



北京大学

## 博士研究生学位论文

题目： 仿射控制系统的约化研究

|         |   |             |
|---------|---|-------------|
| 姓 名     | : | 夏茜茜         |
| 学 号     | : | 10986849    |
| 院 系     | : | 工学院         |
| 专 业     | : | 力学(力学系统与控制) |
| 研 究 方 向 | : | 非线性控制       |
| 导 师 姓 名 | : | 耿志勇         |

二〇一四年六月



# ***A Geometric Study of Reduction of Affine Control Systems***

Dissertation Submitted to  
**Peking University**

In partial fulfillment of the requirement for the degree of  
**Doctor of Engineering**

By  
**Qianqian Xia**  
**(Ph.D Candidate (Dynamical Systems and Control))**

Dissertation Supervisor: **Zhiyong Geng**

Department of Mechanics and Engineering Science  
College of Engineering  
Peking University  
June, 2014, Beijing



# 版权声明

任何收存和保管本论文各种版本的单位和个人，未经本论文作者同意，不得将本论文转借他人，亦不得随意复制、抄录、拍照或以其他方式传播。否则，引起有碍作者著作权之问题，将可能承担法律责任。



# 摘 要

系统约化源于Euler, Lagrange和Hamilton等人在分析力学中的工作。在控制问题中, 随着控制项的引入, 较之一般动力学系统, 控制系统的约化带来了一些新的问题和突破, 一方面, 由于控制项的加入, 给系统约化结构的分析带来更多的問題和工作; 另一方面, 得益于控制項的引入, 一些在动力学系统中难以解决的问题, 在控制系统中会有一定的突破。本文使用微分几何语言, 给出了仿射控制系统约化结构研究的一个一般性理论框架并研究一些一般性结构特性; 在此框架下, 研究了一类特殊的拉格朗日控制系统的约化结构, 确定了具一定特性的一类仿射控制系统结构。最后研究一个专题: 反馈线性化。研究成果如下:

1. 用微分几何语言给出了仿射控制系统约化结构研究的一般性理论框架。在此框架下讨论了仿射控制系统约化的几何结构。从向量场李代数的角度给出了约化结构的一个几何实现, 并对李代数有限维情形给出结论。

2. 确定了一类拉格朗日力学控制系统的约化结构。本文针对拉格朗日力学控制系统, 在仿射联络框架下, 给出了一类保拉格朗日结构的约化局部和全局存在的充分必要条件, 同时确定了约化系统的几何结构。

3. 确定了一类具无漂特性的仿射控制系统结构。本文在系统约化观点下考察了一类具无漂特性的仿射控制系统结构。在正则反馈情形下, 给出了该类仿射控制系统结构的局部刻画。对李群上的系统, 给出全局性结论。推论指出, 对一般二输入三维系统, 均可运用上述方法将其转化为无漂系统。对非正则反馈, 探讨了一些特殊情形。

4. 阐述了如何运用轨道对称性来求解反馈线性化问题。在无可控性假设的前提下, Menini等人提出了运用轨道对称性来刻画仿射控制系统的反馈线性化结构的想法但是并没有正确运用。本文给出正确求解的方法。

**关键词：**仿射控制系统，约化，微分几何，局部，全局

# A Geometric Study of Reduction of Affine Control Systems

Qianqian Xia(Ph.D Candidate (Dynamical Systems and Control))

Directed by Zhiyong Geng

## Abstract

Reduction theory dates back to the early roots of analytic mechanics through the works of Euler, Lagrange, Hamilton and others. In the study of control systems, the presence of control terms brings new problems and opportunities as we think of the classical reduction theory of dynamics. For example, if we consider feedback transformation, the problem of reduction becomes more complicated. On the other hand, due to the presence of controlled vector fields, some advances can be made in reduction problems in control theory analogous to some unsolved problems in dynamics. In this paper a geometric framework is presented for studying the reduction problems in affine control systems. Some general results on the structure of reduction are obtained. In this framework, we study the reduction of a subclass of Lagrangian mechanical control systems. Besides, a subclass of affine control systems are recognized which have the driftless property. Finally we put aside our interest in reduction and focus on feedback linearization. The main results of this paper is as follows:

1. A geometric framework for studying the reduction problems in affine control systems is presented. In this framework the geometric structures of reduction are studied. An algebraic result is given to realize reduction. A special case where the Lie algebra generated by vector fields is finite dimensional is discussed.

2. The existence of a subclass of reduction of a subclass of Lagrangian mechanical control systems which preserve the mechanical structure is investigated. Under the framework of affine connection, both local and global sufficient and necessary conditions are given for the geodesically accessible affine connection control systems such that they can admit this subclass of reduction. The structural properties of the quotient map and the quotient mechanical control system are discussed.

3. The structure of a subclass of affine control system which have the driftless property is discussed. The problem is studied from the viewpoint of reduction. In the regular case, both local and global sufficient and necessary conditions are given on the affine control system such that it admits the driftless property. As a result, for generic two-input three-dimensional control systems, they can always be transformed into systems with the driftless property. The nonregular cases are also studied.

4. The sufficient and necessary conditions for feedback linearization without the linear controllability assumption are proved by using the concept of orbit symmetry. This idea once discussed in the paper "Exact and approximate feedback linearization without the linear controllability assumption [Automatica 48 (2012) 2221-2228]" is not correctly used there. In this paper, we show how to get the solution by the use of orbit symmetry.

**Key Words:** affine control system, reduction, differential geometry, local, global

# 目 录

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| 第一章 绪 论.....                | 1  |
| 1.1 研究背景.....               | 1  |
| 1.2 研究现状讨论.....             | 2  |
| 1.3 本文的主要贡献及内容安排 .....      | 4  |
| 第二章 预备知识 .....              | 5  |
| 2.1 符号介绍.....               | 5  |
| 2.2 仿射控制系统.....             | 6  |
| 第三章 一般结论 .....              | 8  |
| 3.1 约化的定义 .....             | 8  |
| 3.2 仿射控制系统约化的几何结构.....      | 10 |
| 3.3 李代数同态的几何实现 .....        | 11 |
| 3.3.1 一般结论.....             | 11 |
| 3.3.2 有限维李代数的一个结论 .....     | 14 |
| 第四章 一类拉格朗日力学控制系统的约化结构.....  | 16 |
| 4.1 切丛几何.....               | 16 |
| 4.2 拉格朗日力学系统介绍 .....        | 18 |
| 4.3 一类拉格朗日力学控制系统的约化结构 ..... | 19 |
| 4.3.1 问题陈述.....             | 19 |
| 4.3.2 局部结论.....             | 20 |
| 4.3.3 全局结论.....             | 29 |
| 第五章 一类具无漂特性的仿射控制系统 .....    | 31 |
| 5.1 研究背景和问题陈述.....          | 31 |
| 5.2 具无漂特性的仿射控制系统 .....      | 32 |
| 5.2.1 Frobenius定理的推广.....   | 32 |
| 5.2.2 局部结论.....             | 34 |
| 5.2.3 全局结论.....             | 38 |
| 5.2.4 推广情形.....             | 39 |
| 第六章 状态反馈线性化.....            | 42 |
| 6.1 已有结论回顾.....             | 42 |
| 6.2 无可控性假设的状态反馈线性化.....     | 43 |
| 结 论 .....                   | 48 |
| 参考文献 .....                  | 49 |
| 博士期间发表和完成的论文.....           | 55 |
| 致谢 .....                    | 56 |



# 第一章 绪 论

## 1.1 研究背景

系统约化源于Euler, Lagrange和Hamilton等人在分析力学中的工作。为寻找动力学方程的解,人们可以通过约化过程先来研究相对简单的系统方程。这样的约化过程通常基于常值运动的存在,或动力学方程中的对称性。在过去一百五十多年来,由于微分几何工具的引入,Poincare, Arnold和Marsden等人对分析力学进一步的工作,形成并发展了几何力学这一领域。而系统约化作为几何力学的一个重要部分,一直是比较活跃的一个研究课题。在微分几何语言下,动力学方程由向量场描述。系统具有对称性允许我们引入相容坐标系,使得动力学方程可做分解。而存在与动力学相容的额外的结构则为我们提供了额外的工具。例如,与动力学相容的辛结构让我们可以将向量场与1-形式等价。函数就可以作为Hamiltonian向量场的生成元。

这其中最早的工作来自于Routh对Abel群约化的研究<sup>[1,2]</sup>。Hamilton 力学中的Noether定理将常运动和无穷对称性相等同。现代约化理论是对具对称性的系统研究其约化结构:当带有特定几何结构的动力学系统满足在李群作用下的不变性,系统约化应运而生。Marsden和Weinstein发展了辛流形上的约化理论<sup>[3]</sup>。

到了控制系统研究中,由于控制项的参与而带来一些新的基本问题诸如可控性<sup>[4]</sup>,可镇定性<sup>[5]</sup>等。这些问题实质上都是存在性问题。对这些存在性的完全刻画通常是非常困难的。而对控制系统结构的把握则是解决这些问题的一个关键因素。随着上世纪70年代微分几何开始被人们用于研究控制理论。关于控制系统的结构研究一直是几何控制理论的一个重要方向。早期的一些工作诸如状态线性化,反馈线性化等都是对系统结构的刻画。

类似于动力学方程的约化,可以考虑将控制系统化为较为简单的系统方程来研究。这在实际问题中的作用已经得到体现:Nijmeijer等人对干扰解耦的工作<sup>[6,7]</sup>就是基于基本的约化概念。较之于一般动力学系统,一方面,由于控制项的加入,势必给系统约化结构的分析带来更多的問題和工作,例如反馈变换对控制系统约化过程的影响;另一方面,得益于受控向量场的引入,有了更多的信息,一些在动力学系统中难以解决的问题,我们有理由期待在控制系统中能够有一定的突破。本文针对仿射控制系统,试图讨论有了控制项的加入,给控制

系统约化带来的新的问题。同时，也试图揭示，控制项的加入给约化问题带来的便利。下一小节先回顾有关控制系统约化研究的一些已有工作并提出问题。

## 1.2 研究现状讨论

在非线性控制系统的研究中，控制系统的建模为控制系统的研究提供了一个基本舞台。不同的控制模型对研究控制特性会呈现不同的好处和弊端。以下针对不同控制模型回顾控制系统约化的工作。

纤维流形模型最早出现在Brockett<sup>[8]</sup>和Willems<sup>[9]</sup>的论文中，并由Nijmeijer和Schaft<sup>[10]</sup>进一步发展。如今这一模型已被几何控制理论的研究人员普遍采纳。在该模型下，控制系统由一个纤维流形 $\pi: C \rightarrow M$ 和 $id_M$ 上的一个丛映射 $F: C \rightarrow TM$ 构成：

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & TM \\ \pi \searrow & & \downarrow \pi_{TM} \\ & & M \end{array}$$

控制系统轨线 $x(t) \in M$ 满足 $\dot{x}(t) = F(x(t), u(t))$ ，并且 $x(t) = \pi(u(t))$ 。在此模型下，Grizzle和Marcus在文献[11]中给出了对称群作用下非线性控制系统的约化结构分析。Nijmeijer和Schaft在文献[12]中通过研究纤维流形模型下的受控不变性表示，讨论了控制系统约化问题。Nijmeijer和Schaft在文献[12]中提出了介于对称性和受控不变性之间的一个概念，部分对称性。它也可以给出控制系统约化。Tabuada和Pappas<sup>[13]</sup>用范畴论的方法研究了纤维流形模型下的约化结构。

纤维流形模型为控制系统的约化研究提供了一个很好的舞台。由于将控制与状态等同，它摆脱了考虑反馈作用时带来的一些麻烦，同时本身又具备数学上的优美性，能较好地体现微分几何的思想和方法，也给描述局部和全局问题带来了便利。

尽管如此，由于在实际物理模型中，由于对控制附加的约束等原因导致控制集很少具备微分流形结构，带来纤维流形模型在实际问题中的不适用。使用更贴近实际的控制模型就势在必行。这其中控制参数化模型最为自然。在这个模型下，控制系统由微分方程描述：

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)),$$

其中 $t \rightarrow u(t)$ 为控制， $t \rightarrow x(t)$ 为系统轨线。在这里对控制集合的约束得以自然体

现。这其中被人们研究的最多的就是仿射控制系统模型：

$$\dot{x}(t) = f_0(x) + \sum_{i=1}^k u^i f_i(x).$$

这里， $f_0, f_1, \dots, f_k$  为流形  $M$  上的向量场，控制  $u$  取值在  $\mathbb{R}^k$  中。

Respondek 在文献[14]中通过研究向量场的李代数条件考察了仿射控制系统约化结构的存在性问题。Nijmeijer 在[15]中针对一类特殊结构仿射控制系统进一步考虑了反馈作用下的约化。

Nijmeijer 和 Schaft 在文献[12]中研究了仿射控制系统的受控不变分布，并在文献[16]中针对一类特殊结构的仿射控制系统——哈密顿系统，研究了其受控不变性的函数表示。

Elkin 在文献[17]中在范畴论基础上建立了仿射控制系统约化的研究框架。并针对一些具特殊几何结构的仿射控制系统子类，研究其约化结构。

文献[17]讨论的仿射控制系统子类没有包含拉格朗日力学系统。Lewis 针对联络模型下的拉格朗日学控制系统，在文献[18]中给出了研究系统间态射的一个基本框架。

Ohsawa 在文献[19]中针对控制参数化模型，研究了最优控制系统在对称群作用下的约化问题。

比较动力学约化和控制系统约化已有的的工作，可以看出：

1、动力学约化基于对称群作用基础上，降阶结构分析的问题和方法，自然推广到控制系统约化中来。

2、控制系统约化比动力学约化有更广泛的内容。工作包括更为一般的降阶形式。由于受控向量场的出现，引入了一些新的概念诸如受控不变分布等。最优控制问题中由极大值原理给出的 Hamilton 结构，又带来最优降阶的问题。

3、动力学约化是在对称群存在假设基础上的工作，如何判定对称群的存在一直是动力学研究一项重要而又困难的问题。而在控制系统中，考虑到受控向量场的出现以及更广泛的约化内容，就有理由期待约化结构的存在性问题能得到更好的回答。

较之纤维流形模型，控制参数化模型具有更广泛的适用范围，结构更易于理解，系统表示更为明晰，这同时也伴随了更多的理论问题：

1、反馈作用的处理。在纤维流形模型中得以自然体现的反馈作用，到了控制参数化模型中需要特别对待。

2、局部和全局性问题的处理。在纤维流形模型中，得益于模型本身的几何结构，局部性和全局性问题能有较好的区分和描述。到了控制参数化模型中，问题的局部或全局性本质需要格外注意。

## 1.3 本文的主要贡献及内容安排

本文使用微分几何语言，来研究仿射控制系统模型下的约化问题。

第二章给出文中所用的基本符号，回顾一些基本的微分几何概念以及几何控制理论的基础知识。

第三章首先建立仿射控制系统约化研究的一个理论框架。通过引入两个定义：状态空间商系统和状态反馈商系统，一方面突出了系统结构的联系，另一方面也强调反馈作用的区别。在定义描述的同时注意局部和全局性问题的区分。接着研究状态空间商映射的几何结构。并从代数同态角度，给出了状态空间商系统的一个几何实现。特别地，针对向量场李代数有限维的特殊情形给出结论。

第四章回答了一类约化结构的存在性问题。针对联络框架下的一类拉格朗日力学控制系统，研究其保拉格朗日结构的状态空间商结构的存在性。首先给出文中所需的二阶几何基本知识，引入联络框架下的拉格朗日力学控制系统模型，将其表述成仿射控制系统形式。接着分别从局部和全局角度陈述问题。针对测地可达仿射联络控制系统，分别回答了约化结构存在的局部和全局问题。

第五章运用系统约化的观点，考察了一类具无漂特性的仿射控制系统结构。首先给出问题陈述，然后研究了Frobenius定理的推广。并且在正则反馈情形下，给出了该类仿射控制系统局部结构的完全刻画，并针对李群上的一类仿射控制系统，给出全局性结论。推论指出，对一般二输入三维系统，均可运用上述方法将其转化为无漂系统。对非正则情形，探讨了一些特殊情形。

第六章研究一个专题：反馈线性化。已有的反馈线性化工作是基于可控性前提下的。首先回顾已有工作，接着在无可控性假设的前提下，运用轨道对称性刻画了仿射控制系统的反馈线性化结构。

最后总结全文，并给出后续研究方向。

## 第二章 预备知识

本章为整篇论文提供必要的预备知识，并说明后续各章节将要用到的符号与变量。

### 2.1 符号介绍

本节陈述一些基本定义和记号，详见文献[20]。如无特别指出，文中流形均指第二可数，连通的实光滑流形。所有映射均指光滑。给定流形 $M$ ， $TM$ 和 $T^*M$ 分别表示它的切丛和余切丛， $T_xM$ 和 $T_x^*M$ 表示它在 $x$ 点处的切空间和余切空间。 $M$ 上的所有光滑函数全体记作 $C^\infty(M)$ 。给定映射 $\psi: M \rightarrow N$ ， $\psi_*$ 表示 $\psi$ 的切映射。若 $\text{rank} \phi_*(p) = \dim N$ ， $\forall p \in M$ ，则 $\psi$ 称为一个淹没。若 $\text{rank} \phi_*(p) = \dim M$ ， $\forall p \in M$ ，则 $\psi$ 称为一个浸入。

对 $M$ 上的完备向量场 $\xi$ ，用 $\Phi^\xi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ 表示由 $\xi$ 生成的流。固定 $t \in \mathbb{R}$ ， $\Phi_t^\xi$ 表示微分同胚 $x \rightarrow \Phi^\xi(t, x)$ 。

$M$ 上的反对称 $s$ -协变张量场称为 $s$ -形式。 $s$ -形式的集合记作 $\Omega^s(M)$ 。记 $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ ，则 $\Omega(M) = \bigoplus_{s=0}^\infty \Omega^s(M)$ 是 $M$ 上的外代数。外导数记作 $d: \Omega^s(M) \rightarrow \Omega^{s+1}(M)$ 。一个 $s$ -形式 $\beta$ 称为是闭的，若 $d\beta = 0$ ， $\beta$ 称为是精确的若存在 $\eta \in \Omega^{s-1}(M)$ ，满足 $\beta = d\eta$ 。给定映射 $\psi: M \rightarrow N$ 和 $\omega \in \Omega^s(N)$ ， $\omega$ 的拉回 $f^*\omega$ 定义为 $f^*(\omega)(x)(v_1, \dots, v_s) = \omega(f(x))(T_x f(v_1), \dots, T_x f(v_s))$ ，这里 $v_i \in T_x M, i = 1, \dots, s$ 。

对光滑流形 $M$ 和 $B$ ，一个纤维丛是指一个满淹没映射 $\pi: M \rightarrow B$ 并且满足局部平凡性。也即存在流形 $F$ ，满足对任一点 $b \in B$ ，存在 $b$ 的邻域 $W$ 以及微分同胚 $\phi: \pi^{-1}(W) \rightarrow W \times F$ ，使得 $\pi \circ \phi^{-1}|_W = Id_W$ ，并且对任意两个这样的坐标图卡 $(W_1, \phi_1), (W_2, \phi_2)$ ，转移函数 $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ 是一个微分同胚。这里 $F$ 被称为纤维。纤维丛的截面是指映射 $X: B \rightarrow M$ 满足 $\pi \circ X = Id_B$ 。用 $\Gamma(B)$ 表示截面的集合。垂直子丛 $V(B)$ 由映射 $T\pi$ 的核给出。取值在 $V(B)$ 中的向量场称为 $B$ 上的垂直向量场。

$M$ 上的分布 $D$ 是 $TM$ 的一个子丛。 $D$ 在 $x \in M$ 的秩就是子空间 $D_x$ 的维数。分布 $D$ 称为对合的，若对任给的向量场 $X, Y \in \Gamma(D)$ ，有 $[X, Y] \in \Gamma(D)$ 。子流形 $N$ 称为 $D$ 的一个积分子流形，若它满足 $T_x N = D_x, \forall x \in N$ 。分布 $D$ 称为完全可积的，若 $\forall x \in M$ ，都存在 $D$ 的一个极大积分子流形 $N$ ，满足 $T_x N = D_x$ 。当 $D$ 正则，由Frobenius定理，对合性与可积性等价。 $M$ 上的仿射分布 $A$ 是 $TM$ 的一个子集，满足 $\forall x \in M, A_x := A \cap T_x M$ 是 $T_x M$ 的一个仿射子空间。

## 2.2 仿射控制系统

一个仿射控制系统是一个组队  $\Sigma = (M, \{f_0, f_1, \dots, f_r\}, U)$ , 其中  $M$  为一个流形,  $\{f_0, f_1, \dots, f_r\}$  为  $M$  上的一族向量场,  $\dim(U) = \mathbb{R}^r$ .  $U$  称为  $\Sigma$  的控制集。曲线  $\gamma(t)$  称为是  $\Sigma$  的轨线, 若  $\gamma(t)$  是绝对连续的且满足

$$\dot{\gamma}(t) = f_0(\gamma(t)) + \sum_{i=1}^r u^i(t) f_i(\gamma(t)), \quad u^i \in U, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.1)$$

当  $f_0 = 0$  时, 称对应的仿射控制系统为无漂的。

记  $\Sigma$  的所有轨线的集合为  $\text{Ctraj}(\Sigma)$ 。记定义在  $[0, T]$  上的  $\Sigma$  的所有轨线的集合为  $\text{Ctraj}(\Sigma, T)$ 。给定  $x_0 \in M$ ,  $\Sigma$  在  $T$  时刻的可达集为

$$\mathcal{R}_\Sigma(x_0, T) = \{\gamma(T) \mid \gamma \in \text{Ctraj}(\Sigma, T), \gamma(0) = x_0\}.$$

记  $\mathcal{R}_\Sigma(x_0, \leq T) = \cup_{t \in [0, T]} \mathcal{R}_\Sigma(x_0, t)$ .

**定义 2.1:** 称仿射控制系统  $\Sigma$  在  $x_0$  处是可达的, 若存在  $T \geq 0$ , 使得  $\text{int}(\mathcal{R}_\Sigma(x_0, \leq t)) \neq \emptyset, \forall t \in [0, T]$ .

对应于  $\Sigma$  有仿射分布  $A_\Sigma$ :

$$(A_\Sigma)_x = \{f_0(x) + u^i f_i(x) \mid u = (u^1, \dots, u^r) \in \mathbb{R}^r\}.$$

反之, 给定仿射分布  $A$ , 称仿射控制系统  $\Sigma = (\Omega, \{f_0, f_1, \dots, f_r\}, U)$  为  $A$  在  $x_0$  点处的一个局部实现, 若  $A_\Sigma = A|_\Omega$ , 其中  $\Omega$  为  $x_0$  的局部邻域。

给定一族光滑向量场  $\mathcal{X}$ , 用  $\text{Lie } \mathcal{X}$  表示包含  $\mathcal{X}$  的最小的向量场李子代数。

**定义 2.2:** 称向量场族  $\mathcal{X}$  在  $x_0 \in M$  处满足李代数秩条件(LARC), 如果  $\text{Lie } \mathcal{X}(x_0) = T_{x_0}M$ 。

**定义 2.3:**  $\mathcal{X}$  过  $x_0 \in M$  点的轨道定义为如下集合:

$$\text{Orb}(x_0, \mathcal{X}) = \{\Phi_t^X(x_0) \mid X \in \mathcal{X}^k, t \in \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

**定理 2.1 (21):** 给定一族光滑向量场  $\mathcal{X}$ , (i)  $\text{Orb}(x_0, \mathcal{X})$  为  $M$  上一个连通的浸入子流形;

(ii) 任给  $x \in \text{Orb}(x_0, \mathcal{X})$ ,

$$T_x \text{Orb}(x_0, \mathcal{X}) = \text{span}\{\Phi_* X(x) \mid \Phi \in \text{Diff}(\mathcal{X}), X \in \mathcal{X}\}. \quad (2.2)$$

这里  $\text{Diff}(\mathcal{X}) = \{\Phi_t^X \mid X \in \mathcal{X}^k, t \in \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$  是  $M$  的微分同胚群的一个子群。  
若  $\mathcal{X}$  中的向量场解析, 有

$$(iii) T_x \text{Orb}(x_0, \mathcal{X}) = \text{Lie } \mathcal{X}(x_0).$$

**定理 2.2 (21):** 解析仿射控制系统  $\Sigma$  在  $x_0$  处是可达的当且仅当向量场族  $\mathcal{X} = \{f_0, f_1, \dots, f_r\}$  在  $x_0 \in M$  处满足李代数秩条件。

## 第三章 一般结论

本章的目的是为研究仿射控制系统的约化结构提供一个基本框架。首先给出约化结构的一般性定义。然后引入两个特殊的约化结构概念：状态空间商结构和状态反馈商结构。接着研究承接这两类商结构的仿射控制系统的几何结构并考虑商结构的李代数实现。

### 3.1 约化的定义

考虑仿射控制系统

$$\dot{y} = f_0(y) + \sum_{i=1}^r u_i f_i(y), \quad y \in M, \quad u_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.1)$$

这里， $M$  是一个光滑连通 $n$ 维流形。称 $m$  维光滑连通流形上的系统

$$\dot{z} = h_0(z) + \sum_{j=1}^s v_j h_j(z), \quad z \in N, \quad v_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, s, \quad (3.2)$$

为系统(3.1)的商系统，如果存在光滑满映射 $\psi: M \rightarrow N$ ，满足对系统(3.1)的任一轨线 $y(t), t \in I, z(t) = \psi(y(t)), t \in I$  都是系统(3.2)的轨线。此时称映射 $\psi$  为一个商映射。

如上一般性的定义由Elkin在文献[22]中给出。为进一步明确系统结构，我们给出如下定义：

**定义 3.1:** 称仿射控制系统(3.2)为系统(3.1)的状态空间商系统，如果存在光滑满映射 $\psi: M \rightarrow N$ ，满足 $\psi_* f_0 = h_0, \psi_* f_i = h_i, i = 1, \dots, r$  并且 $s = r$ 。此时，称映射 $\psi$  为一个状态空间商映射。

定义3.1是良定的。若 $\psi$  满足 $\psi_* f_0 = h_0, \psi_* f_i = h_i$ ，那么对任给的系统(3.1)的轨线 $y(t), t \in I, z(t) = \psi(y(t)), t \in I$ ，显然是系统(3.2)的轨线。也就是说，如上定义的状态空间商系统确是一类商系统。称系统(3.1) 局部(全局)承接一个状态空间商系统(3.2)，如果存在状态空间商映射 $\psi: U \rightarrow V (\psi: M \rightarrow N)$ ，这里 $U, V$  分别代表 $p_0 \in M$  和 $q_0 = \psi(p_0) \in N$  的连通邻域。

**定义 3.2 (23):** 光滑分布 $D$  称为是对仿射控制系统(3.1)不变的，若 $D$ 是对合的，并且满足 $[f_0, D] \subseteq D, [f_i, D] \subseteq D, i = 1, \dots, r$ 。

例: 设 $D$  为仿射控制系统(3.1)的不变分布。考虑点 $y_0$ 的局部邻域 $V$ , 在局部坐标 $(y^1, y^2)$ 下,  $D = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}\right\}$ 。对控制系统(3.1)有如下局部分解:

$$\begin{aligned}\dot{y}^1 &= f_0^1(y^1, y^2) + \sum_{i=1}^r u_i f_i^1(y^1, y^2), \\ \dot{y}^2 &= f_0^2(y^2) + \sum_{i=1}^r u_i f_i^2(y^2).\end{aligned}$$

由定义3.1, 系统 $\dot{y}^2 = f_0^2(y^2) + \sum_{i=1}^r u_i f_i^2(y^2)$  是仿射控制系统(3.1)限制在局部邻域 $V$ 上的状态空间商系统。它被称为是由系统(3.1)在 $y_0$ 附近的不变分布诱导的。

有如下结论:

**命题 3.3:** 设仿射控制系统(3.1)满足李代数秩条件, 并且向量场 $f_0, f_1, \dots, f_r$ 均完备, 若(3.1)局部(全局)承接一个状态空间商系统, 则商映射为一个淹没。

**证明:** 由于商映射 $\psi$ 满足 $\psi_* f_0 = h_0$ ,  $\psi_* f_i = h_i, i = 1, \dots, r$ ,  $\psi$ 将 $\{f_0, f_1, \dots, f_r\}$ 的轨道 $O_{p_0}$ 映到 $\{h_0, h_1, \dots, h_r\}$ 的轨道 $O_{q_0}$ 中。此外, 因为 $f_0, f_1, \dots, f_r$ 完备, 则

$$T_{\psi(p)} O_{q_0} = \text{span}_{\mathbb{R}} \{\psi_* X\} \quad (3.3)$$

这里 $X \in T_p M$ ,  $p \in O_{p_0}$ 。

另一方面, 由于系统(3.1)满足李代数秩条件, 所以

$$\text{Lie}^\infty \{f_0, f_1, \dots, f_r\}_p = T_p M,$$

对任给的 $p \in M$ . 根据Rashevsky-Chow定理<sup>[24,25]</sup>得知 $O_{p_0}$ 等于 $U(M)$ 。由于 $\psi$ 是一个满映射,  $O_{q_0}$ 等于 $V(N)$ 。

于是由(3.3)有

$$T_{\psi(p)} V = \text{span}_{\mathbb{R}} \{\psi_* X\} \text{ (resp. } T_{\psi(p)} N = \text{span}_{\mathbb{R}} \{\psi_* X\}) \quad (3.4)$$

■

这里 $X \in T_p U(T_p M)$ ,  $p \in U(M)$ 。

因此 $\psi: U \rightarrow V$  ( $\psi: M \rightarrow N$ )是一个淹没。

考虑仿射分布 $D_1 = \{f_0\} + \text{span}\{f_1, \dots, f_r\}$ ,  $D_2 = \{h_0\} + \text{span}\{h_1, \dots, h_s\}$ 。

定义 3.4 (23): 称仿射控制系统(3.2)为系统(3.1)的状态反馈商系统, 如果存在光滑满映射  $\psi: M \rightarrow N$ , 满足  $\psi_* D_1 = D_2$ 。此时称映射  $\psi$  为一个状态反馈商映射。

定义 3.5: 光滑分布  $D$  称为是对仿射控制系统(3.1)受控不变的, 若  $D$  是对合的, 并且满足  $[f_0, D] \subseteq D + F$ ,  $[f_i, D] \subseteq D + F$ ,  $i = 1, \dots, r$ 。这里,  $F = \text{span}\{f_1, \dots, f_r\}$ 。

例: 设  $D$  为仿射控制系统(3.1)的受控不变分布。考虑点  $y_0$  的局部邻域  $V$ , 在局部坐标  $(y^1, y^2)$  下,  $D = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}\right\}$ 。对控制系统(3.1), 存在反馈  $u = \alpha v$ , 使得作用后的系统有如下局部分解:

$$\begin{aligned} \dot{y}^1 &= \tilde{f}_0^1(y^1, y^2) + \sum_{i=1}^r v_i \tilde{f}_i^1(y^1, y^2), \\ \dot{y}^2 &= \tilde{f}_0^2(y^2) + \sum_{i=1}^r v_i \tilde{f}_i^2(y^2). \end{aligned}$$

由定义3.1, 系统  $\dot{y}^2 = \tilde{f}_0^2(y^2) + \sum_{i=1}^r v_i \tilde{f}_i^2(y^2)$  是仿射控制系统(3.1)限制在局部邻域  $V$  上的状态反馈商系统。它被称为是由系统(3.1)在  $y_0$  附近的受控不变分布诱导的。

## 3.2 仿射控制系统约化的几何结构

定理 3.1: [26] 设  $\mathcal{L}_1$  和  $\mathcal{L}_2$  分别为  $M$  和  $N$  上的光滑向量场族, 映射  $\Phi: M \rightarrow N$  满足  $\Phi_* \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ 。则  $\Phi$  将  $\mathcal{L}_1$  的轨道映入  $\mathcal{L}_2$  的轨道。若  $\mathcal{L}_1$  和  $\mathcal{L}_2$  中的向量场均完备, 则  $\Phi$  限制在每条轨道上是一个纤维丛。换言之, 若仿射控制系统(3.2)为系统(3.1)的状态空间商系统, 且向量场族  $\{f_0, \dots, f_r\}$  和  $\{h_0, \dots, h_s\}$  满足李代数秩条件, 则状态空间商映射是一个纤维丛。

证明: 因为  $\Phi_* \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ , 显然  $\Phi$  将  $\mathcal{L}_1$  的轨道映入  $\mathcal{L}_2$  的轨道。由(2.2),  $\Phi$  限制在每条轨道上是一个满淹没。

考虑  $N$  上  $q$  点处的局部坐标图卡  $(U, (t_1, \dots, t_k))$ :

$$(t_1, \dots, t_k) \rightarrow \Phi_{t_1}^{Y_1} \circ \dots \circ \Phi_{t_k}^{Y_k}(p). \quad (3.5)$$

■

其中,  $Y_1, \dots, Y_k$  为  $\mathcal{L}_2$  具形式(2.2)的向量场,  $k$  为轨道  $\mathcal{L}_2$  的维数。则对任给

的  $p \in \Phi^{-1}(U)$ , 存在  $(t_1, \dots, t_k)$ , 满足  $\Phi(p) = \Phi_{t_1}^{Y_1} \circ \dots \circ \Phi_{t_k}^{Y_k}(q)$ 。考虑如下映射

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(U) &\rightarrow \Phi^{-1}(q) \times U \\ p &\rightarrow (\Phi_{-t_k}^{X_k} \circ \dots \circ \Phi_{-t_1}^{X_1}(p), \Phi(p))\end{aligned}$$

其中,  $X_i$  满足  $\Phi_*(X_i) = Y_i$ 。它是一个局部微分同胚, 它给出了  $M$  的局部乘积结构,  $\Phi^{-1}(q)$  为局部纤维。现设  $W$  为  $N$  上对应局部纤维与  $\Phi^{-1}(q)$  微分同胚的点的集合, 可知  $W$  为开集。另一方面,  $N - W$  为  $N$  上对应局部纤维不与  $\Phi^{-1}(q)$  微分同胚的点的集合, 可知  $N - W$  为开集。而  $N$  连通, 因此  $W = N$ 。因此,  $\Phi: M \rightarrow N$  满足局部平凡性。又对任意两个上述局部坐标图卡, 转移函数是流复合映射, 它是一个微分同胚。因此,  $\Phi$  限制在每条轨道上是一个纤维丛。

### 3.3 李代数同态的几何实现

本节从代数角度考察系统的约化结构, 给出向量场李代数同态的一个几何实现。

#### 3.3.1 一般结论

首先引入定义:

**定义 3.6:** 给定流形  $M$ ,  $\mathcal{L} \in \Gamma(TM)$  为一个李子代数。 $\mathcal{L}$  被称为是传递的, 如果  $\{X(x) \mid X \in \mathcal{L}\} = T_x M, \forall x \in M$ 。 $\mathcal{L}$  在  $x$  点处的迷向子代数  $\mathcal{L}_x = \{X \in \mathcal{L} \mid X(x) = 0_x\}$ 。

有:

**定理 3.2:**  $M$  为单连通解析流形,  $N$  为解析流形。 $\mathcal{L}_1 \in \Gamma^\omega(TM), \mathcal{L}_2 \in \Gamma^\omega(TN)$  均为传递李子代数。若存在李代数满同态  $\phi: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ , 满足在点  $x_0 \in M, y_0 \in N$  处,  $\phi(\mathcal{L}_{1x_0}) \subseteq \mathcal{L}_{2y_0}$ , 则存在唯一的纤维丛  $\Phi: M \rightarrow N$ , 满足  $\Phi(x_0) = y_0$  且  $\phi = \Phi_*|_{\mathcal{L}_1}$ 。

**证明:** 记  $\dim M = n$ 。

(1) 考虑由乘积流形  $M \times N$  上由向量场  $\mathcal{X} = \{(X, \phi(X)) \mid X \in \mathcal{L}_1\}$  张成的分布  $D$ 。显然,  $D$  对合。考虑投影映射  $\text{pr}_1: TM \times TN \rightarrow TM$ 。由于  $\mathcal{L}_1$  是传递的, 对  $x_0 \in M, y_0 \in N$ ,  $\text{pr}_1$  限制在  $D_{(x_0, y_0)}$  上是到  $T_{x_0} M$  的满映射。它也是单的。因为若  $X(x_0) =$

0, 由 $\phi(\mathcal{L}_{1x_0}) \subseteq \mathcal{L}_{2y_0}$ , 有 $\phi(X)(y_0) = 0$ , 即 $(X, \phi(x))(x_0, y_0) = 0$ . 因此 $\text{rank} D_{(x_0, y_0)} = \dim M = n$ .

由轨道定理, 向量场族 $\mathcal{X} = \{(X, \phi(X)) \mid X \in \mathcal{L}_1\}$ 过 $(x_0, y_0)$ 点的轨道 $\text{Orb}((x_0, y_0), \mathcal{X})$ 是一个连通的 $n$ 维浸入子流形, 因此对任给的 $(x, y) \in \text{Orb}((x_0, y_0), \mathcal{X})$ ,

$$\text{rank} D_{(x, y)} = \dim T_{(x, y)} \text{Orb}((x_0, y_0), \mathcal{X}) = \dim M = n. \quad (3.6)$$

有:

$$\phi(\mathcal{L}_{1x}) \subseteq \mathcal{L}_{2y}, \quad (3.7)$$

$\forall (x, y) \in \text{Orb}((x_0, y_0), \mathcal{X})$ . 考虑投影映射 $\text{pr}_1 : D(x, y) \rightarrow T_x M$ , 由前述它是满的。根据(3.6)知它也是单的。

(2) 给定 $(x, y) \in \text{Orb}((x_0, y_0), \mathcal{X})$ 以及 $X \in \mathcal{L}_1$ , 若 $\Phi_t^X(x)$ 在 $(t_1, t_2)$ 上有定义, 断言:  $\Phi_t^{\phi(X)}(y)$ 在 $(t_1, t_2)$ 上有定义。

假设 $\Phi_t^{\phi(X)}(y)$ 在 $(t_3, t_4)$ 上有定义,  $t_4 \leq t_2$ . 给定 $X_1 \in \mathcal{L}_1$ , 考虑如下曲线:

$$\alpha(t) = (\Phi_{-t}^X)_* X_1(x), t \in (a, b).$$

$$\beta(t) = (\Phi_{-t}^{\phi(X)})_* \phi(X_1)(y), t \in (a, b).$$

考虑映射 $\varphi : T_x M \rightarrow T_y N$ :

$$\varphi(A) = \phi(X)(y).$$

这里,  $X \in \mathcal{L}_1$ 且满足 $X(x) = A$ . 由(3.7)知 $\varphi$ 是良定的。又

$$\varphi\left(\frac{d^k}{dt^k} \Big|_{t=0} \alpha(t)\right) = \frac{d^k}{dt^k} \Big|_{t=0} \beta(t).$$

且 $\alpha, \beta$ 解析, 则

$$\varphi((\Phi_{-t}^X)_* X_1(x)) = (\Phi_{-t}^{\phi(X)})_* \phi(X_1)(y), t \in (c, d). \quad (3.8)$$

取 $(a, b)$ 中的一族收敛到 $t_4$ 的序列 $(t_j)$ , 使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} (\Phi_{-t_j}^X)_* X_1(x)$ 存在。根据(3.8)以及 $\mathcal{L}_2$ 的完备性可知序列 $(\Phi_{t_j}^{\phi(X)}(y))$ 收敛, 记该点为 $y_2$ . 又存在 $y_2$ 的局部邻域 $V$ , 使得 $\Phi_{t_j}^{\phi(X)}$ 在 $V$ 上以及 $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ 都由定义。取 $t_k$ 使得 $\Phi_{t_k}^{\phi(X)}(y) \in V$ 且 $t_4 - t_j \leq \epsilon$ . 则 $\Phi_{t_j}^{\phi(X)}(y)$ 可以扩张到 $t_k + \epsilon \geq d$ , 矛盾。因此 $t_4 \geq t_2$ . 同理可

证,  $t_1 \geq t_3$ 。断言成立。

记  $\pi_M$  为从  $Orb((x_0, y_0), \mathcal{X})$  到  $M$  的投影映射。

首先,  $\pi_M$  是满射。由 Rashevsky-Chow 定理 (参见文献 [24, 25]),  $\forall x \in M$ , 都存在向量场  $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{L}_1$ ,  $r_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , 满足  $x = \Phi_{t_k}^{X_k} \circ \dots \circ \Phi_{t_1}^{X_1}(x_0)$ 。

有

$$\Phi_{t_k}^{(X_k, \phi(X_k))} \circ \dots \circ \Phi_{t_1}^{(X_1, \phi(X_1))}(x_0, y_0) \in Orb((x_0, y_0), \mathcal{X}).$$

并且

$$\pi_M(\Phi_{t_k}^{(X_k, \phi(X_k))} \circ \dots \circ \Phi_{t_1}^{(X_1, \phi(X_1))}(x_0, y_0)) = x.$$

断言:  $\pi_M$  为复叠映射。首先,  $\pi_M$  是一个局部微分同胚。考虑映射

$$\begin{aligned} \Psi &: (-\epsilon, \epsilon)^n \rightarrow M \\ (t_1, \dots, t_n) &\rightarrow \Phi_{t_n}^{X_n} \circ \dots \circ \Phi_{t_1}^{X_1}(x) \end{aligned} \quad (3.9)$$

■

当  $\text{span}_{\mathbb{R}}\{X_1(x), \dots, X_n(x)\} = T_x M$ , 则  $\Psi$  是一个到像集的微分同胚。同理,

$$\begin{aligned} \Theta &: (-\epsilon, \epsilon)^n \rightarrow Orb((x, y), \mathcal{X}) \\ (t_1, \dots, t_n) &\rightarrow \Phi_{t_n}^{(X_n, \phi(X_n))} \circ \dots \circ \Phi_{t_1}^{(X_1, \phi(X_1))}(x, y) \end{aligned}$$

也是一个到像集的微分同胚。因此  $\Phi \circ \Theta^{-1}$  是一个微分同胚。所以  $\pi_M$  是一个局部微分同胚。又  $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in \pi_M^{-1}(x)$ , 存在  $(x, y_1), (x, y_2)$  的局部邻域  $U_1, U_2$ , 满足  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ 。否则, 存在  $t_1, \dots, t_n \in (-\epsilon, \epsilon)$ , 满足  $\Phi_{t_n}^{\phi(X_n)} \circ \dots \circ \Phi_{t_1}^{\phi(X_1)}(y_1) = \Phi_{t_n}^{\phi(X_n)} \circ \dots \circ \Phi_{t_1}^{\phi(X_1)}(y_2)$ 。这就给出  $y_1 = y_2$ 。矛盾。下面证明  $\pi_M^{-1}(V) = \cup_{(x, y) \in \pi_M^{-1}(x)} U(x, y)$ 。这里,  $V$  是  $x$  的局部邻域。 $U$  是  $Orb((x_0, y_0), \mathcal{X})$  在  $(x, y)$  的局部邻域。 $\forall (x_1, y_1) \in \pi_M^{-1}(V)$ , 存在  $t_1, \dots, t_n$ , 满足  $x_1 = \Phi_{t_n}^{X_n} \circ \dots \circ \Phi_{t_1}^{X_1}(x)$ , 令  $y = \Phi_{-t_1}^{\phi(X_1)} \circ \dots \circ \Phi_{-t_n}^{\phi(X_n)}(y_1)$ , 则  $(x, y) \in Orb((x_0, y_0), \mathcal{X})$  且  $(x_1, y_1) \in U(x, y)$ 。

由于  $M$  单连通, 因此  $\pi_M$  是微分同胚。

(3) 令  $\Phi = \pi_N \circ (\pi_M)^{-1}$ 。

$\forall X \in \mathcal{X}, x \in M$ ,  $(X(x), \phi(X)(\Phi(x))) \in T_{(x, \Phi(x))} Orb((x_0, y_0), \mathcal{X})$ 。有

$$\begin{aligned} \Phi_* X(\Phi(x)) &= T_{\pi_M^{-1}(x)} \pi_N \circ T_x \pi_M^{-1}(X(x)) \\ &= T_{\pi_M^{-1}(x)} \pi_N(X(x), \phi(X)(\Phi(x))) = \phi(X)(\Phi(x)). \end{aligned}$$

(4)  $\Phi$  的唯一性。 $\forall x \in M$ , 存在存在向量场  $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{L}_1$ ,  $r_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , 满

是  $x = \Phi_{t_k}^{X_k} \circ \cdots \circ \Phi_{t_1}^{X_1}(x_0)$ .

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi \circ \Phi_{t_k}^{X_k} \circ \cdots \circ \Phi_{t_1}^{X_1}(x_0) \\ &= \Phi_{t_k}^{\phi(X_k)} \circ \Phi \circ \Phi_{t_{k-1}}^{X_{k-1}} \circ \cdots \circ \Phi_{t_1}^{X_1}(x_0) \\ &= \Phi_{t_k}^{\phi(X_k)} \circ \cdots \circ \Phi_{t_1}^{\phi(X_1)}(y_0).\end{aligned}$$

再由定理3.1, 可知结论成立。

### 3.3.2 有限维李代数的一个结论

本小节讨论上小节内容的一个特殊情形: 向量场李代数为有限维的几何实现。

**定理 3.3:** 给定流形  $M$  上的一个传递李子代数  $\mathcal{L} \in \Gamma(TM)$ 。若  $\mathcal{L}$  为有限维李代数且  $\forall X \in \mathcal{L}$ ,  $X$  都完备。则存在微分同胚  $\Phi: M \rightarrow G$  或  $\Phi: M \rightarrow G/H$ , 这里  $G$  为一个连通李群,  $H$  是它的子群。

**证明:** 因为  $\mathcal{L}$  为有限维李代数, 所以必存在连通且单联通李群  $G$ , 以及李代数同构  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}$ , 其中  $\mathfrak{g}$  为李群  $G$  对应的的右不变向量场生成的李代数。由于  $\forall X \in \mathcal{L}$ ,  $X$  都完备, 回顾定理3.2的证明, 可知存在纤维丛  $\Phi: G \rightarrow M$ , 满足  $\phi = \Phi_*|_{\mathfrak{g}}$ 。

考虑由向量场族  $\mathcal{X} = \{(X, \phi(X)) \mid X \in \mathfrak{g}\}$  过  $(e, y_0)$  点的轨道  $Orb((e, y_0), \mathcal{X})$ , 设  $H$  为  $y_0$  点处的迷向子群, 也即  $G$  中满足  $(x, y_0) \in Orb((e, y_0), \mathcal{X})$  的点的集合。对任给的  $(x_1, y_1) \in Orb((e, y_0), \mathcal{X})$ , 存在  $t_1, \dots, t_r$  以及  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{g}$ , 满足

$$\begin{aligned}x_1 &= \Phi_{t_1}^{X_1} \circ \cdots \circ \Phi_{t_r}^{X_r}(e), \\ y_1 &= \Phi_{t_1}^{\phi(X_1)} \circ \cdots \circ \Phi_{t_r}^{\phi(X_r)}(y_0).\end{aligned}$$

设  $(x_2, y_1) \in Orb((e, y_0), \mathcal{X})$ , 且存在  $s_1, \dots, s_k$  以及  $Z_1, \dots, Z_k \in \mathfrak{g}$ , 满足

$$\begin{aligned}x_2 &= \Phi_{t_1}^{Z_1} \circ \cdots \circ \Phi_{t_k}^{Z_k}(e), \\ y_1 &= \Phi_{t_1}^{\phi(Z_1)} \circ \cdots \circ \Phi_{t_k}^{\phi(Z_k)}(y_0).\end{aligned}$$

我们有

$$x_1^{-1}x_2 \in H. \tag{3.10}$$

■

另一方面, 对任意的  $h \in H$ ,  $(x_1 h, y_1) \in \text{Orb}((e, y_0), \mathcal{X})$ 。这就给出了  $G/H$  与  $M$  间的一个微分同胚。定理得证。

**注释 3.7:** 定理3.3曾在文献[27]中给出。这里将[27]中的结论推广到一般仿射控制系统模型上去, 得到一个一般性的结论定理3.2, 将上述定理作为推论给出。

## 第四章 一类拉格朗日力学控制系统的约化结构

### 结构

本章研究拉格朗日力学控制系统的约化结构。拉格朗日力学控制系统作为一类特殊的仿射控制系统，其本身具有丰富的几何结构。首先回顾切丛上的几何，接着引入拉格朗日力学控制系统模型。最后着重讨论测地可达力学控制系统的约化结构。

#### 4.1 切丛几何

本节回顾切丛上的几何。 $n$ 维流形 $Q$ 上的仿射联络是一个映射

$$\nabla : \Gamma^\infty(TQ) \times \Gamma^\infty(TQ) \rightarrow \Gamma^\infty(TQ)$$

$$(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$$

满足如下条件：

(AC1)  $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$  为 $\mathbb{R}$ -双线性；

(AC2)  $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ ,  $f \in C^\infty(Q)$ ；

(AC3)  $\nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + (L_X f)Y$ ,  $f \in C^\infty(Q)$ 。

在 $Q$ 上的局部坐标 $(x^1, \dots, x^n)$ 下，仿射联络 $\nabla$ 的Christoffel符号 $\Gamma_{ij}^k$ 定义为

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

$Q$ 上仿射联络 $\nabla$ 的测地线是 $Q$ 上的光滑曲线 $\gamma$ ，满足 $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0$ 。在局部坐标下，测地线方程有如下形式：

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

这些二阶方程等价于 $TQ$ 上的一阶方程：

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= y^i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \dot{y}^j &= -\Gamma_{kl}^j y^k y^l, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

由上述方程定义了 $TQ$ 上的向量场 $S$ , 称其为 $\nabla$ 上的测地漂。局部坐标下,

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{kl}^j y^k y^l \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

仿射联络 $\nabla$  称为完备的, 如果对任给的 $x \in Q$  以及  $X \in T_x Q$ , 给定初始条件 $(x, X)$ , 测地线 $\gamma(t)$  对所有的 $t$ 均有定义。也即 $TQ$ 上的向量场 $S$ 是完备的。

分布 $D$  称为测地不变的, 如果对 $\nabla$ 的任一测地线 $c: [a, b] \rightarrow Q$ , 若 $\dot{c}(a) \in D_{c(a)}$ , 则对任给的 $t \in [a, b]$ ,  $\dot{c}(t) \in D_{c(t)}$ 。分布 $D$ 称为是全测地的, 如果它是对合分布且测地不变的。我们称仿射联络 $\nabla$ 限制在 $D$ 上, 如果对任意 $X \in \Gamma^\infty(TQ)$ ,  $Y \in \Gamma^\infty(D)$ , 都有 $\nabla_X Y \in \Gamma^\infty(D)$ 。

$X, Y \in \Gamma^\infty(TQ)$ 的对称积定义为如下向量场

$$\langle X : Y \rangle = \nabla_X Y + \nabla_Y X.$$

分布 $D$ 称为是测地不变的, 如果对任意的 $X, Y \in \Gamma^\infty(D)$ ,  $\langle X : Y \rangle \in \Gamma^\infty(D)$ 。

定义挠率张量 $T: \Gamma^\infty(TQ) \times \Gamma^\infty(TQ) \rightarrow \Gamma^\infty(TQ)$ ,  $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ 。我们称 $\nabla$  是对称的, 如果对任意 $X, Y \in \Gamma^\infty(TQ)$ ,  $T(X, Y) = 0$ 。在局部坐标下, 有 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, 1 \leq i, j, k \leq n$ 。定义曲率张量 $R: \Gamma^\infty(TQ) \times \Gamma^\infty(TQ) \times \Gamma^\infty(TQ) \rightarrow \Gamma^\infty(TQ)$ ,  $R(X, Y)W = \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X, Y]} W$ 。文中所有仿射联络均认为是对称的。

对 $Q$ 上的仿射联络 $\nabla$ , 对任意 $v_q \in TQ$ , 我们有分解 $T_{v_q} TQ \simeq H_{v_q}(TQ) \oplus V_{v_q}(TQ)$  (参见文献[28,29])。这里 $HTQ$  表示水平子丛,  $VTQ$  表示垂直子丛。在任给一点 $v_q \in TQ$ , 线性映射 $T_{v_q} \tau_Q: T_{v_q} TQ \rightarrow T_{v_q} Q$ 限制在水平子空间 $H_{v_q} TQ$ 上是一个同构。这里 $\tau_Q: TQ \rightarrow Q$  为投影映射。定义 $u_q$  到 $v_q$  的水平提升如下:

$$\text{hlft}(v_q, u_q) = (T_{v_q} \tau_Q|_{H_{v_q} TQ})^{-1}(u_q).$$

向量场 $X \in \Gamma^\infty(TQ)$  的水平提升为向量场 $X^H \in \Gamma^\infty(TTQ)$ :

$$X^H(v_q) = \text{hlft}(v_q, X(q)).$$

定义 $u_q$ 到 $v_q$ 的垂直提升如下:

$$\text{vlft}(v_q, u_q) = \frac{d}{dt}(v_q + tu_q)|_{t=0}, \quad v_q \in TQ.$$

向量场  $X \in \Gamma^\infty(TQ)$  的垂直提升为向量场  $X^{\text{vlt}} \in \Gamma^\infty(TTQ)$ :

$$X^{\text{vlt}}(v_q) = \text{vlt}(v_q, X(q)).$$

局部坐标下, 若  $X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ , 则

$$X^H(v_q) = X^i(q) \left( \frac{\partial}{\partial q^i} - \Gamma_{ik}^j(q) v^k \frac{\partial}{\partial v^j} \right), \quad (4.1)$$

$$X^{\text{vlt}}(v_q) = X^i(q) \frac{\partial}{\partial v^i}. \quad (4.2)$$

我们有

$$[S, X^{\text{vlt}}](v_q) = (-X)^H(v_q) + \text{vlt}(v_q, \nabla_{v_q} X), \quad (4.3)$$

$$[X_1^{\text{vlt}}, [S, X_2^{\text{vlt}}]](v_q) = \langle X_1 : X_2 \rangle^{\text{vlt}}(v_q), \quad (4.4)$$

$$[S, [S, X^{\text{vlt}}]](v_q) = \text{hlt}(v_q, -2\nabla_{v_q} X) + \text{vlt}(v_q, R(X(q), v_q)v_q) + \text{ver}_{v_q}(\nabla_{\text{hlt}(v_q, v_q)}^H Z), \quad (4.5)$$

这里  $Z$  是  $TQ$  上的向量场定义如下

$$Z(v_q) = \text{vlt}(v_q, \nabla_{v_q} X). \quad (4.6)$$

$\nabla^H$  表示联络的水平提升,  $\text{ver}$  代表垂直投影映射  $\text{ver}_{v_q} : T_{v_q} TQ \rightarrow V_{v_q} TQ$ 。

## 4.2 拉格朗日力学系统介绍

一个拉格朗日力学控制系统由如下组给出4元组  $(Q, \nabla, \mathfrak{I}_0, d)^{[30]}$ :

- (1)  $Q$  是一个连通的  $n$  维构型流形;
- (2)  $\nabla$  为  $Q$  上一个对称仿射联络;
- (3)  $\mathfrak{I}_0 = (g_0, g_1, \dots, g_m)$  为  $Q$  上的向量场;
- (4)  $d : TQ \rightarrow TQ$  是将纤维  $T_q Q$  映到纤维  $T_q Q$  的线性映射,  $\forall q \in Q$ 。

这里  $d$  代表作用在系统上的耗散力或陀螺力,  $g_0$  表示不可控力,  $g_1, \dots, g_m$  表示受控力。

拉格朗日力学系统的轨线  $\gamma : I \rightarrow Q, I \subseteq \mathbb{R}$  满足:

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = g_0(\gamma(t)) + d(\dot{\gamma}(t)) + \sum_{r=1}^m u_r g_r(\gamma(t)). \quad (4.7)$$

作为 $TQ$ 上的系统，我们有：

$$\dot{\Upsilon}(t) = S(\Upsilon(t)) + g_0^{\text{vlt}}(\gamma(t)) + d^{\text{vlt}}(\dot{\gamma}(t)) + \sum_{r=1}^m u_r g_r^{\text{vlt}}(\gamma(t)). \quad (4.8)$$

这里 $S$ 是 $\nabla$ 的测地漂。

一个仿射联络控制系统 $(Q, \nabla, \mathfrak{J})$ 是 $d = 0, g_0 = 0$ 的拉格朗日力学控制系统：

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = \sum_{r=1}^m u_r g_r(\gamma(t)). \quad (4.9)$$

上述方程可写为：

$$\dot{\Upsilon}(t) = S(\Upsilon(t)) + \sum_{r=1}^m u_r g_r^{\text{vlt}}(\gamma(t)). \quad (4.10)$$

## 4.3 一类拉格朗日力学控制系统的约化结构

### 4.3.1 问题陈述

本节考察一类仿射联络控制系统保力学结构的商系统的存在性。在仿射联络控制系统的范畴内考察态射的性质首先由Lewis在文献[18]给出。文献[18]对映射形式做了限制： $(\phi, D\phi)$ ，其中 $\phi$ 是构型空间之间的映射。我们考虑一般情形，有如下问题：

假设 $Q$ 上的仿射联络 $\nabla$ 均完备，给定测地可达仿射联络控制系统 $(Q, \nabla, \mathfrak{J})$ ，

(i) 何时存在一个拉格朗日力学控制系统 $(\tilde{Q}, \tilde{\nabla}, \tilde{\mathfrak{J}}_0, d)$ 以及一个光滑满映射 $\tau: U \rightarrow V$ ，满足：

$$\begin{aligned} \tau_* S &= \tilde{S} + \tilde{g}_0^{\text{vlt}} + \tilde{d}^{\text{vlt}}, \\ \tau_* g_r^{\text{vlt}} &= \tilde{g}_r^{\text{vlt}}? \end{aligned} \quad (4.11)$$

这里， $U$ 和 $V$ 分别表示 $(x_0, v_0) \in TQ$ 和 $(\tilde{x}_0, \tilde{v}_0) \in T\tilde{Q}$ 的局部邻域， $v_0 \in T_{x_0}Q$ ， $\tilde{v}_0 \in T_{\tilde{x}_0}\tilde{Q}$ 。

(ii) 何时存在一个拉格朗日力学控制系统 $(\tilde{Q}, \tilde{\nabla}, \tilde{\mathfrak{J}}_0, d)$ 以及一个光滑满映射 $\tau: TQ \rightarrow T\tilde{Q}$ ，满足(4.11)？

我们称测地可达仿射联络控制系统 $(Q, \nabla, \mathfrak{J})$ 局部(全局)承接一个状态空间

商力学控制系统，如果(i) ((ii))是可解的。

较之文献[18]中的问题，这里并不限定构型空间切丛间映射的任何特殊形式。主要目的就是确定保力学结构的状态空间商映射的结构，从而回答商力学控制系统的存在性。

### 4.3.2 局部结论

本小节讨论问题(i)。考虑拉格朗日力学系统(4.7)。设 $\mathcal{SYM}(g_1, \dots, g_m)$ 是 $Q$ 上包含输入向量场 $g_1, \dots, g_m$ 的最小的分布，并且它在由联络 $\nabla$ 定义的对称积运算下是闭的。

**定义 4.1:** 称拉格朗日力学控制系统(4.7)在 $x_0 \in Q$ 点处是测地可达的，若 $\mathcal{SYM}(g_1, \dots, g_m)(x_0) = T_{x_0}Q$ 。称(4.7)是测地可达的，若上述等式在所有 $x_0 \in Q$ 处均成立。

如下定理回答了上小节中的问题(i)。

**定理 4.1:** 若 $Q$ 上的仿射联络 $\nabla$ 是完备的，则测地可达仿射联络控制系统 $(Q, \nabla, \mathfrak{J})$ 局部承接一个状态空间商力学系统当且仅当存在定义在 $x_0 \in Q$ 的局部邻域 $W$ 上的对合分布 $D$ ，使得仿射联络 $\nabla$ 限制在 $D$ 上， $\nabla$ 的曲率张量 $R$ 满足对任意的 $X \in \Gamma^\infty(D)$ ， $v \in \Gamma^\infty(TW)$ ，有 $R(X, v)v \in \Gamma^\infty(D)$ ，此外， $[g_i, D] \subseteq D$ ， $i = 1, \dots, m$ 。

下面我们把问题(i)和由测地可达力学控制系统 $(Q, \nabla, \mathfrak{J})$ 的不变分布诱导的商力学控制系统的存在性问题相联系。

由于仿射联络控制系统 $(Q, \nabla, \mathfrak{J})$ 是测地可达的，直接计算可知，它满足李代数秩条件。由于 $Q$ 上的仿射联络 $\nabla$ 是完备的，我们知道测地漂 $S$ 也是完备的。向量场 $g_1^{\text{vlt}}, \dots, g_r^{\text{vlt}}$ 的完备性是显然的。根据命题3.3以及淹没的局部表示，问题(i)是可解的当且仅当存在由测地可达仿射联络控制系统 $(Q, \nabla, \mathfrak{J})$ 在某点 $(q_0, v_0) \in TQ$ 附近的不变分布诱导的商力学控制系统 $(\tilde{Q}, \tilde{\nabla}, \tilde{\mathfrak{J}}_0, d)$ 。

如下研究何时测地可达仿射联络控制系统承接由不变分布诱导的商力学控制系统。回顾二仿射控制系统被称为是状态等价的，若它们由一个微分同胚对应于相同的控制输入所联系。具体来说，考虑二仿射控制系统

$$\dot{y} = f_0(y) + \sum_{i=1}^r u_i f_i(y), \quad y \in M, \quad (4.12)$$

$$\dot{\tilde{y}} = \tilde{f}_0(\tilde{y}) + \sum_{i=1}^r u_i \tilde{f}_i(\tilde{y}), \quad \tilde{y} \in \tilde{M}. \quad (4.13)$$

定义 4.2: 称系统(4.12)和(4.13)是状态等价的, 若存在微分同胚  $\phi: M \rightarrow \tilde{M}$ , 满足

$$\phi_* f_0 = \tilde{f}_0, \quad \phi_* g_i = \tilde{g}_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

系统(4.12)和(4.13)被称为在  $z_0 \in M$  和  $\tilde{z}_0 \in \tilde{M}$  点处是局部状态等价的, 若存在  $z_0$  的邻域  $U$ , 以及  $\tilde{z}_0$  的邻域  $\tilde{U}$ , 满足系统(4.12)限制在  $U$  上和系统(4.13)限制在  $\tilde{U}$  上是状态等价的。

给定  $2n$  维流形  $M$  上的仿射控制系统(3.1), 定义如下向量场族序列:

$$\begin{aligned} v_1 &= \{f_i : 1 \leq i \leq r\} \\ v_2 &= \{[f_i, \text{ad}_{f_0} f_j] : 1 \leq i, j \leq r\} \\ &\dots \\ v_i &= \bigcup_{p+l=i} [v_p, \text{ad}_{f_0} v_l]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

令

$$v := \text{span}_{\mathbb{R}} \bigcup_{i=1}^{\infty} v_i.$$

则有:

命题 4.3: 拉格朗日力学系统(4.7) 在  $x_0 \in Q$  处是测地可达的, 若存在  $y \in T_{x_0} Q$ , 满足作为  $TQ$  上的仿射控制系统(4.8), 它满足  $\dim v(x_0, y) = n$ 。若仿射控制系统(3.1) 在  $y_0 \in M$  处, 局部状态等价于一个测地可达力学系统(4.8), 则对任意的  $y_0$  邻域内的点  $y$ , 有:

- (1)  $\dim v(y) = n$  and  $\dim(v + [f_0, v])(y) = 2n$ ,
- (2)  $[v, v](y) = 0$ 。

若系统(3.1)在  $y_0 \in M$  处局部状态等价于一个在零速度点  $(x_0, 0)$  附近的测地可达力学控制系统, 则除了条件(1) 和(2), 还有

- (3)  $f_0(y_0) \in v(y_0)$ 。

证明: 对力学控制系统(4.7), 有:

$$\langle g_i : g_j \rangle^{\text{vlt}} = \left[ g_i^{\text{vlt}}, \text{ad}_{S+g_0^{\text{vlt}}+d^{\text{vlt}} g_j^{\text{vlt}}} g_j^{\text{vlt}} \right]. \quad (4.15)$$

■

直接计算可知命题成立。

如下命题指出了由测地可达力学系统的不变分布诱导的商力学系统的力学结构的唯一性。对力学结构唯一性的概念，参见文献[31]。

**命题 4.4:** 若测地可达力学控制系统承接一个由不变分布 $\tilde{D}$ 诱导的商力学控制系统，则该商系统是测地可达的。

**证明:** 取 $(x_0, v_0) \in TQ$ 处的局部坐标 $(U, x^i)$ ，使得不变分布 $\tilde{D} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{2k}}\right\}$ 。

令 $x = (x^1, \dots, x^{2k})$ ,  $y = (x^{2k+1}, \dots, x^{2n})$ 。则测地可达力学控制系统有如下局部分解：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f^1(x, y) + \sum_{i=1}^m u_i g_i^1(x, y), \\ \dot{y} &= f^2(y) + \sum_{i=1}^m u_i g_i^2(y),\end{aligned}\tag{4.16}$$

这里

$$\dot{y} = f^2(y) + \sum_{i=1}^m u_i g_i^2(y)\tag{4.17}$$

是一个具有形式(4.8)的力学控制系统。

对系统(4.16)，由(4.14)，我们得到对应于它的李代数 $\nu$ 。则任一向量场 $G \in \nu$ 有如下形式：

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix},\tag{4.18}$$

这里 $G_2$ 是根据(4.14)对应于系统(4.17)的李代数。

根据命题4.3， $\dim(\nu + [f, \nu])(z) = 2n$ 。这里， $z = (z^1, z^2)$ 在 $(x_0, v_0) = (z_0^1, z_0^2)$ 的局部邻域内。

由此，对 $z_0^2$ 的局部邻域内的点 $z^2$ ，有

$$\dim(\tilde{\nu} + [f^2, \tilde{\nu}])(z^2) = 2n - 2k.\tag{4.19}$$

所以

$$\dim \tilde{\nu}(z^2) \geq n - k.\tag{4.20}$$

另一方面，由于(4.17)是一个 $2n - 2k$ 维的力学控制系统，则

$$\dim \tilde{v}(z^2) \leq n - k. \quad (4.21)$$

因此，根据(4.20)和(4.21)，对 $z_0^2$ 的局部邻域内的点 $z^2$ ，有

$$\dim \tilde{v}(z^2) = n - k. \quad (4.22)$$

■

根据命题4.3，力学控制系统(4.17)是测地可达的。

**注释 4.5:** 若一个测地可达力学控制系统在零速度点附近承接由不变分布诱导的商力学控制系统，则由命题4.3中的(3)可知，商力学控制系统也是定义在在零速度点附近。此外，商力学系统在零速度点也满足李代数秩条件。由此可知，商力学系统是测地可达的，这是因为系统在零速度点处满足李代数秩条件等价于测地可达性<sup>[32]</sup>。然而，若原测地可达力学控制系统不是在零速度点附近，就不能推断商系统是定义在零速度附近。而力学控制系统在非零速度处满足李代数秩条件，并不能得出测地可达性。由此可见上述命题的必要性。

对全驱动力学系统，有：

**推论 4.6:** 由全驱动拉格朗日力学控制系统的不变分布诱导的商力学系统一定是全驱动的。

**证明:** 由上述命题证明，结论显然。

如下来识别能诱导商力学控制系统的不变分布的结构。

**命题 4.7:** 若测地可达力学控制系统在 $(x_0, v_0) \in TQ$ 点附近承接由 $2k$ 维不变分布 $\tilde{D}$ 诱导的商力学控制系统，那么存在点 $x_0 \in Q$ 邻域上的 $k$ 维分布 $D$ ，满足对 $(x_0, v_0)$ 局部邻域内的任意点 $(q, v)$ ，都有 $D^{\text{vlt}}(q, v) \subseteq \tilde{D}(q, v)$ 。

**证明:** 选取 $(x_0, v_0) \in TQ$ 邻域上的坐标 $(U, x^i)$ ，使得 $\tilde{D} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{2k}}\right\}$ 。记 $x = (x^1, \dots, x^{2k})$ ， $y = (x^{2k+1}, \dots, x^{2n})$ 。则原测地可达力学控制系统有如下分解：

$$\dot{x} = f^1(x, y) + \sum_{i=1}^m u_i g_i^1(x, y),$$

$$\dot{y} = f^2(y) + \sum_{i=1}^m u_i g_i^2(y).$$

由命题4.4可知，商力学控制系统

$$\dot{y} = f^2(y) + \sum_{i=1}^m u_i g_i^2(y) \quad (4.23)$$

是测地可达的。

根据(4.14)，我们得到测地可达力学系统的李代数 $\mathfrak{v}$ ，可以选择 $n$ 个在 $(x_0, v_0) = (z_0^1, z_0^2)$ 局部邻域上线性独立的向量场 $V_1, \dots, V_n$ ，并且满足在局部坐标 $(U, x^i)$ 上， $V_1, \dots, V_n$  满足

$$\text{span}\{V_i^2 : i = 1, \dots, n\}(z^2) = \tilde{\mathfrak{v}}(z^2),$$

对 $z_0^2$ 局部邻域内的任意点 $z^2$ 均成立。这里

$$V_i = (V_i^1, V_i^2),$$

$V_i^2$ 是根据(4.14)得到的系统(4.23)的李代数 $\tilde{\mathfrak{v}}$ ，

由于 $\dim \tilde{\mathfrak{v}}(z^2) = n - k$ ，假设 $V_1^2, \dots, V_{n-k}^2$  是线性独立的，可以得知存在函数 $\alpha_i^j \in C^\infty(y)$ ，满足

$$V_i^2 = \alpha_i^j V_j^2, \quad (4.24)$$

对 $i = n - k + 1, \dots, n$ ， $j = 1, \dots, n - k$ . 令

$$\tilde{V}_i = V_i - \alpha_i^j V_j. \quad (4.25)$$

$i = n - k + 1, \dots, n$ ， $j = 1, \dots, n - k$ . 则如下 $k$ 个线性独立向量场

$$\tilde{V}_{n-k+1}, \dots, \tilde{V}_n \in \Gamma^\infty(\tilde{D}). \quad (4.26)$$

根据(4.24)和命题4.3中的(2)，有：

$$[\alpha_i^j V_j^2, V_l^2] = 0,$$

$i = n - k + 1, \dots, n, j = 1, \dots, n - k, l = 1, \dots, n$ , 由此

$$V_l^2(\alpha_i^j) = 0.$$

由于  $\alpha_i^j \in C^\infty(y)$ , 则

$$V_l(\alpha_i^j) = 0, \quad (4.27)$$

$i = n - k + 1, \dots, n, j = 1, \dots, n - k, l = 1, \dots, n$ .

考虑  $x_0 \in Q$  附近的局部坐标  $(V, q^i)$ , 它给出  $TQ$  上的局部坐标  $(q^1, \dots, q^n, v^1, \dots, v^n)$ . 在这个坐标下,

$$\text{span}\{V_1, \dots, V_n\} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n}\right\}. \quad (4.28)$$

■

于是根据(4.27), 有  $\alpha_i^j \in C^\infty(q^1, \dots, q^n)$ .

根据(4.25),  $\tilde{V}_i$  具有如下形式  $\tilde{V}_i = v_i^{\text{lift}}, i = n - k + 1, \dots, n$ , 这里  $v_{n-k+1}, \dots, v_n$  是  $q_0 \in Q$  局部邻域上的  $k$  个线性无关向量场。令  $D = \text{span}\{v_{n-k+1}, \dots, v_n\}$ 。则根据(4.26), 命题成立。

如下证明定理4.1。

**证明:** 需要证明如下命题:

测地可达仿射联络控制系统  $(Q, \nabla, \mathfrak{J})$  在点  $(x_0, v_0) \in TQ$  附近承接由不变分布诱导的商力学系统当且仅当存在定义在  $x_0 \in Q$  的局部邻域  $W$  上的对合分布  $D$ , 满足仿射联络  $\nabla$  限制在  $D$  上,  $\nabla$  的曲率张量  $R$  满足  $R(X, v)v \in \Gamma^\infty(D)$ , 对任意的  $X \in \Gamma^\infty(D), v \in \Gamma^\infty(TW)$ , 此外,  $[g_i, D] \subseteq D, i = 1, \dots, m$ .

则根据如上讨论可知定理4.1成立。

首先证明“仅当”部分。令  $\tilde{D}$  为测地可达仿射联络控制系统  $(Q, \nabla, \mathfrak{J})$  的  $2k$  维不变分布, 它诱导商力学控制系统。则根据命题4.7, 有

$$D^{\text{lift}}(q, v_q) \subseteq \tilde{D}(q, v_q),$$

这里  $D$  是一个定义在  $x_0 \in Q$  的局部邻域  $W$  上的  $k$  维分布,  $(q, v_q)$  在  $(x_0, v_0)$  的局部邻域  $\tilde{W}$  内, 并且  $\tau_Q(\tilde{W}) = W$ 。这里  $\tau_Q: TQ \rightarrow Q$  是投影映射。由于  $\tilde{D}$  在测地漂  $S$  下是不变的, 有

$$[S, D^{\text{lift}}] \subseteq \tilde{D}.$$

因为  $\dim \text{span}\{D^{\text{vlt}}, [S, D^{\text{vlt}}]\} = 2k = \dim \tilde{D}$ , 则

$$\tilde{D} = \text{span}\{D^{\text{vlt}}, [S, D^{\text{vlt}}]\}.$$

由于  $[S, [S, D^{\text{vlt}}]] \subseteq \tilde{D}$ , 则根据(4.3)和(4.5)得知

$$\nabla_{v_q} X \in \Gamma^\infty(D), \quad (4.29)$$

对任给的  $X \in \Gamma^\infty(D), (q, v_q) \in \tilde{W}$ . 仿射联络  $\nabla$  是  $\mathbb{R}$ -双线性的, 并且分布  $D$  限制在点  $q \in Q$  上是线性空间, 因此有

$$\nabla_{v_q} X \in \Gamma^\infty(D), \quad (4.30)$$

对任给的  $X \in \Gamma^\infty(D), v_q \in T_q W$ . 也就是说, 仿射联络  $\nabla$  限制在  $D$  上. 由此,

$$\tilde{D} = \text{span}\{D^H, D^{\text{vlt}}\}. \quad (4.31)$$

根据(4.5),

$$\text{vlt}(v_q, R(X(q), v_q)v_q) + \text{ver}_{v_q}(\nabla_{\text{hlt}(v_q, v_q)}^H Z) \in D^{\text{vlt}}(v_q)$$

对任意的  $X \in \Gamma^\infty(D), (q, v_q) \in \tilde{W}$ . 这里  $Z$  是  $TQ$  上的向量场, 有形式(4.6).

因为  $\nabla$  限制在  $D$  上, 根据  $\nabla^H$  的定义, 对任意的  $X \in \Gamma^\infty(D)$ ,  $\text{ver}_{v_q}(\nabla_{\text{hlt}(v_q, v_q)}^H Z) \in D^{\text{vlt}}(v_q)$ . 于是

$$R(X(q), v_q)v_q \in D(q). \quad (4.32)$$

对任给的  $X \in \Gamma^\infty(D), (q, v_q) \in \tilde{W}$ , 这就有

$$R(X(q), v_q)v_q \in D(q). \quad (4.33)$$

对任给的  $X \in \Gamma^\infty(D), v_q \in T_q W$ . 因为  $\tilde{D}$  是对合的, 则

$$[[S, D^{\text{vlt}}], [S, D^{\text{vlt}}]] \subseteq \tilde{D}.$$

根据(4.3),  $D$  对合.

根据(4.31), 由于 $[g_i^{\text{vlt}}, \tilde{D}] \subseteq \tilde{D}, i = 1, \dots, m$ , 所以

$$[g_i^{\text{vlt}}, X^H] = (\nabla_X g_i)^{\text{vlt}} \in \Gamma^\infty(\tilde{D}),$$

对任给的 $X \in \Gamma^\infty(D), i = 1, \dots, m$ .

因此 $\nabla_X g_i \in \Gamma^\infty(D)$ .

于是对任给的 $X \in \Gamma^\infty(D), i = 1, \dots, m$ ,

$$[X, g_i] = \nabla_X g_i - \nabla_{g_i} X \in \Gamma^\infty(D).$$

也就是说

$$[g_i, D] \subseteq D, \quad (4.34)$$

$i = 1, \dots, m$ . 事实上, 在局部坐标 $(x, y)$ 下 (这里 $(x, y)$ 满足 $D = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}\}$ ), 通过计算可知

$$\tilde{D} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^k}\right\}.$$

因此在局部坐标 $(x, y)$ 下, 商系统具有如下形式

$$\begin{aligned} \dot{x}^{k+1} &= y^{k+1}, \\ &\dots \\ \dot{x}^n &= y^n, \\ \dot{y}^{k+1} &= - \sum_{k+1 \leq i, j \leq n} \Gamma_{ij}^{k+1}(x^{k+1}, \dots, x^n) y^i y^j + \sum_{i=1}^m u^i g_i^{k+1}(x^{k+1}, \dots, x^n), \\ &\dots \\ \dot{y}^n &= - \sum_{k+1 \leq i, j \leq n} \Gamma_{ij}^n(x^{k+1}, \dots, x^n) y^i y^j + \sum_{i=1}^m u^i g_i^n(x^{k+1}, \dots, x^n), \end{aligned} \quad (4.35)$$

它是一个仿射联络控制系统。

下面证明充分性。假设存在 $k$ 维对合分布 $D$ 满足定理4.1中陈述的条件。

令

$$\tilde{D} = \text{span}\{D^{\text{vlt}}, [S, D^{\text{vlt}}]\}.$$

由于仿射联络 $\nabla$ 限制在 $D$ 上, 根据(4.3),

$$\tilde{D} = \text{span}\{D^H, D^{\text{vlt}}\}.$$

另一方面, 由于曲率张量满足 $R(X, v)v \in \Gamma^\infty(D)$ , 对任意的 $X \in \Gamma^\infty(D)$ ,  $v \in \Gamma^\infty(TW)$ , 并且仿射联络 $\nabla$ 限制在 $D$ 上, 那么根据(4.5),

$$[S, [S, D^{\text{vlt}}]] \subseteq \text{span}\{D^H, D^{\text{vlt}}\}.$$

因此

$$[S, \tilde{D}] \subseteq \text{span}\{\tilde{D}, [S, [S, D^{\text{vlt}}]]\} = \tilde{D}. \quad (4.36)$$

此外, 由于 $[g_i, D] \subseteq D$ , 并且仿射联络 $\nabla$ 限制在 $D$ 上, 则

$$[g_i^{\text{vlt}}, X^H] = (\nabla_X g_i)^{\text{vlt}} = (\nabla_{g_i} X + [X, g_i])^{\text{vlt}} \in \Gamma^\infty(D^{\text{vlt}}),$$

对任给的 $X \in \Gamma^\infty(D)$ 。这就有

$$[g_i^{\text{vlt}}, \tilde{D}] \subseteq \tilde{D}, \quad (4.37)$$

$i = 1, \dots, m$ . 由于分布 $D$ 对合且仿射联络 $\nabla$ 限制在 $D$ 上, 直接计算可知 $\tilde{D}$ 是对合的。则由(4.36)和(4.37)可知 $\tilde{D}$ 测地可达仿射联络控制系统(4.10)的一个不变分布。下面仅需证明由分布 $\tilde{D}$ 诱导的商系统是力学控制系统。选取局部坐标 $(x, y)$ 满足 $D = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}\}$ , 通过计算我们有

$$\tilde{D} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^k}\right\}. \quad (4.38)$$

则在局部坐标 $(x, y)$ 下, 商系统具有形式(4.35), 它是力学控制系统。

通过定理4.1和命题4.4的证明, 我们同时也获得下述推论, 由它可知, 由测地可达仿射联络控制系统的不变分布诱导的商力学控制系统一定继承原仿射联络控制系统的力学结构。

**推论 4.8:** 若问题(i)可解, 则商映射 $\tau: U \rightarrow V$ 一定具有如下形式:  $\tau = (\Phi, T\Phi)$ , 其中 $\Phi: U_1 \rightarrow V_1$ 是一个淹没,  $U_1$ 和 $V_1$ 分别是 $x_0 \in Q$ 和 $\tilde{x}_0 \in \tilde{Q}$ 的局部邻域,  $T\Phi$ 代表 $\Phi$ 的切映射。此外, 商力学系统也是一个测地可达仿射联络控制系统。

对非测地可达仿射联络控制系统, 上述推论不一定成立。商力学系统有可能甚至不是一个仿射联络控制系统。举例如下:

例: 考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的仿射联络控制系统

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^1 &= y^1, \\
 \dot{x}^2 &= y^2, \\
 \dot{x}^3 &= y^3, \\
 \dot{y}^1 &= (y^1)^2 + y^1 y^2, \\
 \dot{y}^2 &= (y^1)^2 - (y^2)^2 + y^1 y^2 + u, \\
 \dot{y}^3 &= v.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

给定一个淹没 $\tau: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\tau(x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, y^3) = (y^1, y^2)$ , 我们有如下商系统:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}^1 &= (y^1)^2 + y^1 y^2, \\
 \dot{y}^2 &= (y^1)^2 - (y^2)^2 + y^1 y^2 + u.
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

令

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}^1 &= y^1, \\
 \tilde{x}^2 &= (y^1)^2 + y^1 y^2,
 \end{aligned}$$

$y^1 < 0$ , 则系统(4.40) 变为

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{x}}^1 &= \tilde{x}^2, \\
 \dot{\tilde{x}}^2 &= 4\tilde{x}^1 \tilde{x}^2 - (\tilde{x}^1)^3 + \tilde{x}^1 u.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

□

系统(4.41) 是一个在 $\tilde{Q} = \{x : x < 0\}$ 上的拉格朗日力学系统, 但它不是仿射联络控制系统, 并且它的力学结构也不是从原系统(4.39)中继承而来。

### 4.3.3 全局结论

本节讨论问题(ii)。

**定理 4.2:** 若 $Q$ 上的仿射联络 $\nabla$ 完备, 并且 $\mathcal{G}$ 中的向量场均完备, 则测地可达仿射联络控制系统 $(Q, \nabla, \mathfrak{Y})$  全局承接一个状态空间商力学控制系统当且仅当构型流形 $Q$ 承接纤维丛结构, 并且垂直分布 $D$ 满足仿射联络 $\nabla$ 限制到 $D$ 上,  $\nabla$ 的曲率

张量 $R$ 满足 $R(X, v)v \in \Gamma^\infty(D)$ , 对任给的 $X \in \Gamma^\infty(D)$ ,  $v \in \Gamma^\infty(TQ)$ , 此外,  $[g_i, D] \subseteq D$ ,  $i = 1, \dots, m$ 。这里,  $\mathcal{G}$ 表示包含 $\mathfrak{V}$ 的最小向量场集合, 并且它在由 $\nabla$ 定义的对称积运算下是闭的。

**证明:** 若问题(ii)可解, 根据(4.11), 有

$$\tau_* v_i = \tilde{v}_i, \quad i \in \mathbb{N}_{>0}, \quad (4.42)$$

这里 $v_i$ 和 $\tilde{v}_i$ 分别是由(4.14)给出的, 对应于测地可达仿射联络控制系统 $(Q, \nabla, \mathfrak{V})$ 和它的商系统 $(\tilde{Q}, \tilde{\nabla}, \tilde{\mathfrak{V}}_0, d)$ 的向量场集合。

另一方面, 根据命题3.3, 我们得知商映射 $\tau: TQ \rightarrow T\tilde{Q}$ 是一个淹没映射。则由上节,  $\tau$ 有如下形式 $\tau = (\Phi, T\Phi)$ , 其中,  $\Phi: Q \rightarrow \tilde{Q}$ 是一个淹没。进一步, 商力学控制系统也是测地可达仿射联络控制系统。因此根据(4.42), 有

$$\Phi_* \mathcal{G} = \tilde{\mathcal{G}}, \quad \blacksquare$$

这里,  $\tilde{\mathcal{G}}$ 表示包含 $\tilde{g}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , 的最小向量场集合, 满足在对称积运算下的闭性。

由于 $\xi$ 和 $\tilde{\xi}$ 的轨道分别为 $Q$ 和 $\tilde{Q}$ , 根据定理3.1可知,  $\Phi: Q \rightarrow \tilde{Q}$ 是纤维丛。根据定理4.1, 结论成立。这就完成了“仅当”部分的证明。定理充分性显然。

回顾一个黎曼流形称作是不可约化的, 若 $T_x Q$ 处和乐群的表示是不可约化的。我们有如下推论:

**推论 4.9:** 设 $(Q, g)$ 是不可约化黎曼流形,  $\nabla$ 为对应的Levi-Civita联络。则对任给的测地可达仿射联络控制系统 $(Q, \nabla, \mathfrak{V})$ 都不可能全局承接状态空间商力学控制系统。

**证明:** 从定理4.2的证明过程中可知, 若测地可达仿射联络控制系统全局承接状态空间商力学控制系统, 则商映射 $\tau: TQ \rightarrow T\tilde{Q}$ 具有如下形式:  $\tau = T\Phi$ , 这里,  $\Phi: Q \rightarrow \tilde{Q}$ 是一个淹没。并且对合分布 $\ker T\Phi$ 满足, 仿射联络 $\nabla$ 限制在 $\ker T\Phi$ 上。因此分布 $\ker T\Phi$ 是测地可达的。另一方面, 我们知道一个黎曼流形是不可约化的当且仅当 $Q$ 上唯一的全测地分布是 $TQ$ 。由此, 结论成立。

**注释 4.10:** 从命题3.3的证明中可知, 为使(3.3)成立, 向量场 $f_0, f_1, \dots, f_r$ 的完备性条件是充分的。由轨道定理可知, 若 $\{h_0, h_1, \dots, h_r\}$ 为 $N$ 上的一族解析向量场,

则  $T_q O_{q_0} = \text{Lie}^\infty \{h_0, h_1, \dots, h_r\}_q$ , 对任给的  $q \in O_{q_0}$ 。在这种情形下, 式(3.3)也成立。类似于上述证明, 我们知道在解析性假设下, 状态空间商映射是一个满淹没。因此, 若去掉  $\nabla$  的完备性假设, 改为要求问题(i), (ii)中的所有对象都是解析的, 则所有以上结论均成立。

## 第五章 一类具无漂特性的仿射控制系统

本章从无漂系统角度出发，考察仿射控制系统的约化结构。首先给出问题陈述及研究动机。然后先对反馈正则的情形给出结论。最后讨论非正则情形。

### 5.1 研究背景和问题陈述

给定 $n$ 维流形 $Q$ 上的仿射控制系统 $\Sigma_Q$

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u^i f_i(x). \quad (5.1)$$

考虑如下问题：

何时存在如下形式的仿射控制系统

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \sum_{i=1}^m v^i h_i(z), \\ \dot{w} &= h_0(w), \end{aligned} \quad (5.2)$$

满足(5.1)是(5.2)的状态反馈商系统？

研究上述问题的一个动机来自于控制系统的运动规划问题。所谓运动规划即是设计控制率使它能够在指定时间内将控制系统从初始状态驱动到给定终值状态的问题。这方面研究中较为完善的结论主要是针对线性系统和无漂系统<sup>[33–37]</sup>。关于仿射控制系统的线性结构研究，自上世纪七十年代以来已经有了很多结论<sup>[38–44]</sup>。这里，我们从无漂系统角度出发，希望通过上述问题的研究，来揭示一些仿射控制系统的内在无漂特性，一方面探讨系统结构本身，另一方面，从应用角度，通过利用已有的无漂系统运动规划结论，可以解决一类带漂移项系统的运动规划问题。

特别地，有如下问题：

问题1、何时系统(5.1)是由具形式(5.2)的系统的受控不变分布诱导的局部状态反馈商系统？

问题2、何时系统(5.1)是由具形式(5.2)的系统的受控不变分布诱导的全局状态反馈商系统？

下面我们回答如上问题，确定系统(5.1)的结构。

## 5.2 具无漂特性的仿射控制系统

### 5.2.1 Frobenius定理的推广

引理 5.1: 设 $r$ 维分布 $D_1$ 和 $m$ 维分布 $D$ 是 $n$ 维流形 $Q$ 上的两个对合分布, 满足 $D_1 \subseteq D$ 。则分布 $D_1$ 的任意一组交换基 $\{X_1, \dots, X_r\}$ , 都可扩充为分布 $D$ 上的交换基。

证明: 选取线性独立向量场 $X_{r+1}, \dots, X_m \in D$ , 满足

$$D = \text{span}_{\mathbb{R}} \{X_1, \dots, X_m\}.$$

选取向量场 $X_{m+1}, \dots, X_n$ , 使得 $n$ 个向量场 $X_1, \dots, X_n$  是线性独立的。令 $\phi_t^i(x)$ 表示由向量场 $X_i$ 生成的过点 $x$  经过时间 $t$ 的流。定义 $x_0 \in Q$ 附近的局部坐标 $u_1, \dots, u_n$

$$x(u) = \phi_{u_1}^1(\phi_{u_2}^2(\dots \phi_{u_n}^n(x_0))). \quad (5.3)$$

由于 $X_1, \dots, X_r$ 交换, 由此可知 $X_j = \frac{\partial}{\partial u_j}, j = 1, \dots, r$ . 此外,

$$D = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_m} \right\}. \quad (5.4)$$

结论成立。

引理 5.2: 设 $m_1$ 维分布 $D_1$ 和 $m_2$ 维分布 $D_2$  为 $n$ 维流形 $Q$ 上的对合分布。 $\{X_1, \dots, X_{m_1}\}$  为分布 $D_1$ 的一组交换基, 满足 $\{X_{m_1-m_3+1}, \dots, X_{m_1}\}$ 是分布 $D_1 \cap D_2$  的一组交换基。若 $X_i$ 满足 $[X_i, D_2] \subseteq D_2, i = 1, \dots, m_1$ , 则 $\{X_{m_1-m_3+1}, \dots, X_{m_1}\}$  可以扩充为 $D_2$  的一组交换基 $\{Y_1, \dots, Y_{m_2}\}$ , 并且满足 $[X_i, Y_j] = 0, i = 1, \dots, m_1, j = 1, \dots, m_2$ 。

证明: 选取向量场 $X_{m_1+1}, \dots, X_n$ 满足

$$\text{span}_{\mathbb{R}} \{X_{m_1-m_3+1}, \dots, X_{m_1+m_2-m_3}\} = D_2$$

并且 $\{X_1, \dots, X_n\}$  是线性独立的。考虑坐标变换(5.3), 有 $X_j = \frac{\partial}{\partial u_j}, j = 1, \dots, m_1$ . 由于 $[X_i, D_2] \subseteq D_2$ , 则

$$(\phi_t^i)_* D_2 \subseteq D_2, i = 1, \dots, m_1. \quad (5.5)$$

因此有  $\frac{\partial}{\partial u_j} \in D_2$ ,  $j = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2 - m_3$ 。于是结论成立。

**定理 5.1:** 设  $m_1$  维分布  $D_1$  和  $m_2$  维分布  $D_2$  为  $n$  维流形  $Q$  上的对合分布, 并且满足分布  $D_1 + D_2$  为常秩对合分布。则对任给  $p \in Q$ , 存在局部坐标  $x = (x_1, \dots, x_{m_1+m_2-m_3})$  满足  $D_1 = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m_1}} \right\}$ ,  $D_2 = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{m_1-m_3+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m_1+m_2-m_3}} \right\}$ 。这里  $m_3$  表示分布  $D_1 \cap D_2$  的维数。

**证明:** 设  $\{X_1, \dots, X_{m_3}\}$  为分布  $D_1 \cap D_2$  的一组交换基。根据引理 5.1, 我们可以先将它扩充为分布  $D_2$  的一组交换基  $\{X_1, \dots, X_{m_2}\}$ , 再将  $\{X_1, \dots, X_{m_2}\}$  扩充为分布  $D_1 + D_2$  的一组交换基  $\{X_1, \dots, X_{m_1+m_2-m_3}\}$ 。则存在  $Q$  上的光滑函数  $b_j^i$  满足

$$\tilde{X}_j = X_{j+m_2} + \sum_{i=m_3+1}^{m_2} b_j^i X_i \in D_1,$$

$j = 1, \dots, m_1 - m_3$ 。通过计算得知

$$[\tilde{X}_j, X_k] \in \text{span}_{\mathbb{R}} \{X_{m_3+1}, \dots, X_{m_2}\}, \quad (5.6)$$

并且  $[\tilde{X}_j, \tilde{X}_i] \in \text{span}_{\mathbb{R}} \{X_{m_3+1}, \dots, X_{m_2}\}$ ,  $i, j = 1, \dots, m_1 - m_3, k = 1, \dots, m_2$ 。

另一方面, 由于  $D_1$  对合, 则  $[\tilde{X}_j, X_l] \in D_1$ ,  $[\tilde{X}_j, \tilde{X}_i] \in D_1$ ,  $i, j = 1, \dots, m_1 - m_3, l = 1, \dots, m_3$ 。

这就有

$$[\tilde{X}_i, X_l] = [\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = 0$$

$i, j = 1, \dots, m_1 - m_3, l = 1, \dots, m_3$ 。

也就是说, 我们得到分布  $D_1$  的一组交换基

$$\{\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{m_1-m_3}, X_1, \dots, X_{m_3}\} \quad (5.7)$$

■

其中  $\{X_1, \dots, X_{m_3}\}$  是  $D_1 \cap D_2$  的一组交换基。此外, 根据 (5.6),  $[\tilde{X}_i, D_2] \subseteq D_2$ ,  $i = 1, \dots, m_1 - m_3$ 。根据引理 5.2, 得知定理成立。

**注释 5.3:** 定理 5.1 曾在文献 [23] 中给出。这里提供的证明给出了寻找交换基的一个显式方法, 避开了求解偏微分方程。再根据流盒定理的显式解 [44], 就能够直接计算出上述定理中的坐标。

## 5.2.2 局部结论

本小节回答5.1节中的问题1。

**定理 5.2:** 问题 (1) 是可解的当且仅当系统(5.1) 满足局部存在 $Q$ 上的 $m^2$ 个函数 $\gamma_i^j$ 以及 $m$ 个函数 $\beta^j$ , 使得 $[f_0, f_i] = \gamma_i^j f_j + \beta^j [f_j, f_i]$ ,  $i = 1, \dots, m$ 。

**证明:** 为证明“仅当”部分, 考虑如下定义在扩张流形 $Q \times \mathbb{R}$ 的局部邻域上的向量场

$$F = (f_0(x) + f_i(x)\beta^i(x, y))\frac{\partial}{\partial x} + g_0(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

$$G = (f_i(x)\alpha_j^i(x, y))\frac{\partial}{\partial x} + g_j(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

这里 $(\alpha_j^i)_{m \times m}$ 非奇异。我们有

$$\Phi_* F = h_0(w)\frac{\partial}{\partial w}, \quad \Phi_* G = h_j(z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

因此

$$[F, G] = 0,$$

由此

$$\begin{aligned} & \alpha_j^i \left[ f_0 \frac{\partial}{\partial x}, f_i \frac{\partial}{\partial x} \right] + ((f_0 \frac{\partial}{\partial x})(\alpha_j^i)) f_i \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_j^i \beta^l \left[ f_i \frac{\partial}{\partial x}, f_l \frac{\partial}{\partial x} \right] + \alpha_j^i ((f_i \frac{\partial}{\partial x})(\beta^l)) f_l \frac{\partial}{\partial x} \\ & - \beta^l ((f_i \frac{\partial}{\partial x})(\alpha_j^i)) f_i \frac{\partial}{\partial x} - ((g_j \frac{\partial}{\partial y})(\beta^l)) f_l \frac{\partial}{\partial x} + ((g_0 \frac{\partial}{\partial y})(\alpha_j^i)) f_i \frac{\partial}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

由于 $(\alpha_j^i)$ 非奇异, 则

$$[f_0, f_i] \frac{\partial}{\partial x} = \gamma_i^j(x, y) f_j \frac{\partial}{\partial x} + \beta^j(x, y) [f_j, f_i] \frac{\partial}{\partial x}, i = 1, \dots, m. \quad (5.9)$$

由于向量场 $[f_0, f_i], f_j, [f_j, f_i]$ 是流形 $Q$ 上的向量场, 由(5.9)可知, 函数 $\gamma_i^j, \beta^l$ 仅仅依赖变量 $x$ 。也就是说,  $\gamma_i^j = \gamma_i^j(x), \beta^l = \beta^l(x)$ 。必要性得证。

为证明“当”部分, 由于 $[f_0, f_i] = \gamma_i^j f_j + \beta^j [f_j, f_i]$ , 则

$$[f_0 - \beta^j f_j, f_i] = \gamma_i^j f_j + \beta^j [f_j, f_i] - \beta^j [f_j, f_i] + f_i(\beta^j) f_j = \xi_i^j f_j \subseteq \text{span}_{\mathbb{R}} \{f_j\}.$$

这里  $\xi_i^k = \gamma_i^k + f_i(\beta^k)$ 。令  $\tilde{f}_0 = (f_0 - \beta^j f_j) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\tilde{f}_j = f_j \frac{\partial}{\partial x}$ 。则  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_j$  为  $Q \times \mathbb{R}$  的向量场。我们推断, 一定存在  $m^2$  个函数  $\eta_i^j(x, y)$  满足

$$[\tilde{f}_0, \eta_i^j \tilde{f}_j] = 0. \quad (5.10)$$

直接计算有

$$[\tilde{f}_0, \eta_i^j \tilde{f}_j] = \eta_i^j \xi_j^k(x) f_k \frac{\partial}{\partial x} + ((f_0 - \beta^j f_j) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})(\eta_i^k) f_k \frac{\partial}{\partial x}. \quad (5.11)$$

由于  $(f_0 - \beta^j f_j) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$  非退化, 就有  $Q \times \mathbb{R}$  上的局部坐标  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  满足

$$(f_0 - \beta^j f_j) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

则根据(5.11), (5.10)等价于

$$\eta_i^j \xi_j^k + \frac{\partial}{\partial x_1}(\eta_i^k) = 0. \quad (5.12)$$

这是一个一阶线性方程, 因此解总存在。令  $(\eta_i^j)(0) = I$ , 则(5.12)有解  $\eta_i^j$ , 满足矩阵  $(\eta_i^j)$  在零点充分小邻域内非奇异。

考虑对合分布  $D = \text{Lie}^\infty \{f_1 \frac{\partial}{\partial x}, \dots, f_m \frac{\partial}{\partial x}\}$ 。因为  $[\tilde{f}_0, f_i \frac{\partial}{\partial x}] = [f_0 - \beta^j f_j, f_i] \frac{\partial}{\partial x} \in D$ , 于是

$$[\tilde{f}_0, D] \subseteq D.$$

由于  $\tilde{f}_0 \notin D$ , 那么根据定理5.1, 存在  $Q \times \mathbb{R}$  上的局部坐标  $(z, w)$ , 满足

$$D = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_k} \right\},$$

以及

$$\tilde{f}_0 = \frac{\partial}{\partial w}.$$

由于  $[\tilde{f}_0, \eta_i^j \tilde{f}_j] = 0$ , 则

$$\eta_i^j \tilde{f}_j = h_i^1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + h_i^k(z) \frac{\partial}{\partial z_k}. \quad (5.13)$$

■

因此问题1可解。

**注释 5.4:** 从上述定理的构造性证明中可知, 当问题1可解时, 总可以选择如下形

式的

$$\dot{y} = 1, \quad u = \alpha(x, y)v + \beta(x),$$

在反馈作用下, 扩张系统变为

$$\dot{z} = \sum_{i=1}^m v^i h_i(z), \quad \dot{w} = 1.$$

换句话说, 时间变量的一维状态扩充足以分离漂移项。

如下给出一个算法概述, 根据它可以给出局部微分同胚 $\Phi$ 的显式计算而不用解偏微分方程。

**算法概述.** 给定仿射控制系统(5.1).

步骤1. 检验定理5.2中的条件, 获得 $Q$ 上的函数 $\gamma_i^j, \beta^j$ 。

步骤2. 令 $D_1 = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \tilde{f}_0 = (f_0 - \beta^j f_j) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ ,  $D_2 = \text{Lie}^\infty \left\{ f_1 \frac{\partial}{\partial x}, \dots, f_m \frac{\partial}{\partial x} \right\}$ 。根据定理5.1证明中的显式步骤, 计算 $D_2$ 的一组交换基, 满足它们与 $\tilde{f}_0$ 共同构成分布 $D_1 + D_2$ 的一组交换基。

Step 3. 根据[44]中定理2.2给出的显式坐标变换, 将步骤3中得到的分布 $D_1 + D_2$ 的一组交换基标准化, 由此获得局部微分同胚 $\Phi$ 。

**推论 5.5:** 给定二输入仿射控制系统(5.1), 若 $[f_0, f_i] \in \text{span}_{\mathbb{R}} \{f_1, f_2, [f_1, f_2]\}$ ,  $i = 1, 2$ , 则问题1可解。

**证明:** 根据定理5.2, 问题1可解当且仅当

$$\begin{aligned} [f_0, f_1] &= \alpha_1^1 f_1 + \alpha_1^2 f_2 + \beta^1 [f_1, f_1] + \beta^2 [f_1, f_2], \\ [f_0, f_2] &= \alpha_2^1 f_1 + \alpha_2^2 f_2 + \beta^1 [f_2, f_1] + \beta^2 [f_2, f_2]. \end{aligned}$$

由此可知结论成立。

**推论 5.6:** 给定二输入三维仿射控制系统(5.1), 它满足 $\dim \text{Lie}^\infty \{f_1, f_2\} = 3$ , 则问题1可解。

**证明:** 由于 $\dim \text{Lie}^\infty \{f_1, f_2\} = 3$ , 则 $[f_0, f_i] \in \text{span}_{\mathbb{R}} \{f_1, f_2, [f_1, f_2]\}$ ,  $i = 1, 2$ 。根据推论5.5可知结论成立。

注释 5.7: 对一般的二输入三维仿射控制系统, 推论5.6中的条件总能被满足。这个事实在一定程度上体现了方法的有效性。

例: 考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的仿射控制系统 $\Sigma$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 4x_2x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= -2x_3 - 2x_1u_2, \\ \dot{x}_3 &= 1 + u_2,\end{aligned}\tag{5.14}$$

$f_0 = 4x_2x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$ ,  $f_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ ,  $f_2 = -2x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$ . 直接计算得知,  $\Sigma$  满足定理5.2的条件, 其中 $\beta^1 = 1 - 4x_2x_3$ ,  $\beta^2 = 0$ 。考虑状态扩张系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 4x_2x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= -2x_3 - 2x_1u_2, \\ \dot{x}_3 &= 1 + u_2, \\ \dot{x}_4 &= 1.\end{aligned}\tag{5.15}$$

令 $u_1 = 1 - 4x_2x_3 + v_1$ ,  $u_2 = v_2$ . 则 $\tilde{f}_0 = \frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4}$ . 通过坐标变换

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1, & z_2 &= x_2 + 2x_1x_3 - x_1^2, \\ z_3 &= x_3 - x_1, & z_4 &= x_4 - x_1,\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= 1 + v_1, & \dot{z}_2 &= 2v_1z_3, \\ \dot{z}_3 &= v_2 - v_1, & \dot{z}_4 &= -v_1,\end{aligned}$$

$\tilde{f}_0$ 被变换成 $\frac{\partial}{\partial z_1}$ 。为标准化由向量场 $\frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_3\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial}{\partial z_3} - \frac{\partial}{\partial z_4}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z_3}$ 和 $\left[\frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_3\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial}{\partial z_3} - \frac{\partial}{\partial z_4}, \frac{\partial}{\partial z_3}\right]$ 张成的对合分布, 考虑如下坐标变换

$$w_1 = z_1 + z_4, \quad w_2 = z_2, \quad w_3 = z_3, \quad w_4 = z_4.\tag{5.16}$$

□

在坐标变换以及反馈变换作用下, 扩张系统变成

$$\dot{w}_1 = 1, \quad \dot{w}_2 = 2w_3v_1,$$

$$\dot{w}_3 = v_2 - v_1, \quad \dot{w}_4 = -v_1,$$

它具有形式(5.2)。

### 5.2.3 全局结论

$G$ 为连通李群， $\mathfrak{g}$ 是它的李代数。 $\mathfrak{g}$ 的正规化子定义如下

$$\mathcal{N} = \{F \in V^\infty(G) : \forall Y \in \mathfrak{g}, [F, Y] \in \mathfrak{g}\}.$$

$G$ 上的向量场 $F$ 被称为是仿射的，若它属于 $\mathcal{N}$ 。考虑 $G$ 上的控制系统

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{i=1}^m u^i X_i(x) \quad (5.17)$$

其中， $X$ 是仿射的， $X_i$ 属于 $\mathfrak{g}$ 。

**命题 5.8:** [27]李群上的仿射向量场是完备的。

有如下全局性结论：

**定理 5.3:** 给定李群上的仿射控制系统(5.17)，则问题2可解当且仅当存在常数 $\alpha_i^j$ ， $\beta^j$ ，满足 $[X, X_i] = \alpha_i^j X_j + \beta^j [X_i, X_j]$ ， $i = 1, \dots, m$ 。

**证明:** 仅需证明“当”部分。因为 $[X, X_i] = \alpha_i^j X_j + \beta^j [X_i, X_j]$ ，则

$$[X + \beta^j X_j, X_i] = \gamma_i^k X_k \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, \dots, X_m\},$$

这里， $\gamma_i^k$ 是常数。我们推断，一定存在 $\eta_i^j(y)$ ，满足

$$\left[ (X + \beta^k X_k) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, (\eta_i^j(y) X_j) \frac{\partial}{\partial x} \right] = 0. \quad (5.18)$$

(5.18)等价于

$$\frac{d\eta_i^k}{dy} + \eta_i^j \gamma_j^k = 0$$

上式有解 $(\eta_i^j) = e^{Ay}$ ， $A = (\gamma_j^k)$ 。

由于 $G$ 上的向量场 $X + \beta^j X_j$ 是仿射的，根据命题5.8， $X + \beta^j X_j$ 是完备的。定义全

局微分同胚  $\Phi: G \times \mathbb{R} \rightarrow G \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} z &= \Phi_y^{(-X-\beta^j X_j)}(x), \\ w &= y. \end{aligned} \tag{5.19}$$

■

$\Phi$  将向量场  $(X + \beta^j X_j) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$  变为  $\frac{\partial}{\partial w}$ 。

对向量场  $(\eta_i^j(y) X_j) \frac{\partial}{\partial x}$ ，由于(5.18)成立，我们有

$$\Phi_t^{((-X-\beta^j X_j) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})} \Phi_s^{\eta_i^j(y) X_j \frac{\partial}{\partial x}}(x_0, y_0) = \Phi_s^{\eta_i^j(y) X_j \frac{\partial}{\partial x}} \Phi_t^{((-X-\beta^j X_j) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})}(x_0, y_0),$$

对  $x_0 \in G, y_0 \in \mathbb{R}$ ，由此

$$\Phi_t^{(-X-\beta^j X_j)} \Phi_s^{\eta_i^j(y_0) X_j}(x_0) = \Phi_s^{\eta_i^j(y_0-t) X_j} \Phi_t^{(-X-\beta^j X_j)}(x_0).$$

在上述方程中令  $t = y_0$ ，则

$$\begin{aligned} \Phi_{y_0}^{(-X-\beta^j X_j)} \Phi_s^{\eta_i^j(y_0) X_j}(x_0) &= \Phi_s^{\eta_i^j(y_0-y_0) X_j} \Phi_{y_0}^{(-X-\beta^j X_j)}(x_0) \\ &= \Phi_s^{\eta_i^j(0) X_j} \Phi_{y_0}^{(-X-\beta^j X_j)}(x_0) = \Phi_s^{X_i} \Phi_{y_0}^{(-X-\beta^j X_j)}(x_0). \end{aligned}$$

由此可知向量场  $(\eta_i^j(y) X_j) \frac{\partial}{\partial x}$  在微分同胚(5.19)下变为  $X_i \frac{\partial}{\partial z}$ 。于是控制系统(5.17)是

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \sum_{i=1}^m X_i(z) v^i, \\ \dot{w} &= 1 \end{aligned}$$

的全局状态反馈商系统，商映射具平凡丛结构。

**注释 5.9:** 一些实例诸如刚体转动  $SO(3)$  以及刚体运动  $SE(3)$  控制<sup>[45]</sup>均满足上述定理的条件。

## 5.2.4 推广情形

本小节考虑问题1的推广情形。

**定义 5.10:** 称流形  $Q$  上的系统  $\dot{x} = \tilde{f}_0(x) + \sum_{i=1}^k u^i \tilde{f}_i(x)$  是系统(5.1)的子系统，若  $\{\tilde{f}_0\} + \text{span}_{\mathbb{R}} \{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_k\} \subseteq \{f_0\} + \text{span}_{\mathbb{R}} \{f_1, \dots, f_m\}$ 。

问题3、是否存在系统(5.1)的子系统，它是由具形式(5.2)的系统的受控不变分布诱导的局部状态反馈商系统？

如下例子说明了如上问题具独立的意义。

例：考虑 $\mathbb{R}^4$ 上的仿射控制系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1, & \dot{x}_2 &= u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_1 u_2, & \dot{x}_4 &= u_2.\end{aligned}$$

这里 $f_0 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ ,  $f_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}$ ,  $f_2 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4}$ ”

直接计算得知

$$[f_0, f_2] \notin \text{span}_{\mathbb{R}}\{f_1, f_2, [f_1, f_2]\}. \quad (5.20)$$

由定理5.2可知，对该系统问题1不可解。尽管如此，考虑反馈 $u_1 = v$ ,  $u_2 = 0$ ，它将上述系统变为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1, & \dot{x}_2 &= v, \\ \dot{x}_3 &= 0, & \dot{x}_4 &= 0,\end{aligned} \quad (5.21)$$

□

该系统具无漂特性。

**命题 5.11:** 若问题3可解，则一定存在 $Q$ 上的函数 $\alpha^1, \dots, \alpha^m$  满足 $\alpha^i[f_0, f_i] \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{f_l, [f_j, f_k], l, j, k = 1, \dots, m\}$ ，这里 $\alpha^1, \dots, \alpha^m$ 不全为零。

**证明:** 由方程(5.8)可知。

**命题 5.12:** 给定仿射控制系统(5.1)，若存在非退化向量场 $g \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{f_1, \dots, f_m\}$  满足 $[f_0, g] = 0$ ，则问题3可解。

**证明:** 考虑反馈 $\dot{y} = 1$ ,  $u^i = \alpha^i v$ ，这里， $\alpha^i f_i = g$ 。可知结论成立。

一个特殊情形是当分布 $\text{span}_{\mathbb{R}}\{f_1, \dots, f_m\}$ 对合时：

**命题 5.13:** 给定仿射控制系统(5.1)， $f_1, \dots, f_m$ 非退化，分布 $\text{span}_{\mathbb{R}}\{f_1, \dots, f_m\}$ 对合，则问题3可解当且仅当存在 $Q$ 上的函数 $\alpha^1, \dots, \alpha^m$  满足 $\alpha^i[f_0, f_i] \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{f_1, \dots, f_m\}$ ，这里 $\alpha^1, \dots, \alpha^m$ 不全为零。

证明: 为证明 “当” 部分, 由于存在  $Q$  上的函数  $\alpha^1, \dots, \alpha^m$  满足  $\alpha^i[f_0, f_i] \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{f_1, \dots, f_m\}$ , 则

$$[f_0, \alpha^i f_i] = \gamma^j f_j.$$

断言: 一定存在函数  $\beta^1, \dots, \beta^m$  满足

$$[f_0 + \beta^j f_j, \alpha^i f_i] = 0. \quad (5.22)$$

令  $[f_j, f_i] = \xi_{ji}^k f_k$ 。则(5.22)等价于

$$(\alpha^i f_i)(\beta^j) - \beta^i(f_i(\alpha^j) - \alpha^k \xi_{ik}^j) + \gamma^j = 0. \quad (5.23)$$

■

它是可解的, 因为向量场  $\alpha^i f_i$  非退化。

令  $\tilde{f}_0 = (f_0 + \beta^j f_j) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\tilde{f} = (\alpha^i f_i) \frac{\partial}{\partial x}$ 。则  $\tilde{f}_0$  非退化且  $[\tilde{f}_0, \tilde{f}] = 0$ 。于是通过反馈  $\dot{y} = 1$ ,  $u^i = \alpha^i v + \beta^i$ , 我们获得具有形式(5.2)的仿射控制系统。

根据命题5.11可知 “仅当” 部分成立。

## 第六章 状态反馈线性化

本章讨论一个专题，状态反馈线性化问题。

### 6.1 已有结论回顾

考虑仿射控制系统

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^k f_i(x)u^i, u = (u_1, \dots, u_k)^T \in \mathbb{R}^k, x \in M. \quad (6.1)$$

系统(6.1)被称为在 $q_0 \in M$ 点附近局部状态反馈等价于一个线性系统

$$\dot{y} = Ay + \sum_{i=1}^k b_i v^i, y \in \mathbb{R}^n. \quad (6.2)$$

若存在局部微分同胚 $\Phi: U \rightarrow V$ 以及反馈变换

$$\begin{aligned} \Phi: U \times \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^k, \\ \Phi(q, u) &= \alpha(q) + \beta(q)u, \end{aligned}$$

将系统(6.1)变换为(6.2)。这里， $U$ 为 $q_0 \in M$ 的局部邻域， $V$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开子集， $\beta(q)$ 是一个可逆矩阵。

在带有可控性假设的前提下，凭借控制系统自身携带的信息，状态反馈线性化有如下结论：

考虑如下子空间族

$$D_q^m = \text{span}_{\mathbb{R}} \{(ad f_0)^j f_i(q) \mid j = 0, \dots, m-1, i = 1, \dots, k\} \subseteq T_q M.$$

**定理 6.1 (21):** 系统(6.1)局部状态反馈等价于一个可控线性系统(6.2)当且仅当：

- (1)  $\dim D_q^m, m = 1, \dots, n$  不依赖于 $q$ ;
- (2)  $D_q^n = T_q M$ ;
- (3) 分布 $D^m, m = 1, \dots, n$  对合。

## 6.2 无可控性假设的状态反馈线性化

本节讨论无可控性假设下的状态反馈线性化问题。在微分几何研究中，有时为探讨几何对象自身的问题，常常会借助一些外在结构。例如纤维丛理论，辛几何中的辛同构研究<sup>[46]</sup>等。这里通过引入一个特殊结构的向量场，在去除系统可控性假设下，给出状态反馈线性化的刻画。

**定义 6.1 (47):** 微分同胚  $y = \phi(x), \phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  被称为是接近恒同的(near identity), 若  $\phi(0) = 0, \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}|_{x=0} = E$ , 这里  $E$  为  $n \times n$  恒同矩阵。

对单输入情形, 有

**定理 6.2:** 设向量场  $f_i$  在  $p$  点处是解析的,  $i \in \{0, 1\}$ ,  $f_0(p) = 0$ ,  $f_1$  非退化。则存在在  $x = 0$  点处解析的  $\alpha$  和  $\beta$ ,  $\alpha(0) = 0$ ,  $\beta(0) \neq 0$ , 使得(6.1)通过一个接近恒同解析同胚变换成线性系统(6.2), 其中  $Ae_1 = 0$ , 当且仅当存在接近恒同解析同胚  $y = \varphi(x)$ , 满足, 令  $g_\varepsilon = \varphi^* \tilde{g}_\varepsilon$ , 其中  $\tilde{g}_\varepsilon = \varepsilon e_1 + y$ , 有对任给的  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $[f_0, g_\varepsilon] = \gamma_\varepsilon f_1$ ,  $[f_1, g_\varepsilon] = \delta_\varepsilon f_1$ , 其中  $\gamma_\varepsilon(x), \delta_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}$  是在  $x = 0$  处的解析函数。

**证明:** 必要性证明显然。下证充分性。

令  $\varphi_* f_1 = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)^T$ . 由于  $f_1$  非退化, 不失一般性, 假设  $a_1(0) \neq 0$ . 记  $\varphi_* f'_1 = \frac{1}{a_1} \varphi_* f_1$ . 则  $\varphi_* f'_1 = (1 \ b_2 \ \cdots \ b_n)$ , 这里  $b_i = \frac{a_i}{a_1}$ . 由于  $[\varphi_* f'_1, y] \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_* f'_1\}$ , 直接计算可知  $[\varphi_* f'_1, y] = \varphi_* f'_1$ . 也即  $\varphi_* f'_1$  是一个常向量场,  $b_2, \dots, b_n$  为常数。

考虑向量场  $f_0$ . 由于  $[f_0, g_\varepsilon] = \gamma_\varepsilon f_1$ , 则

$$[\varphi_* f_0, y] \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_* f'_1\}, \quad (6.3)$$

以及

$$[\varphi_* f_0, e_1] \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_* f'_1\}. \quad (6.4)$$

令  $\varphi_* f_0 = (c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n)^T$  记  $b_1 = 1$ . 则根据(6.3) 和(6.4), 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_i}{\partial y_1} &= \tau b_i, \quad i = 1, \dots, n. \\ c_j - \sum_{k=1}^n y_k \frac{\partial c_j}{\partial y_k} &= \xi b_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

这里 $\tau, \xi$ 在 $y = 0$ 处解析。考虑函数 $d_j = c_j - b_j c_1$ ,  $j = 2, \dots, n$ , 我们有

$$\frac{\partial d_j}{\partial y_1} = 0, \quad (6.5)$$

$$d_j - \sum_{k=1}^n y_k \frac{\partial d_j}{\partial y_k} = 0, \quad j = 2, \dots, n. \quad (6.6)$$

由于 $d_j$ 在 $y = 0$ 处解析, 因此在 $y = 0$ 处有Taylor展式。由(6.5) 和(6.6)可知 $d_j = \sum_{i=2}^n l_{ji} y_i$ ,  $c_j = b_j c_1 + \sum_{i=2}^n l_{ji} y_i, j = 2, \dots, n$ , 这里 $l_{ji}$ 是常数。

考虑状态反馈 $u = -\frac{\varphi^* c_1}{\varphi^* a_1} + \frac{1}{\varphi^* a_1} v$ , 则闭合系统变换为线性系统 $\dot{y} = Ay + bv$ , 通过解析同胚 $y = \varphi(x)$ , 其中,  $(A)_{i1} = 0, i = 1, \dots, n$ 。也即 $Ae_1 = 0$ 。充分性得证。

对多输入情形, 有

**定理 6.3:** 设 $f_i(x)$ 在 $x = 0$ 点处解析,  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ ,  $f_0(0) = 0$ ,  $f_1, \dots, f_m$ 在 $x = 0$ 点局部线性独立。则存在在 $x = 0$ 点处解析的 $\alpha, \beta$ , 其中 $\alpha(0) = 0, \det(\beta(0)) \neq 0$ , 使得闭合系统

$$\dot{x} = f_0(x) + F(x)\alpha(x) + F(x)\beta(x)v$$

由接近恒同解析同胚变换成线性系统

$$\dot{y} = A_c y + Bv, \quad A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

其中 $A_c e_1 = 0$ , 当且仅当存在接近恒同解析同胚 $y = \varphi(x)$ , 满足令 $g_\varepsilon = \varphi^* \tilde{g}_\varepsilon$ , 其中 $\tilde{g}_\varepsilon = \varepsilon e_1 + y$ , 有对任意的 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $[f_0, g_\varepsilon] = F\gamma_\varepsilon$ ,  $[F, g_\varepsilon] = F\delta_\varepsilon$ , 其中 $\gamma_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\delta_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 在 $x = 0$ 解析。

**证明:** 必要性证明显然。下证充分性。

令 $D = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_* f_1, \dots, \varphi_* f_m\}$ 。

令 $\varphi_* f_i = (a_{i1} \ \dots \ a_{in})^T, i = 1, \dots, m$ 。不失一般性, 假设 $a_{11}(0) \neq 0$ , 我们用 $\frac{1}{a_{11}} \varphi_* f_1$ 来代替 $\varphi_* f_1$ 。现在 $a_{11} = 1$ 。接着用 $-a_{j1} \varphi_* f_1 + \varphi_* f_j$ 来代替 $\varphi_* f_j, j = 2, \dots, m$ 。则 $a_{j1} = 0, j = 2, \dots, m$ 。由于 $\varphi_* f_1, \varphi_* f_2$ 线性独立, 假设 $a_{22} \neq 0$ 。我们用 $\frac{1}{a_{22}} \varphi_* f_2$ 来代替 $\varphi_* f_2$ , 然后用 $-a_{k2} \varphi_* f_2 + \varphi_* f_k$ 来代替 $\varphi_* f_k, k = 3, \dots, m$ 。则 $a_{k1} = a_{k2} = 0, k = 3, \dots, m$ 。

反复使用上述步骤, 不失一般性, 我们得到 $\varphi_* f_l$ , 其中 $a_{l1} = \dots = a_{l(l-1)} = 0, a_{ll} = 1$ 。

此外,  $D = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_*f_1, \dots, \varphi_*f_m\}$ .

由于 $\varphi_*f_m$ 满足

$$[\varphi_*f_m, y] = \tau_1\varphi_*f_1 + \dots + \tau_m\varphi_*f_m, \quad (6.7)$$

这里 $\tau_1, \dots, \tau_m$ 在 $y=0$ 处解析, 根据 $\varphi_*f_1, \dots, \varphi_*f_m$ 的如上形式, 有 $\tau_1 = \dots = \tau_{m-1} = 0$ ,  $\tau_m = 1$ . 于是 $[\varphi_*f_m, y] = \varphi_*f_m$ . 也即 $\varphi_*f_m$ 为一个常向量场。

归纳步骤。假设 $\text{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_*f_{m-k+1}, \dots, \varphi_*f_m\} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{b_{m-k+1}, \dots, b_m\}$ , 这里 $b_j$ 是常向量场,  $(b_j)_1 = \dots = (b_j)_{j-1} = (b_j)_{j+1} = \dots = (b_j)_m = 0$ ,  $(b_j)_j = 1$ ,  $j = m-k+1, \dots, m-1$ ,  $b_m = \varphi_*f_m$ . 现考虑向量场 $\varphi_*f_{m-k}$ , 其中 $a_{(m-k)1} = \dots = a_{(m-k)(m-k-1)} = 0$ ,  $a_{(m-k)(m-k)} = 1$ . 由于 $[\varphi_*f_{m-k}, y] \in D$ , 类似式(6.7)下的推断, 有

$$\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial a_{(m-k)j}}{\partial y_i} = \sum_{l=m-k+1}^m \zeta_l (b_l)_j, \quad (6.8)$$

$j = m-k+1, \dots, n$ , 这里 $\zeta_l$ 在 $y=0$ 处解析。

由(6.8)可知

$$\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial a_{(m-k)l}}{\partial y_i} = \zeta_l, \quad l = m-k+1, \dots, m.$$

考虑如下在 $y=0$ 处解析函数

$$c_j = a_{(m-k)j} - \sum_{i=1}^k (b_{m-k+i})_j a_{(m-k)(m-k+i)}, \quad (6.9)$$

$j = m-k+1, \dots, n$ . 通过计算可知

$$\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial c_j}{\partial y_i} = 0. \quad (6.10)$$

(6.10)说明 $c_j$ 为常数,  $j = m-k+1, \dots, n$ . 因此根据(6.9)我们有

$$\varphi_*f_{m-k} - b_{m-k} \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{b_{m-k+1}, \dots, b_m\},$$

这里,  $b_{m-k}$ 为常向量场,  $(b_{m-k})_j = 0$ ,  $j \neq m-k$  and  $j \leq m$ ,  $(b_{m-k})_{m-k} = 1$ . 也就是说,

$$\text{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_*f_{m-k}, \dots, \varphi_*f_m\} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{b_{m-k}, \dots, b_m\}.$$

于是

$$D = \text{span}_{\mathbb{R}}\{b_1, \dots, b_m\}, \quad (6.11)$$

其中  $b_1, \dots, b_m$  是线性独立常向量场,  $(b_i)_j = 0, j \neq i, j \leq m, (b_i)_i = 1, i = 1, \dots, n$ .

考虑向量场  $f_0$ . 设  $\varphi_* f_0 = (d_1 \cdots d_n)^T$ .

由于  $[\varphi_* f_0, y] \in D = \text{span}_{\mathbb{R}}\{b_1, \dots, b_m\}, [\varphi_* f_0, e_1] \in D = \text{span}_{\mathbb{R}}\{b_1, \dots, b_m\}$ , 则

$$\begin{aligned} d_i - \sum_{k=1}^n y_k \frac{\partial d_i}{\partial y_k} &= \sum_{l=1}^m \xi_l (b_l)_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial d_j}{\partial y_1} &= \sum_{l=1}^m \tau_l (b_l)_j, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

这里,  $\xi_1, \dots, \xi_m, \tau_1, \dots, \tau_m$  是  $y = 0$  处的解析函数。考虑函数

$$\tilde{d}_i = d_i - \sum_{l=1}^m (b_l)_i d_l, \quad i = m+1, \dots, n. \quad (6.12)$$

通过计算可知

$$\frac{\partial \tilde{d}_i}{\partial y_1} = 0, \quad (6.13)$$

$$\tilde{d}_i - \sum_{k=1}^n y_k \frac{\partial \tilde{d}_i}{\partial y_k} = 0. \quad (6.14)$$

由(6.13)和(6.14)可知  $\tilde{d}_i = \sum_{k=2}^n l_{ik} y_k$ , 其中  $l_{ik}$  是常数。再根据(6.12), 我们有

$$(\varphi_* f_0 - Ay) \in D, \quad (6.15)$$

■

其中矩阵  $A$  满足  $(A)_{i1} = 0, i = 1, \dots, n, (A)_{lk} = 0, l = 1, \dots, m$  and  $k = 1, \dots, n$ .

由(6.11)和(6.15)可知充分性成立。

如下命题在一定程度上说明了上述结论的一般性:

**命题 6.2 (47):** 对线性系统(6.2), 若存在  $b_i \neq 0$ , 则存在线性状态反馈和线性坐标变换, 使得变换后的线性系统

$$\dot{z} = A_c z + \sum_{i=1}^k \tilde{b}_i v^i, z \in \mathbb{R}^n. \quad (6.16)$$

满足  $A_c e_1 = 0$ 。

例: 考虑仿射控制系统(6.1), 其中  $f_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ ,  $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$ 。

考虑向量场  $g(x) = \begin{pmatrix} x_1 \frac{x_1-1}{2x_1-1} \\ -\frac{1}{2x_1-1}(x_1^2 - 2x_2x_1 + x_2) \end{pmatrix}$ ,  $g(x)$  在  $x=0$  处解析,  $g(0) = 0$ ,  $\frac{\partial g(x)}{\partial x}|_{x=0} = E$ , 并且  $[f_0, g] = \gamma f_1$ , 其中  $\gamma = -\frac{1}{2} \frac{x_1^2}{(2x_1-1)^2}$ 。

$$[f_1, g] = \delta f_1,$$

其中  $\delta = \frac{2x_1^2 - 2x_1 + 1}{(2x_1-1)^2}$ 。考虑如下接近恒同微分同胚

$$y = \varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_1^2 \\ x_2 - x_1^2 \end{pmatrix},$$

则

$$\varphi_* f_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sqrt{1-4y_1}-1)\sqrt{1-4y_1} \\ -y_2 \end{pmatrix}, \varphi_* f_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-4y_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_* g = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

□

$${}^{\sim\sim}K^{\sim}G^{\sim\prime\prime}$$

$u = (y) + (y)vp(y) = 1 \frac{\sqrt{1-4y_1}-1+4y_1}{4\sqrt{1-4y_1}}, \tilde{\beta}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-4y_1}}$ 。则  $\varphi_* f_0 + \varphi_* f_1(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}v) =$

$\begin{pmatrix} v \\ -y_2 \end{pmatrix}$ 。它是一个线性系统。

## 结 论

本文针对仿射控制系统模型从微分几何角度研究其约化结构，提出并研究了两个几何概念：状态空间商映射和状态反馈商映射。对状态空间商映射，本文给出了代数同态的几何实现，并回答了一类保拉格朗日结构的状态空间商映射的存在性。本文从状态反馈商映射角度出发，确定了一类具无漂特性的仿射控制系统结构。最后研究了无可控性假设的状态反馈线性化问题。

如下我们列出一些后续研究内容。

1、第四章解决了一类联络控制系统状态空间商映射的存在性。进一步的问题是，如何处理状态反馈商映射情形？一个难点在于如何刻画仿射分布  $D = \{S\} + \text{span}\{g_1^{vlt}, \dots, g_m^{vlt}\}$  的几何结构。

2、第五章处理了原系统与商系统定义的仿射分布具有相同秩的情形，对二分布秩不相同的情形，需要作进一步讨论。

3、第六章通过轨道对称性给出了状态反馈线性化结构的刻画。从定理6.2得知，若仿射控制系统(6.1)通过接近恒同微分同胚状态反馈线性化，则受控向量场具有这样的轨道对称性，它在局部坐标下具形式  $\varepsilon e_1 + y$ 。由于定理中轨道对称性的表述是在局部坐标下的，这就给实际操作带来了困难，就有必要进一步探讨轨道对称性的内蕴结构。

4、本文强调区分了局部和全局问题，并针对一些特定对象分别讨论了局部和全局结论。我们希望能对局部和全局问题建立一个一般性的框架，探讨从局部到全局的过渡机制。



## 参考文献

- [1] E. J. Routh. Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies[M]. London: MacMillan, 1860
- [2] E. J. Routh. Advanced Rigid Dynamics[M]. London: MacMillan and Co., 1884
- [3] J. E. Marsden, A. Weinstein. Reduction of symplectic manifolds with symmetry[J]. Reports on Mathematical Physics. 1974, 5(1):121–130
- [4] A. Agrachev. Is it possible to recognize local controllability in a finite number of differentiations?[C]. Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. 1999
- [5] A. Bacciotti. Local stabilizability of nonlinear control systems[M]. World Scientific, 1992
- [6] H. Nijmeijer. The triangular decoupling problem for nonlinear control systems[J]. Nonlinear Analysis, Theory and Its Applications. 1984, 8(3):273–279
- [7] A. J. Van der Schaft. Linearization and input-output decoupling for general nonlinear systems[J]. Systems Control Letters. 1984, 5(1):27–33
- [8] R. W. Brockett. Control theory and analytic mechanics[J]. Geometric Control Theory. 1977:1–48
- [9] J. C. Willems. System theoretic models for the analysis of physical systems[J]. Ricerche di Automatica. 1979, 10(2):71–106
- [10] H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft. Controlled invariance for nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 1982, Ac-27(4):904–914

- [11] J. W. Grizzle, S. I. Marcus. The structure of nonlinear control systems possessing symmetries[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 1983, **Ac-30**(3):248–258
- [12] H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft. Partial symmetries for nonlinear systems[J]. Mathematical Systems Theory. 1985, **18**:79–96
- [13] P. Tabuada, G. J. Pappas. Quotients of fully nonlinear control systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization. 2005, **43**(5):1844–1866
- [14] W. Respondek. On decomposition of nonlinear control systems[J]. Systems Control Letters. 1982, **1**(5):301–308
- [15] H. Nijmeijer. Feedback decomposition of nonlinear control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 1983, **28**(8):861–862
- [16] H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft. Controlled invariance for Hamiltonian systems[J]. Mathematical Systems Theory. 1985, **18**:257–291
- [17] V. Elkin. Reduction of Nonlinear Control Systems: A Differential Geometric Approach[M]. Kluwer Academic Publishers, 1999
- [18] A. D. Lewis. The category of affine connection control systems[C]. Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control. 2000
- [19] T. Ohsawa. Symmetry reduction of optimal control systems and principal connections[J]. SIAM Journal on Control and Optimization. 2013, **51**(1):96–120
- [20] R. Abraham, J. E. Marsden, et al. Manifold, tensor analysis and applications[M]. New York: Springer, 1998
- [21] A. Agrachev, Y. Sachkov. Control theory from the geometric viewpoint[M]. New York: Springer, 2004

- [22] V. Elkin. Affine control systems: Their equivalence, classification, quotient systems, and subsystems[J]. Journal of Mathematical Sciences. 1998, **88**(5):675–721
- [23] H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft. Nonlinear dynamical control systems[M]. Berlin: Springer, 1990
- [24] P. K. Rashevsky. Any two points of a totally nonholonomic space may be connected by an admissible line[J]. Uchenye Zapiski Pedagogicheskogo Instituta imeni Libknehta. 1938, **2**:83–94
- [25] W. L. Chow. Uber Systemen von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung[J]. Mathematische Annalen. 1939, **117**:98–105
- [26] B. McKay. Sussmann’s orbit theorem and maps[J]. Differential Geometry and its Applications. 2007, **25**(3):277–280
- [27] P. Jouan. Equivalence of control systems with linear systems on Lie groups and homogeneous spaces[J]. ESAIM: Control, Optim Calc Var. 2010, **16**(4):956–973
- [28] S. Kobayashi, K. Nomizu. Foundations of Differential Geometry[M]. New York: Interscience publishers, 1963
- [29] K. Yano, S. Ishihara. Tangent and Contangent Bundles: Differential Geometry[M]. New York: Marcel Dekker Inc., 1973
- [30] F. Bullo, A. D. Lewis. Geometric Control of Mechanical Systems. Modeling, Analysis and Design for Simple Mechanical Control Systems[M]. New York: Springer, 2004
- [31] S. Ricardo, W. Respondek. When is a control system mechanical?[J]. Journal of Geometric Mechanics. 2010, **2**(3):265–302

- [32] A. D. Lewis, R. M. Murray. Configuration controllability of simple mechanical control systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization. 1997, **35**(3):766–790
- [33] R. M. Murray, S. Sastry. Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 1993, **38**(5):700–716
- [34] H. J. Sussmann. A continuation method for nonholonomic path-finding problems[C]. Proceedings of the 32th IEEE Conference on Decision and Control. 1993
- [35] L. Gurvits. Averaging approach to nonholonomic motion planning[C]. Proc. 1992 IEEE International Conf. Robot. and Automation. 1992
- [36] M. Fliess, L. Levine, et al. Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples[J]. International Journal of Control. 1995, **61**(6):1327–1361
- [37] G. Lafferriere, H. J. Sussmann. A differential geometric approach to motion planning[C]. Nonholonomic Motion Planning. 1993
- [38] A. J. Krener. Feedback linearization[C]. Math. Control Theory. 1999
- [39] R. W. Brockett. Feedback invariants for nonlinear systems[C]. Proc. 7th IFAC Congress. 1978
- [40] B. Jakubczyk, W. Respondek. On linearization of control systems[J]. Bulletin del’Academie Polonaise des Sciences Series Mathematics. 1980, **28**:517–522
- [41] R. Marino. On the largest feedback linearizable subsystem[J]. Systems Control Letters. 1986, **6**(5):345–351
- [42] G. O. Guardabassi, S. M. Savaresi. Approximate linearization via feedback: an overview[J]. Automatica. 2001, **37**(1):1–15

- [43] E. Aranda, C. H. Moog, et al. A linear algebraic framework for dynamic feedback linearization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 1995, 40(1):127–132
- [44] I. A. Tall. State and feedback linearizations of single-input control systems[J]. Systems Control Letters. 2010, 59(7):429–441
- [45] V. Jurdjevic. Geometric Control Theory[M]. UK: Cambridge University Press, 1997
- [46] D. McDuff, D. Salamon. Introduction to Symplectic Topology[M]. USA: Oxford University Press, 1999
- [47] L. Menini, A. Tornambe. Exact and approximate feedback linearization without the linear controllability assumption[J]. Automatica. 2012, 48(9):2221–2228



## 博士期间发表和完成的论文

### 博士期间发表和完成的论文

- [1] Qianqian Xia, Zhiyong Geng, Quotients of Affine Connection Control Systems, Reports on Mathematical Physics, Vol.72 (1),103-120, 2013.
- [2] Qianqian Xia, Zhiyong Geng, Separating the Drift from Affine Control Systems via Feedbacks, Asian Journal of Control, DOI: 10.1002/asjc.821.
- [3] Qianqian Xia, Zhiyong Geng, Comments on “Exact and approximate feedback linearization without the linear controllability assumption [Automatica 48 (2012) 2221-2228]”, Automatica, Vol.50 (2), 652-654, 2014.
- [4] Qianqian Xia, Zhiyong Geng, On Eliminating the Drift from Affine Control Systems, Proceedings of the 31th Chinese Control Conference, Hefei, China.
- [5] Qianqian Xia, Zhiyong Geng, Abnormal Minimizers in Nonholonomic Mechanical Control Systems, Proceedings of the 32th Chinese Control Conference, Xi'an, China.

## 致 谢

首先我要感谢导师耿志勇教授。感谢耿老师引导我关注几何控制理论。耿老师严谨的学风，广博的知识，对科研的热爱是我学习的榜样。同时也感谢航空航天动力学与控制实验室的所有老师。

感谢北京大学工学院领导对我的帮助。感谢工学院教务老师们在我学习中提供的便利。

最后，感谢我的父母特别是我的母亲。感谢你们多年来对我生活上的关怀和照顾，精神上的指导和鼓励，学业的理解和支持。

# 北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

## 原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名：

日期： 年 月 日

