i^l \tilde{g}_{ik}) \tilde{g}_{ik}^{-1} = -(\tilde{\xi}_i^l - \tilde{g}_{ki}^{-1} \tilde{\xi}_k^l \tilde{g}_{ki}) = -\tilde{\xi}_{ki}^l.$$

$$-\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{\xi}_{ji}^l = \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{\xi}_{ij}^r = \tilde{\xi}_{ij}^l \Rightarrow \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}} \tilde{\xi}_{ij}^l = -\tilde{\xi}_{ji}^l.$$

■

$$(ii) \quad \frac{d}{dt} (\text{Ad}_{\tilde{g}_{ji}}) \tilde{\xi}_k^l = \text{Ad}_{\tilde{g}_{ji}} [\tilde{\xi}_{ji}^l, \tilde{\xi}_k^l].$$

证明:

$$\frac{d}{dt} (\text{Ad}_{\tilde{g}_{ji}}) \tilde{\xi}_k^l = \dot{\tilde{g}}_{ji} \tilde{\xi}_k^l \tilde{g}_{ij} + \tilde{g}_{ji} \tilde{\xi}_k^l \dot{\tilde{g}}_{ij} = \tilde{g}_{ji} \tilde{\xi}_{ji}^l \tilde{\xi}_k^l \tilde{g}_{ij} + \tilde{g}_{ji} \tilde{\xi}_k^l \tilde{g}_{ij} \tilde{\xi}_{ij}^l = \tilde{g}_{ji} (\tilde{\xi}_{ji}^l \tilde{\xi}_k^l + \tilde{\xi}_k^l \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}} \tilde{\xi}_{ij}^l) \tilde{g}_{ij}.$$

由等式  $\tilde{\xi}_{ik}^r = -\tilde{\xi}_{ki}^l$  和  $\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}} \tilde{\xi}_{ij}^l = -\tilde{\xi}_{ji}^l$ ,

$$\frac{d}{dt} (\text{Ad}_{\tilde{g}_{ji}}) \tilde{\xi}_k^l = \tilde{g}_{ji} (\tilde{\xi}_{ji}^l \tilde{\xi}_k^l - \tilde{\xi}_k^l \tilde{\xi}_{ji}^l) \tilde{g}_{ij} = \text{Ad}_{\tilde{g}_{ji}} [\tilde{\xi}_{ji}^l, \tilde{\xi}_k^l].$$

■

$$(iii) \quad \text{Ad}_{\tilde{g}_{ik}} [\tilde{\xi}_k^l, \tilde{\xi}_{ik}^l] = -[\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{ki}^l].$$

证明:

$$\begin{aligned} [\tilde{\xi}_i^l, \tilde{\xi}_{ki}^l] &= \tilde{\xi}_i^l (\tilde{\xi}_i^l - \tilde{g}_{ik} \tilde{\xi}_k^l \tilde{g}_{ki}) - (\tilde{\xi}_i^l - \tilde{g}_{ik} \tilde{\xi}_k^l \tilde{g}_{ki}) \tilde{\xi}_i^l \\ &= -\tilde{g}_{ik} (\tilde{g}_{ki} \tilde{\xi}_i^l \tilde{g}_{ik} \tilde{\xi}_k^l - \tilde{\xi}_k^l \tilde{g}_{ki} \tilde{\xi}_i^l \tilde{g}_{ik}) \tilde{g}_{ki} \\ &= -\text{Ad}_{\tilde{g}_{ik}} (\tilde{\xi}_k^l \tilde{\xi}_{ik}^l - \tilde{\xi}_{ik}^l \tilde{\xi}_k^l) \\ &= -\text{Ad}_{\tilde{g}_{ik}} [\tilde{\xi}_k^l, \tilde{\xi}_{ik}^l]. \end{aligned}$$

■

## 附录 B 引理5.4的证明

- (i)  $\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{\xi}_{ij}^r = \tilde{g}_{ij}^{-1} \dot{\tilde{g}}_{ij} \tilde{g}_{ij}^{-1} \tilde{g}_{ij} = \tilde{g}_{ij}^{-1} \dot{\tilde{g}}_{ij} = \tilde{\xi}_{ij}^l.$   
(ii)  $\tilde{\xi}_{ij}^l = -\text{Ad}_{\tilde{g}_{ji}} \tilde{\xi}_{ji}^l$  ( $i \neq j$ ) 和  $\tilde{\xi}_{ij}^l = 0$  ( $i = j$ ).

证明:

$$\tilde{\xi}_{ij}^l = \tilde{g}_{ij}^{-1} \dot{\tilde{g}}_{ij} = \tilde{\xi}_j^l - \text{Ad}_{\tilde{g}_{ji}} \tilde{\xi}_i^l = \tilde{\xi}_j^l - \tilde{g}_{ji} \tilde{\xi}_i^l \tilde{g}_{ij} = -\tilde{g}_{ji} (\tilde{\xi}_i^l - \tilde{g}_{ij} \tilde{\xi}_j^l \tilde{g}_{ji}) \tilde{g}_{ij} = -\text{Ad}_{\tilde{g}_{ji}} \tilde{\xi}_{ji}^l, i \neq j.$$

由  $\tilde{g}_{ii} = I$ , 易得  $\tilde{\xi}_{ii}^l = 0$ . ■

- (iii)  $\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{\xi}_{ik}^r = \tilde{\xi}_{ij}^l - \tilde{\xi}_{kj}^l.$

证明:

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{\xi}_{ik}^r &= -\tilde{g}_{ij}^{-1} \tilde{\xi}_{ki}^l \tilde{g}_{ij} = -\tilde{g}_{ij}^{-1} (\tilde{\xi}_i^l - \tilde{g}_{ki}^{-1} \tilde{\xi}_k^l \tilde{g}_{ki}) \tilde{g}_{ij} \\ &= \tilde{g}_{kj}^{-1} \tilde{\xi}_k^l \tilde{g}_{kj} - \tilde{g}_{ij}^{-1} \tilde{\xi}_i^l \tilde{g}_{ij} = (\tilde{\xi}_j^l - \tilde{g}_{ij}^{-1} \tilde{\xi}_i^l \tilde{g}_{ij}) - (\tilde{\xi}_j^l - \tilde{g}_{kj}^{-1} \tilde{\xi}_k^l \tilde{g}_{kj}) \\ &= \tilde{\xi}_{ij}^l - \tilde{\xi}_{kj}^l. \end{aligned}$$
■

- (iv)  $\text{Ad}_{\tilde{g}} [\hat{\xi}_1^l, \hat{\xi}_2^l] = [\text{Ad}_{\tilde{g}} \hat{\xi}_1^l, \text{Ad}_{\tilde{g}} \hat{\xi}_2^l].$

证明:

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{\tilde{g}} [\hat{\xi}_1^l, \hat{\xi}_2^l] &= \tilde{g} (\hat{\xi}_1^l \hat{\xi}_2^l - \hat{\xi}_2^l \hat{\xi}_1^l) \tilde{g}^{-1} = \tilde{g} \hat{\xi}_1^l \hat{\xi}_2^l \tilde{g}^{-1} - \tilde{g} \hat{\xi}_2^l \hat{\xi}_1^l \tilde{g}^{-1} \\ &= \tilde{g} \hat{\xi}_1^l \tilde{g}^{-1} \tilde{g} \hat{\xi}_2^l \tilde{g}^{-1} - \tilde{g} \hat{\xi}_2^l \tilde{g}^{-1} \tilde{g} \hat{\xi}_1^l \tilde{g}^{-1} \\ &= (\text{Ad}_{\tilde{g}} \hat{\xi}_1^l) (\text{Ad}_{\tilde{g}} \hat{\xi}_2^l) - (\text{Ad}_{\tilde{g}} \hat{\xi}_2^l) (\text{Ad}_{\tilde{g}} \hat{\xi}_1^l) \\ &= [\text{Ad}_{\tilde{g}} \hat{\xi}_1^l, \text{Ad}_{\tilde{g}} \hat{\xi}_2^l]. \end{aligned}$$
■

- (v)  $\text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{x}_{ki} = \tilde{x}_{ji} + \tilde{x}_{kj} + \text{higher order terms}, k \neq i.$

证明: 由引理2.3和引理2.7,

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{\tilde{g}_{ij}^{-1}} \tilde{x}_{ki} &= \tilde{g}_{ij}^{-1} \log(\tilde{g}_{ki}) \tilde{g}_{ij} = \log(\tilde{g}_{ij}^{-1} \tilde{g}_{ki} \tilde{g}_{ij}) \\ &= \log(\tilde{g}_j^{-1} \tilde{g}_i \tilde{g}_k^{-1} \tilde{g}_i \tilde{g}_k^{-1} \tilde{g}_j) = \log(\tilde{g}_j^{-1} \tilde{g}_i \tilde{g}_k^{-1} \tilde{g}_i) \\ &= \log(\tilde{g}_{ji} \tilde{g}_{kj}) \\ &= \tilde{x}_{ji} + \tilde{x}_{kj} + \text{higher order terms}, k \neq i. \end{aligned}$$

其中, higher order terms是关于  $\tilde{x}_{ji}$  和  $\tilde{x}_{kj}$  李括号运算的高阶项。 ■

## 附录 C $SE(2)$ 上多运载体编队的Simulink仿真模块图

以李群 $SE(2)$ 上三个动力学模型运载体的编队控制为例，图C.1，图C.2以及图C.3 分别描述了Simulink模块，个体系统模型参数和所设计的控制器参数。

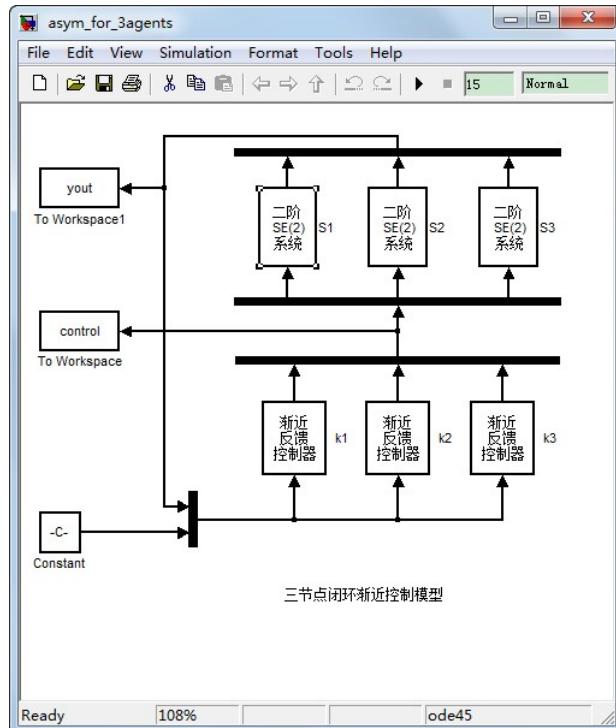


图 C.1  $SE(2)$ 上三个运载体编队的Simulink仿真搭建

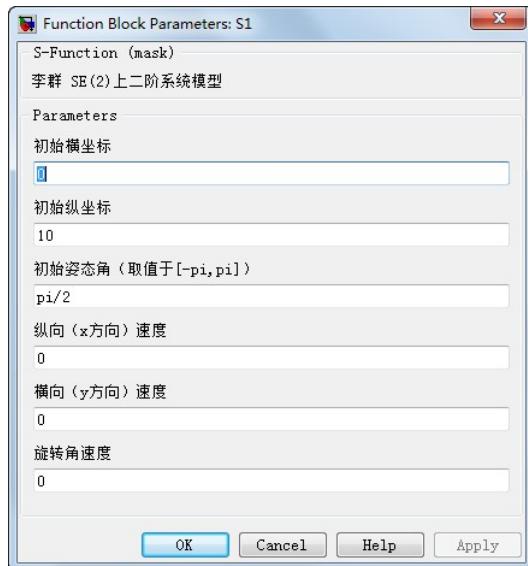


图 C.2  $SE(2)$ 上动力学(二阶)系统模型的参数输入



图 C.3  $SE(2)$ 上动力学(二阶)系统控制器参数输入

## 个人简历、在学期间的研究成果

### 个人简历

1986年2月9日出生于河北省邯郸市；2004年9月考入西北工业大学自动化学院信息工程专业，2008年6月本科毕业并获得工学学士学位；2008年9月保送进入北京大学工学院力学与空天技术系（现力学与工程系）直接攻读博士学位至今。

### 发表/待发表论文

- [1] Runsha Dong, Zhiyong Geng. Design and Analysis of Quantizer for Multi-agent Systems with A Limited Rate of Communication Data, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 18, 282-290,(2013)
- [2] Runsha Dong, Zhiyong Geng. Consensus Based Formation Control Laws for Systems on Lie Groups. Systems & Control Letters, 62, 104-111,(2013).
- [3] Runsha Dong, Zhiyong Geng. Consensus Control for Dynamic Systems on Lie Groups. Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference, Xi'An, China, 6856-6861, July 26-28, (2013).
- [4] Runsha Dong, Zhiyong Geng. Consensus for Formation Control of Multi-agent Systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control, (under review).
- [5] Runsha Dong, Zhiyong Geng. Formation Tracking Control of Multi-agent Systems. Asian Journal of Control, (under review).
- [6] Runsha Dong, Zhiyong Geng. Consensus Tracking for Multi-agent Systems with Nonlinear Dynamics, Prepare to Submit.

### 参与课题

- [1] 仿射输入非线性系统的运动规划研究，国家自然科学基金项目，11072002。(成员性质：技术骨干)
- [2] 复杂网络动力学与控制及其在航空航天中的应用，国家自然科学基金项目，10832006。(成员性质：技术骨干)

## 致 谢

首先，我要特别感谢我的导师耿志勇教授。在我攻读博士学位期间，他在各个方面给予了我无私的关怀、指导和帮助。大到科研选题、论文稿件修改，小到公式推导、仿真模块搭建，我在学术上的点滴进步都倾注了耿老师的心血；至于生活难处、心理困惑等各个方面，他也总是热情关怀、耐心引导。耿老师始终处于国际科研前沿，他严谨的学术作风，广博的知识，认真负责的态度，令我终身难忘；能成为耿老师的学生，我倍感荣幸。耿老师是我科研和生活上的楷模，不但传授了我知识，更无声地教我如何做人、做事，他在学术和生活上对我的帮助、鞭策、鼓励，我将铭记在心！

同时，在北京大学学习期间，航空航天动力学与控制实验室的各位老师给了我很的指导，各位同学也给了我很多帮助，在此我表示深深的谢意。感谢学院教务、财务、管理、职能等部门老师为我学习和生活上提供的便利，谢谢你们！感谢教育部、国家自然科学基金委、湍流与复杂系统国家重点实验室在博士期间提供的经济资助。

最后，我要感谢我的父母，董自奎和董星娥，谢谢你们的爱、耐心和不求回报的付出；感谢我的爱人，广鲁，谢谢你的理解、支持和鼓励；感谢我的挚友靖瑶的陪伴。你们是我热爱生活、不断前进的力量，我爱你们！

# 北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

## 原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名： 日期： 年 月 日

## 学位论文使用授权说明

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：  
按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；  
学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务；  
学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；  
在不以赢利为目的的前提下，学校可以公布论文的部分或全部内容。

(保密的论文在解密后应遵守此规定)

论文作者签名： 导师签名：  
日期： 年 月 日



## 学位论文出版授权声明

本人已经认真阅读《“中国精品学位论文全文数据库”建设章程》，同意将本人的学位论文提交给“中国精品学位论文全文数据库”项目的产品开发与运作方——北京北大方正电子有限公司全文发表，并可按“中国精品学位论文全文数据库稿酬支付说明”享受相关权益。同意论文提交后滞后：半年；一年；二年发布。

作者签名：\_\_\_\_\_

\_\_\_\_年\_\_月\_\_日

导师签名：\_\_\_\_\_

\_\_\_\_年\_\_月\_\_日



# “中国精品学位论文全文数据库”稿酬支付说明

作者信息：姓名：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_ 所在院系：\_\_\_\_\_

提交论文类型：  硕士论文，  博士论文

授权作者可以选择报酬方式：

1、 唯一授权：本人论文电子版独家授权给北大方正，并可选择下列报酬方式(三选一)

- (1) 读书卡：硕士论文作者将获得有效期5年价值449元的方正Apabi数字图书馆读书卡1张，博士论文作者将获得有效期10年价值669元的方正Apabi数字图书馆读书卡1张；
- (2) 现金+读书卡：硕士论文作者将获得30元现金和有效期3年价值269元的方正Apabi数字图书馆读书卡1张，博士论文作者将获得80元现金和有效期5年价值449元的方正Apabi数字图书馆读书卡1张。
- (3) 销售分成：作者每年获得作者本人提交论文销售收入的10 %作为著作权使用费。本人同意提供并填写完整、正确的个人信息，并在下列任一个人信息发生改变时及时通知北大方正（发邮件到ApabiCEDD@founder.com，或上网<http://www.apabi.com>在线提交），若因下列个人信息填写不完整、不正确或未将变化及时通知北大方正而发生的著作权使用费无法按期支付等问题由本人负责。北大方正及项目其它参与方负责对作者的下列个人信息保密：

作者姓名：\_\_\_\_\_ 开户行：\_\_\_\_\_ 银行帐号：\_\_\_\_\_  
Email：\_\_\_\_\_ 手机：\_\_\_\_\_

2、 非唯一授权：本人论文电子版以非独家授权方式授权给北大方正，并获得下列报酬：

读书卡：硕士论文作者将获得有效期3年价值269元的方正Apabi数字图书馆读书卡1张，博士论文作者将获得有效期5年价值449元的方正Apabi数字图书馆读书卡1张。

同时，本人导师将获得方正Apabi数字图书馆读书卡1张（硕士论文作者的导师的读书卡有效期5年，价值449元人民币；博士论文作者的导师的读书卡有效期10年，价值669元人民币）。

北大方正将按照作者选择的论文授权方式和报酬方式，及时支付作者应得的报酬。北大方正将提供数字版权保护技术（DRM）确保合法使用作者论文。同时，北大方正负责为作者提供网上查询论文销售情况及作者个人信息的服务，服务主页：<http://www.apabi.com>。

注：1、本“稿酬支付说明”一式两份，一份由作者本人保存，另一份做为领取稿酬凭证，交送给图书馆。

2、“学位论文授权使用声明”请直接装订在论文影印本的后面。

3、授权作者需提交“学位论文授权使用声明”的复印件、稿酬支付说明原件到图书馆论文采收处，领取稿酬。

