

基于伪谱法的连续推力航天器往返飞行轨迹优化

岳新成, 麻永平, 张旭荣, 耿志勇¹

1. 北京大学湍流与复杂系统国家重点实验室, 北京大学工学院力学与空天技术系, 北京 100871

E-mail: zygeng@pku.edu.cn

摘要: 应用伪谱法研究连续推力航天器转移-驻留-返回的往返飞行燃料最省轨迹优化问题. 考虑常值连续推力航天器点质量模型, 应用轨道坐标系下改进轨道根数描述的航天器运动学方程, 将往返飞行轨迹划分为转移、驻留和返回3段, 且航天器在目标轨道驻留时间满足约束值. 由于间接法求解分段约束问题的局限性, 应用伪谱优化方法将最小燃料消耗往返飞行轨迹优化问题转化为非线性规划问题, 数值仿真结果表明, 方法对较大推力情形有效, 转移轨迹与返回轨迹近似成对称关系.

关键词: 连续推力航天器, 往返飞行, 燃料最优, 伪谱法

Trajectory Optimization of Continuous-Thrust Spacecraft Roundtrip Flights via Pseudospectral Method

YUE Xincheng, MA Yongping, ZHANG Xurong, GENG Zhiyong¹

1. State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems, Department of Mechanics and Aerospace

Engineering, College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China

E-mail: zygeng@pku.edu.cn

Abstract: The problem of optimal roundtrip trajectory for the continuous-thrust spacecraft is studied by using the Pseudospectral method. The movement of the spacecraft is described by the Gauss equation using the modified equinoctial elements in the Gauss orbital coordinates. Given the staying orbit, the roundtrip flight mission is divided into transfer, stay and return phases. Considering the minimum-fuel-consumption performance, the optimal roundtrip flight problem is established. Furthermore, because the multi-phase trajectories optimization problem is hard to be resolved by the indirect method, the Pseudospectral method is applied to do with the three phase orbital maneuver problem. The simulations demonstrate that the minimum fuel-consumption roundtrip flight mission is well accomplished, and the simulation results also show that the trajectories of the transfer phase and the return phase are near symmetrical.

Key Words: Continuous-Thrust Spacecraft, Roundtrip flights, Minimum Fuel Consumption, Pseudospectral Method

1 引言

本文研究的连续推力航天器转移-驻留-返回往返飞行问题, 可根据图1^[1]的平面示意图简单描述为, 航天器在初始轨道通过轨道机动转移到目标轨道后, 在目标轨道驻留一段时间后, 再通过轨道机动返回原初始轨道. 中国实施的神九--天宫一号交会对接、深空探测的火星表面采样(火星探测器通过轨道机动脱离地球轨道后绕火星飞行, 任务完成后再返回地球轨道)等都是典型的往返飞行任务, 因此研究转移-驻留-返回的最优往返飞行问题具有重要的意义.

轨道机动是各种空间任务最基本的共性关键技术, 连续推力航天器空间机动轨迹优化则一直是航空航天领域的研究热点^[2-5], 一般是应用极大值原理将轨迹优化问题转化为数学上的两点边值问题来求解, 或者应用直接法将轨迹优化问题转化为非线性规划问题.

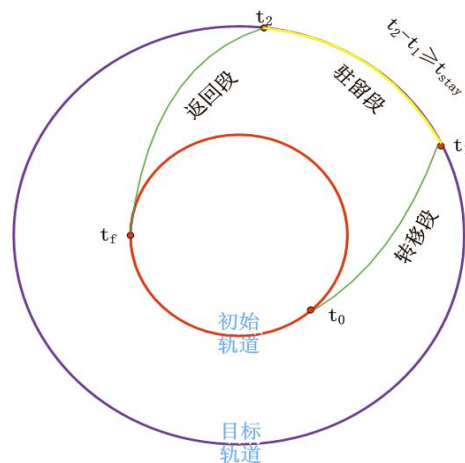


图1 转移-驻留-返回往返飞行示意图

由于间接法求解复杂多段最优轨迹优化问题的局限性, 以伪谱法为代表的直接法成为当前的研究与应用热点^[6-11], 如文献[10]应用Gauss伪谱法研究了有限推力航天器燃料最优轨道转移问题, 文献[11]则应

*此项工作得到国家自然科学基金资助, 项目批准号: 11072002.

用Legendre伪谱法研究了相对运动学方程描述下的燃料最优轨道转移问题。

文献[1]应用位置-速度表示的轨道动力学方程研究了燃料最优往返飞行轨迹优化问题,应用极大值原理设计了最优控制器,给出了角点条件。虽然极大值原理关于具有状态约束的多段轨迹优化问题已具有完备的理论分析基础,但是应用数值方法求解相应的多点边值问题异常困难,文献[1]也只给出了共面简单情形的数值仿真结果。

本文受文献[1]启发,应用改进轨道根数描述航天器运动,将累积赤经作为自变量,应用伪谱法研究了时间不受约束条件下的燃料最小消耗往返飞行问题。本文的主要贡献,一是应用Radau伪谱法研究了连续推力航天器异面往返飞行轨迹优化问题;二是将累积赤经代替时间作为系统方程自变量,便于处理驻留时间约束问题。

2 问题描述

2.1 系统方程

在地球平方反比力场中,假设航天器为点质量体,推进系统为固定比冲常值推力发动机,最小燃料消耗转移-驻留-返回往返飞行轨迹优化问题需满足航天器运动学方程^[2-5]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \frac{T}{m} \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \quad (1)$$

和航天器质量变化方程

$$\dot{m} = -\beta T \quad (2)$$

其中漂移项 $\mathbf{f}_0(\mathbf{x})$ 代表地球的开普勒运动项, β 为与发动机比冲相关的常数, T 为发动机推力幅值, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 为推力方向矢量。

通常航天器轨道运动学方程常用改进轨道根数描述。令状态变量为 $\mathbf{x} = [P \ e_x \ e_y \ h_x \ h_y \ L]^T$, 前五个参数描述航天器轨道的大小和形状,第六个参数确定航天器在轨道上位置。该改进轨道根数与经典轨道根数 $(a, e, i, \omega, \Omega, f)$ 的关系如下:

$$\begin{aligned} P &= a(1 - e^2) \\ e_x &= e \cos(\omega + \Omega) \\ e_y &= e \sin(\omega + \Omega) \\ h_x &= \tan \frac{i}{2} \cos \Omega \\ h_y &= \tan \frac{i}{2} \sin \Omega \\ L &= \Omega + \omega + f \end{aligned}$$

其中 a 为半主轴, e 为偏心率, i 为轨道倾角, ω 为近地点幅角, Ω 为升交点赤经, f 为真近点角。

考虑推力矢量在轨道坐标系下沿径向-法向分解,则定义航天器动态的四个向量场为:

$$\begin{aligned} f_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{P}} \frac{W^2}{P} \frac{\partial}{\partial L} \\ f_1 &= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left(-W \sin L \frac{\partial}{\partial e_x} + W \cos L \frac{\partial}{\partial e_y} \right) \\ f_2 &= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left(2P \frac{\partial}{\partial P} + (W \cos L + \eta_x) \frac{\partial}{\partial e_x} \right. \\ &\quad \left. + (W \sin L + \eta_y) \frac{\partial}{\partial e_y} \right) \\ f_3 &= \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left(-Z e_y \frac{\partial}{\partial e_x} + Z e_x \frac{\partial}{\partial e_y} + \frac{C}{2} \cos L \frac{\partial}{\partial h_x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{C}{2} \sin L \frac{\partial}{\partial h_y} + Z \frac{\partial}{\partial L} \right) \end{aligned}$$

其中的参数则有如下形式:

$$\begin{aligned} W &= 1 + e_x \cos L + e_y \sin L \\ C &= 1 + h_x^2 + h_y^2 \\ Z &= h_x \sin L - h_y \cos L \\ \eta_x &= e_x + \cos L \\ \eta_y &= e_y + \sin L \end{aligned}$$

2.2 约束条件

航天器在初始轨道,系统状态需满足约束:

$$\Phi(0, \mathbf{x}(0), m(0)) = 0 \quad (3)$$

航天器通过轨道转移到目标驻留轨道后,系统状态需满足

$$\Phi(t_s, \mathbf{x}(t_s), m(t_s)) = 0 \quad (4)$$

而驻留时间也需满足约束

$$t_2 - t_1 \geq t_s \quad (5)$$

即航天器需在驻留轨道至少飞行 t_s ; 航天器在目标轨道飞行一段时间后实施轨道机动返回到初始轨道,终端时刻需满足约束

$$\Phi(t_f, \mathbf{x}(t_f), m(t_f)) = 0 \quad (6)$$

另外,航天器推力大小是有限的,需满足控制约束

$$\|\mathbf{u}\| = 1, 0 \leq T \leq T_{\max} \quad (7)$$

2.3 性能指标

由于航天器携带燃料有限,在不要求飞行时间的条件下,需消耗最少燃料,任务完成后,剩余燃料越多越好,即需满足性能指标

$$\min J = -m(t_f) \quad (8)$$

根据上述描述,最小燃料消耗转移-驻留-返回往返飞行轨迹优化问题可简单描述为如下系统:

$$\begin{cases} \min J = -m(t_f) \\ \dot{\mathbf{x}} = f_0(\mathbf{x}) + \frac{T}{m} \sum_{i=1}^3 u_i f_i(\mathbf{x}) \\ \dot{m} = -\beta T \\ \Phi(0, x(0), m(0)) = 0 \\ \Phi(t_s, x(t_s), m(t_s)) = 0 \\ \Phi(t_f, x(t_f), m(t_f)) = 0 \\ \|\mathbf{u}\| = 1, 0 \leq T \leq T_{\max} \\ t_2 - t_1 \geq t_s \end{cases} \quad (9)$$

3 伪谱法及问题转化

3.1 伪谱法基本原理^[6]

近年来, 伪谱法受到广泛的关注. 在航空航天领域, 应用的伪谱法主要有Legendre伪谱法、Gauss 伪谱法、Radau伪谱法等. 以Gauss 伪谱法为例, 其基本思想是将最优控制问题的状态变量和控制变量在一系列Legendre-Gauss (LG) 点上离散, 并以离散点为节点构造Lagrange 插值多项式来逼近状态变量和控制变量. 通过对全局插值多项式求导来近似状态变量对时间的导数, 从而将微分方程约束转换为一组代数约束. 性能指标中的积分项由Gauss 积分计算. 终端状态由初始状态加右函数在整个过程的积分获得. 经上述变换, 可将最优控制问题转化为具有一系列代数约束的非线性规划问题.

离散过程首先须将时间区间 $t = [t_0, t_f]$ 转换到 $\tau = [-1, 1]$, 可通过下式完成

$$\tau = \frac{2t}{t_f - t_0} - \frac{t_f + t_0}{t_f - t_0} \quad (10)$$

从而最小化的Bolza型性能指标为

$$J = \Phi(x(-1), t_0, x(1), t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \quad (11)$$

系统微分方程约束

$$\dot{x}(\tau) = \frac{t_f - t_0}{2} f(x(\tau), u(\tau), \tau) \quad (12)$$

边界条件约束为

$$\phi(x(-1), t_0, x(1), t_f) = 0 \quad (13)$$

路径约束

$$C(x(\tau), u(\tau), \tau, t_0, t_f) \leq 0 \quad (14)$$

用N个高斯点 $\tau_1, \dots, \tau_N$ 去构造Lagrange插值多项式以近似状态变量的时间历程:

$$x(\tau) \approx X(\tau) = \sum_{i=0}^N X(\tau_i) L_i(\tau_i) \quad (15)$$

其中 $x(\tau)$ 为真实的状态时间历程, $X(\tau)$ 为由Lagrange插值多项式得到的近似的状态时间历程. $L_i(\tau)$ 为Lagrange插值基函数, $i=0, 1, 2, \dots, N$

$$L_i(\tau_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (16)$$

类似地, 控制变量也采用Lagrange插值多项式作为基函数来近似表示, 即:

$$u(\tau) \approx U(\tau) = \sum_{i=0}^N U(\tau_i) \tilde{L}_i(\tau_i) \quad (17)$$

对(15)式求导, 得到状态的微分为

$$\dot{x}(\tau) \approx \dot{X}(\tau) = \sum_{i=0}^N X(\tau_i) \dot{L}_i(\tau_i) \quad (18)$$

每个Lagrange多项式在配点处的微分可以由一个矩阵表示, 该矩阵可由下式计算得到

$$\dot{L}_i(\tau_k) = D_{ki} = \sum_{l=0}^N \frac{\prod_{j=0, j \neq i, l}^N (\tau_k - \tau_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (\tau_k - \tau_j)} \quad (19)$$

式中 $k=0, 1, \dots, N, i=0, 1, \dots, N$. 通过该矩阵, 将微分方程转化为代数约束

$$\sum_{i=0}^N D_{ki} X_i - \frac{t_f - t_0}{2} f(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f) = 0 \quad (20)$$

上式中的动态约束均配置在配点上, 而不包括2个边界点. 起始边界点的约束 $X_0 \equiv X(-1)$, 终端边界点可有高斯求积公式得到

$$X_f \equiv X_0 + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k f(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f) \quad (21)$$

式中 ω_k 为权重系数.

采用高斯求积公式离散后的性能指标为

$$J = \Phi(X_0, t_0, X_f, t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k g(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f) \quad (22)$$

边界条件为

$$\phi(X_0, t_0, X_f, t_f) = 0 \quad (23)$$

在配点处的路径约束为

$$C(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f) \leq 0 \quad (24)$$

这样将一个最优控制问题转化为参数优化问题, 选用合适的非线性规划算法即可求解.

3.2 问题转化

为更好的处理驻留时间约束, 根据航天器运动学方程特点, 可将漂移项分离处理, 令 $\bar{\mathbf{x}} = [P \ e_x \ e_y \ h_x \ h_y]^T$, 则航天器运动学方程可写作如下形式:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} &= \frac{T}{m} \sum_{i=1}^3 u_i \bar{\mathbf{f}}_i(L, \mathbf{x}) \\ \frac{dL}{dt} &= g_0(L, \mathbf{x}) + \frac{T}{m} g_1(L, \mathbf{x}) u_3\end{aligned}\quad (25)$$

方程(25)中的参数根据第2节的方程作适当改变即可得到,这里不再给出详细的表达式.令 L 代替时间 t 作为自变量,则航天器运动学方程可写作

$$\frac{d\mathbf{x}}{dL} = \frac{T}{mg_0 + Tg_1u_3} \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{f}_i \quad (26)$$

相应的,驻留时间约束可简单的表述的在驻留轨道运行的圈数约束,如 $L_2 - L_1 \geq \pi$,即表示在驻留轨道至少驻留半圈,驻留约束条件简单方便.

本文采用GPOPS4.1^[6]程序求解最小燃料消耗转移-驻留-返回往返飞行轨迹优化问题,需将问题转化为相应的形式.该程序采用的是Radau伪谱法,与Gauss伪谱法的主要区别是,离散点类型为Legendre-Gauss-Radau(LGR)点.根据往返飞行的特点,可将整个飞行划分为转移段、驻留段、返回段3段,按照多段伪谱法求解方法,每段设定相应的系统微分方程约束、端点约束、路径约束、控制约束等,段与段之间设定相应的连接条件.从而将往返飞行轨迹优化问题转化为适应伪谱法的非线性规划问题.

4 数值仿真

应用GPOPS4.1求解往返飞行轨迹优化问题,其中的物理参数为:

$$\mu = 5165.8620912 \text{ Mm}^3/h^2$$

$$\beta = 1.42 \times 10^{-2} \text{ h/Mm}$$

系统满足的边界条件为

表1 往返飞行的数值边界条件

变量	初始条件(终端条件)	驻留条件
P	15.6Mm	32.1Mm
e_x	0.6	0
e_y	0	0
h_x	0.5	0
h_y	0.28868	0
m	1000kg(----)	----

设定初始自变量 $L_0 = \pi$,由于转移轨道或返回轨道绕地球飞行的圈数与推力大小有关,对于特定推力大小值,存在一个最小飞行圈数,需要求解时间最短轨迹优化问题得到,本文设定总飞行时间自由,即终端 L_f 自由.

对于最大推力 $T_{\max} = 40N$ 、最短驻留时间 $L_s = 3\pi/2$ 情形,数值仿真结果如图2~4所示.图2所示的是绕地球飞行的3D最优轨迹,实线“—”表示的是

初始轨道和目标驻留轨道,“---”表示的是从初始轨道到目标驻留轨道的最优转移轨迹,“-.-”表示的从驻留轨道到初始轨道的最优返回轨迹,图示的箭头表示推力矢量在三维空间的方向,由图可以看出,转移轨迹和返回轨迹存在零推力阶段,与图4推力矢量方向变化规律相一致,最优推力幅值是典型的bang-bang控制形式,表现在最优飞行轨迹上就是“推力弧-零推力弧-推力弧”交替的过程.

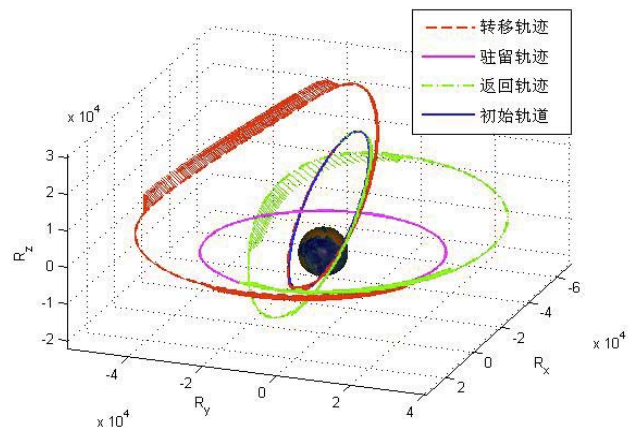


图2 往返飞行燃料最优3D轨迹(40N)

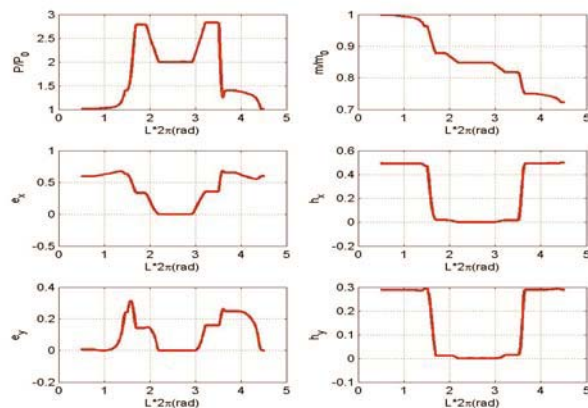


图3 往返飞行燃料最优状态变化(40N)

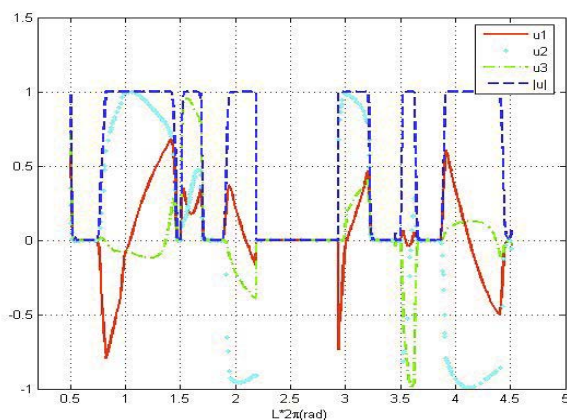


图4 往返飞行燃料最优推力方向变化(40N)

图3所示的是最优状态变量随自变量的变化规

律,由图可以看出,转移轨迹与返回轨迹的状态变量近似对称变化,也可以看出,航天器在驻留轨道满足最小驻留时间约束后即实施返回轨道机动。

图5所示为最大推力 $T_{\max} = 20N$ 、最短驻留时间 $L_s = \pi$ 情形时的3D最优飞行轨迹,与图2结果比较可知,随着最大推力幅值减小,航天器绕地球飞行圈数逐渐增多。

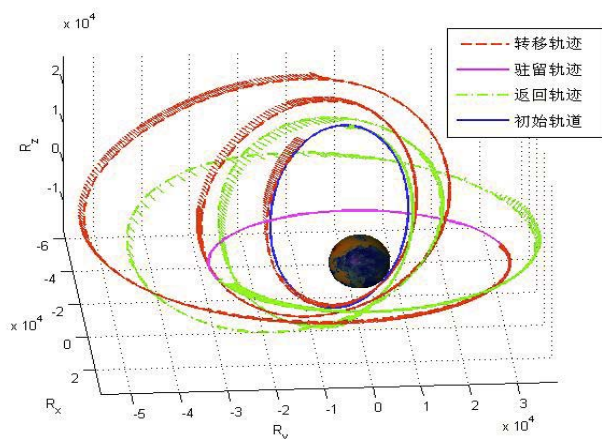


图5 往返飞行燃料最优3D轨迹(40N)

5 结论与展望

应用伪谱法研究了连续推力航天器转移-驻留-返回的往返飞行燃料最省轨迹优化问题,航天器运动学方程用改进轨道根数描述,将累积赤经 L 代替时间 t 作为自变量,从而简化了驻留时间约束条件;将问题转化为适应Radau伪谱法求解的形式,数值仿真结果表明,方法可行.数值仿真结果也表明,转移段和返回段轨迹成近似对称变化;最优推力存在零推力区间,使得最优轨迹呈“推力弧-零推力弧-推力弧”交替变化;随着最大推力幅值减小,航天器绕地球飞行圈数逐渐增多。

伪谱法求解分段轨迹优化问题,避免了应有间接法求解多点边值问题的困难,形式简单,应用简便;但是存在对初值猜测敏感、最优解不光滑、计算量大等问题,求解复杂的多段、多状态(路径)约束情形下的轨迹优化问题,仍然比较困难.可以尝试改进插

值方法、对初值自适应迭代求解等多种手段,增强伪谱法对复杂问题求解的适应性。

参考文献

- [1] Chris L.Ranieri and rained. finite burn trajectory via an indirect method. *Journal of Guidance, control and Dynamics*, 28(2):306-314, 2005.
- [2] J.T.Betts. Survey of numerical methods for trajectory optimization. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 21(2):193-207, 1998.
- [3] Haberkorn Gergaud and J.T. Martinon. Low-thrust minimum-fuel orbital transfer: a homotopic approach. *Journal of Guidance, control and Dynamics*, 27(6): 1046-1060, 2004.
- [4] B.Bonnard, J.B.Cailau and E.Trelat. Geometric optimal control of elliptic Keplerian orbits. *Discrete and Continuous Dynamical System Series B*, 5(4):929-956, 2005.
- [5] Yue xincheng, Yang ying, Geng zhiyong. Indirect optimization for finite-thrust Time-optimal Orbital Maneuver. *Journal of Guidance, control and Dynamics*, 33(2):628-634, 2010.
- [6] Rao, A. V., Benson, D. A., Darby, C. L., etc. Algorithm 902: GPOPS, A MATLAB Software for Solving Multiple-Phase Optimal Control Problems Using the Gauss Pseudospectral Method. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 37(2), Article 22, 39 pages, April-June, 2010.
- [7] Benson, D. A., Huntington, G. T., etc. Direct Trajectory Optimization and Costate Estimation via an Orthogonal Collocation Method. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 29(6):1435~1440, 2006.
- [8] Garg, D., Patterson, M. A., Darby, C. L.etc. Direct Trajectory Optimization and Costate Estimation of Finite-Horizon and Ininite-Horizon Optimal Control Problems Using a Radau Pseudospectral Method. *Computational Optimization and Applications*, 49(2): 335~358, 2011.
- [9] Garg, D., Patterson, M. A., Hager, etc. A United Framework for the Numerical Solution of Optimal Control Problems Using Pseudospectral Methods. *Automatica*, 46(11) : 1843-1851, 2010.
- [10] 张亚锋, 和兴锁. 基于Gauss伪谱法的有限推力轨道转移优化. *航天控制*, 20(3):38-41, 2010.
- [11] 梅杰, 马广富, 杨博. 基于Legendre 伪谱法的卫星轨道转移燃料最优控制. *哈尔滨工业大学学报*, 42(3):35-357, 2010.