# 第18讲　Picard存在唯一性定理

December 2, 2014

# 第18讲　第四章　基本理论

- **Picard**存在唯一性定理。
- **Peano**存在性定理。
- 解的延展性。
- 解对初值和参数的连续相依性。
- 解对初值和参数的可微性。

# Picard存在唯一性定理

**方程组的柯西问题：**

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{1}$$

其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix}.$$

## Picard存在唯一性定理

- **Lipschitz条件**：称$f(t,x)$在闭域

$$R: \quad |t-\tau| \le a, \quad |x-\xi| \le b$$

上关于$x$满足**Lipschitz条件**，如果存在常数$L$，使得对任意$(t,x_1),(t,x_2) \in R$，都有

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le L|x_1 - x_2|.$$

$L$称为**Lipschitz**常数。

# Picard存在唯一性定理

- 如果$f(t,x)$在$R$上关于$x$的各分量的偏微商都存在且有界，则$f(t,x)$在$R$上满足**Lipschitz**条件。
- **定理1**　若$f(t,x)$在闭域$R$上连续，且满足**Lipschitz**条件，则方程组的柯西问题于区间$I_0 : |t-\tau| \leq h$上有唯一解，其中 $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$，$M$是$|f(t,x)|$于$R$上的一个上界。
- $h$几何上的意义？（一维为例，画图）

**证明思路：**

(i) **初值问题(1)的解等价于下列积分方程的解**

$$x(t) = \xi + \int_{\tau}^{t} f(s, x(s))ds \tag{2}$$

(ii) **构造picard逼近序列：**

$$\varphi_0(t) = \xi,$$

$$\varphi_k(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi_{k-1}(s))ds, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

**则函数列**$\{\varphi_k(t)\}$**在**$I_0$**上连续可微，且不跑出区域**$R$**（如图）。**

**只需证明：**

**(1)** **当**$t \in I_0$**时，**$|\varphi_k(t) - \xi| \leq M|t - \tau| \leq Mh \leq b$**，即**$(t, \varphi_k(t)) \in R$

**(2)** $\varphi_k(t)$**在**$I_0$**上连续可微。**

(iii) **Picard逼近序列$\{\varphi_k(t)\}$在区间$I_0$上一致收敛。**

**$\{\varphi_k(t)\}$的一致收敛性 $\Leftrightarrow$ 级数$\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)]$的一致收敛性.**

**归纳法证明：**

$$|\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)| \le \frac{M}{L}\frac{(L|t-\tau|)^k}{k!} \le \frac{M}{L}\frac{(Lh)^k}{k!},$$

**其中$L$是Lipschitz常数。**

# Picard存在唯一性定理

(iv) 令$\varphi(t)=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(t)$，则$\varphi(t)$在$I_0$上连续，且是**(1)**的解。

于等式$\varphi_k(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,\varphi_{k-1}(s))ds$两端取极限，则有

$$\varphi(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,\varphi(s))ds$$

即$\varphi(t)$是积分方程的解，从而是初值问题的解。

(iv) **唯一性。设$x=\varphi(t)$和$x=\psi(t)$是初值问题(1)在区间$I_0$上的解，**

$$\varphi(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,\varphi(s))ds,$$

$$\psi(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,\psi(s))ds.$$

**令$u(t)=|\varphi(t)-\psi(t)|$，$M_0=\max\limits_{t\in I_0}\{u(t)\}$，则**

$$u(t)\leq L\left|\int_\tau^t u(s)ds\right|. \tag{3}$$

**进一步有$u(t)\leq M_0L|t-\tau|$，反复利用(3)则有**

$$u(t)\leq M_0L^k\frac{|t-\tau|^k}{k!}\leq M_0L^k\frac{h^k}{k!}.$$

**令$k\to\infty$，则有$u(t)=0$.**

- **例1　黎卡提方程** $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$.
  过平面上任意一点有解且只有一解。
- 近似计算（作业）：
  给出方程(1)的第$n$次Picard近似解$\varphi_n(t)$和真实解$\varphi(t)$在区间$|t-t_0| \leq h$内的误差估计表达式。
- Lipschitz条件是保证解唯一的充分条件，$f(t,x)$连续只保证解的存在性（Peano定理）。
  例：$\frac{dx}{dt} = x^{\frac{2}{3}}, x(0) = 0$. $x = (\frac{1}{3}t)^3$.

# 局部Lipschitz条件

- $f(t,x)$在域$G$内关于$x$满足局部**Lipschitz**条件：
  如果对于任一$(t_0,x_0)\in G$，恒有含于$G$内的形如

  $$R: \quad |t-t_0|\le a, |x-x_0|\le b$$

  的闭域，在其上$f(t,x)$满足**Lipschitz**条件，称$f(t,x)$在域$G$内满足局部**Lipschitz**条件。
- 如果$f(t,x)$在$G$内关于$x$的偏导数存在且连续，则$f(t,x)$在域$G$内满足局部**Lipschitz**条件。

# Osgood条件

- **定理2**　若$f(t,x)$在域$G$内连续，且满足局部**Lipschitz**条件，则对任意$(t_0,x_0)\in G$，方程满足初值条件$x(t_0)=x_0$的解存在且唯一。（利用**Picard**存在唯一性定理证明）
- 唯一性至今没有充要条件，**Osgood**条件比**Lipschitz**更一般一些。
- **Osgood**条件：若$f(t,x)$在$G$内连续，且满足条件

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\le F(|x_1-x_2|),$$

其中$F(r)>0$在$0<r\le r_1$上连续，且$\int_0^{r_1}\frac{1}{F(r)}dr=+\infty$，则称$f(t,x)$在$G$内对$x$满足**Osgood**条件。
- **Lipschitz** 条件是**Osgood**条件的特例，$F(r)=Lr$.

# 解的整体唯一性

**定理3** 设$f(t,x)$在区域$G$内对$y$满足**Osgood**条件，则方程$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$在$G$内经过每一点最多只有一个解。

**保证初值问题局部解唯一的条件是否也能保证整体解唯一？**

**定理4** 如果对域$G$中任一$(\tau,\xi)$，初值问题**(1)**的解在含$\tau$的某个区间上是唯一的，则对$G$中任一$(\tau,\xi)$，初值问题**(1)**的任意两个解在其共同存在区间上必相等。

（反证）

# 不唯一的情形，奇解

解不唯一的极端情形：奇解

- 例2：考虑方程$x' = e^{\frac{t}{x}x'}$
  通解：$x = \dfrac{1}{c}e^{ct}$，特解：$x = et$.
- 奇解的定义（隐式方程）：
  设$x = \varphi(t)$是方程$F(t, x, x') = 0$在区间$I$上的解，如果其积分曲线上任何一点都有方程的另一条积分曲线通过，并且在此点与之相切，则称$x = \varphi(t)$为方程在此区间上的奇解。
- 求奇解的方法：$p$-判别曲线，$C$-判别曲线，曲线的包络。

# 不唯一的情形，奇解

- $x=\varphi(t)$为方程奇解的必要条件：

  设$F(t,x,p)$ 连续可微，则$x=\varphi(t)$为方程奇解的必要条件为

$$F(t,\varphi(t),\varphi'(t))=0,\quad F'_p(t,\varphi(t),\varphi'(t))=0,\quad t\in I.$$

  原因：（反证）利用隐函数定理及初值解的唯一性。

- 上述结果表明方程的奇解包含在由方程组

$$F(t,x,p)=0,\quad F'_P(t,x,p)=0 \tag{4}$$

  消去$p$而得到的曲线中。称上述曲线为$p$-判别曲线。

# 不唯一的情形，奇解

- $p$-判别曲线不一定是解，即使是解，也不一定是奇解。
  **例3：** $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + x - t = 0$
  **例4：** $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 - x^2 = 0$

**定理5**　假设

(i) $F(t,x,p)$在区域$G$内二次连续可微。

(ii) $p$-判别曲线$x=\varphi(t)$是微分方程的解。

(iii) $F'_x(t,\varphi(t),\varphi'(t)) \neq 0, \quad F''_{pp}(t,\varphi(t),\varphi'(t)) \neq 0, \quad t \in I$.

则$x=\varphi(t)$是奇解。

## 不唯一的情形，奇解

**例5**：求方程$(x')^2 + x^2 - 1 = 0$的奇解。

**例6**：求方程$(x')^2[(t-x)^2 - 1] - 2x' + [(t-x)^2 - 1] = 0$的奇解。

**例7**: 证明克莱罗方程$x = tx' + g(x')$恒有奇解，其中函数$g(p)$两次连续可微，且$g''(p) \neq 0$.

# 作业

作业：

**P 100: 1;  P 104: 1, 2.**

**1.** 方程$\dfrac{dx}{dt}=t^2+x^2$定义在$R: -1\le t\le 1,\ -1\le x\le 1$上，试利用解的存在唯一性定理确定经过点$(0,0)$的解的存在区间，并求在此区间上与真正解得误差不超过**0.05**的近似解的表达式。

**2.** 求方程$\dfrac{dx}{dt}=t-x^2$通过点$(1,0)$的第二次近似解。