第17讲　拉普拉斯变换法，幂级数解法

November 28, 2012

一　解非齐次线性方程初值问题的拉普拉斯变换法

- 工程上常用的方法。
- 拉普拉斯变换

设$f(t)$在$t \geq 0$上有定义，$|f(t)| \leq Me^{\sigma t}$, $M > 0, \sigma > 0$，函数

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

定义在复平面上（$Res > \sigma$），称为$f(t)$的拉普拉斯变换，记为$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$。$f(t)$称为原函数，$F(s)$称为像函数。

拉普拉斯变换的性质

(i) 线性性质：

$$\mathcal{L}(af(t)+bg(t)) = a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(g(t)).$$

(ii) 若$f(t)=u(t)+iv(t)$，则

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(u(t)) + i\mathcal{L}(v(t)).$$

(iii) 微分性质：设$f(t)$有一至n阶导数，且$f'(t),\cdots,f^{(n)}(t)$都是原函数，则 $\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0).$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n\mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots \\ -sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

拉普拉斯变换表

原函数$f(t)$	像函数$F(s)$	$F(s)$的定义域
1	$\frac{1}{s}$	Re$s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	Re$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	Re$s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	Re$s >$Reα
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	Re$s > 0$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	Re$s > 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

又如：$t\sin\omega t, t\cos\omega t, e^{\lambda t}\sin\omega t, \cdots$.

求解微分方程的初值问题

(1) **初值问题：** $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=f(t)$,

$$x(0)=\xi_0, x'(0)=\xi_1,\cdots,x^{(n-1)}(0)=\xi_{n-1}.$$

(2) **设**$X(s)=\mathcal{L}(x(t)),\ F(s)=\mathcal{L}(f(t))$.

(3) **于方程两端取拉普拉斯变换，则**

$$\begin{aligned}&(s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}+a_n)X(s)\\ &=F(s)+(s^{n-1}+a_1s^{n-2}+\cdots+a_{n-1})\xi_0\\ &+(s^{n-2}+a_1s^{n-3}+\cdots+a_{n-2})\xi_1\\ &+\cdots+\xi_{n-1}\end{aligned}$$

即$A(s)X(s)=F(s)+B(s),\quad X(s)=\dfrac{F(s)+B(s)}{A(s)}$.

(4) **求**$X(s)$**的反变换，查表。**

求解微分方程的初值问题

求解下列初值问题：

(1) $\begin{cases} x' - x = e^{2t}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x'' + 2x' + x = e^{-t}, \\ x(1) = x'(1) = 0. \end{cases}$

$$\tau = t - 1, \quad X(s) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{(s+1)^3}, \quad x(\tau) = \frac{1}{2}\tau^2 e^{-\tau-1}.$$

$$x(t) = \frac{1}{2}(t-1)^2 e^{-t}.$$

二　幂级数解法

- 函数$f(t,x)$在区域G内解析，则对G内任意一点(t_0,x_0)，存在$a>0,b>0$，使得$f(t,x)$在邻域$R:\ |t-t_0|\le a,\quad |x-x_0|\le b$内可以展成$t-t_0$和$x-x_0$的收敛的幂级数：

$$f(t,x)=\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{ij}(t-t_0)^i(x-x_0)^j.$$

定理1　如果$f(t,x)$在矩形区域R上可以展成$|t-t_0|$和$|x-x_0|$的一个收敛的幂级数，则方程组的初值问题

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\quad x(t_0)=x_0$$

在t_0点的邻域$|t-t_0|<\rho$内有一个解析解（幂级数解）$x=x(t)$，并且是唯一的。

类型一：$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$，其中$p(t), q(t)$在t_0点解析。

定理2 设$p(t), q(t)$在区间$|t - t_0| < r$内可以展成$t - t_0$的收敛的幂级数，则方程在区间$|t - t_0| < r$内有收敛的幂级数解

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n,$$

其中c_0, c_1是两个任意常数，它们由t_0点的初值条件来确定（$c_0 = x(t_0), c_1 = x'(t_0)$），而$c_n$可以从$c_0, c_1$ 出发由递推公式确定。

广义幂级数解法

例1 在$t = 0$附近求解**Legendre**方程：

$(1-t^2)x'' - 2tx' + \alpha(\alpha+1)x = 0$, α为常数。

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

$$c_{k+2} = \frac{-(\alpha-k)(\alpha+k+1)}{(k+1)(k+2)} c_k$$

类型二：$(t-t_0)^2P(t)x''+(t-t_0)Q(t)x'+R(t)x=0$，$P(t_0)\neq 0$.

定理3 设$P(t),Q(t),R(t)$在t_0附近可展成$t-t_0$的幂级数，则上述方程有收敛的广义幂级数解

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(t-t_0)^{k+\rho},\quad c_0\neq 0,$$

其中ρ和$c_k\ (k\geq 1)$可用代入法确定。

广义幂级数解法

例2 在$t=0$附近求解**Bessel**方程

$$t^2x''+tx'+(t^2-n^2)x=0,$$

其中n为非负实数。

Γ函数：

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$$

$$\Gamma(1)=1,\ \Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1),\ \Gamma(k+1)=K!$$

n阶贝塞尔函数