第19讲　Peano存在定理

December 4, 2014

§ Peano存在性定理

定理1 设函数$f(t,x)$在矩形区域

$$R: \quad |t-t_0| \le a,\ |x-x_0| \le b$$

上连续，则初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

在$|t-t_0| \le h$上至少存在一个解$x = x(t)$，其中$h = min\left(a, \frac{b}{M}\right)$，$M$是$|f(t,x)|$在$R$上的一个上界。

欧拉折线

- 利用欧拉折线求近似解的思想。
- 欧拉折线的构造

(1) 将区间$[t_0-h,t_0+h]$分成$2n$等份，每份长度为$h_n=\dfrac{h}{n}$，$2n+1$个分点为

$$t_k=t_0+kh_n,\quad k=0,\pm1,\cdots,\pm n.$$

(2) 从$P_0(t_0,x_0)$出发向右作斜率为$f(t_0,x_0)$的直线，与$t=t_1$交于$P_1(t_1,x_1)$，再从$P_1(t_1,x_1)$出发作斜率为$f(t_1,x_1)$的直线，与$t=t_2$交于$P_2(t_2,x_2)$，$\cdots$，向右折线：$[P_0P_1P_2\cdots P_n]$，同理向左折线：$[P_{-n}\cdots P_{-1}P_0]$.

欧拉折线

- 得到扇形区域Δ_h内的折线：

$$\gamma_n = [P_{-n} \cdots P_{-k} \cdots P_{-1} P_0 P_1 \cdots P_k \cdots P_n].$$

称γ_n为欧拉折线。

- 欧拉折线方程$x = \varphi_n(t)$：

$$P_k(t_k, x_k): \quad x_k = x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1})(t_k - t_{k-1})$$

当$t_0 < t \le t_0 + h$时，有整数s，使得$t_s < t \le t_{s+1}$ $(0 \le s \le n-1)$，于是

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= x_s + f(t_s, x_s)(t - t_s) \\ &= x_0 + \sum_{k=0}^{s-1} f(t_k, x_k)(t_{k+1} - t_k) + f(t_s, x_s)(t - t_s). \end{aligned}$$

- 同理对$t_0 - h < t \leq t_0$。

  证明欧拉折线序列$\{\varphi_n(t)\}$存在一致收敛的子序列。

- **Ascoli引理**：设函数列$\{f_n(t)\}$在有限闭区间I上一致有界且等度连续，则存在子序列$\{f_{n_k}(t)\}$ 在I上一致收敛。

- 函数列$\{f_n(t)\}$在区间I上一致有界：

  如果存在常数$N > 0$，使得不等式$|f_n(t)| \leq N$对一切$n = 1, 2 \cdots$，$t \in I$都成立，则称$\{f_n(t)\}$在区间I上一致有界。

Ascoli引理

- 函数列$\{f_n(t)\}$在区间I上等度连续：

  如果对$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$，对$\forall t_1, t_2 \in I, |t_1 - t_2| < \delta$，$\forall n$，有

  $$|f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \varepsilon,$$

  则称$\{f_n(t)\}$在区间I上等度连续。

- **例1** $f_n(t) = (-1)^n + t^n, \quad (n = 1, 2 \cdots)$.

  (1) 在$|t| \leq \dfrac{1}{2}$上一致有界，等度连续。

  (2) 在$|t| \leq 1$上一致有界，但非等度连续。

  (3) 在$|t| \leq 2$上非一致有界，也非等度连续。

Ascoli引理

引理1 欧拉序列$\{\varphi_n(t)\}$在区间$[t_0-h, t_0+h]$上至少存在一个一致收敛的子序列。

证明思路：

（1）欧拉序列$\{\varphi_n(t)\}$位于矩形R内，因此一致有界。

（2）欧拉折线中各直线段的斜率位于$-M$和M之间，折线γ_n的任何割线的斜率也介于$-M$和M之间，即

$$-M \leq \frac{\varphi_n(s)-\varphi_n(t)}{s-t} \leq M.$$

即

$$|\varphi_n(s)-\varphi_n(t)| \leq M|s-t|, \quad \forall s, t \in [t_0-h, t_0+h].$$

从而等度连续。

欧拉序列的性质

引理2 欧拉序列$\{\varphi_n(t)\}$在区间$[t_0-h,t_0+h]$上满足关系式

$$\varphi_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_n(s))ds+\delta_n(t),$$

其中$\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n(t)=0$.

证明思路:

(1) 对$\forall t\in[t_0-h,t_0+h]$, $\exists s$使得$t_s<t\le t_{s+1}$，且

$$\varphi_n(t)=x_0+\sum_{k=0}^{s-1}f(t_k,x_k)(t_{k+1}-t_k)+f(t_s,x_s)(t-t_s).$$

(2)

$$f(t_k,x_k)(t_{k+1}-t_k)=\int_{t_k}^{t_{k+1}}f(t_k,x_k)d\sigma=\int_{t_k}^{t_{k+1}}f(t,\varphi_n(t))dt+d_n(k),$$

欧拉序列的性质

$$f(t_s,x_s)(t-t_s)=\int_{t_s}^{t} f(t_s,x_s)d\sigma=\int_{t_s}^{t} f(\sigma,\varphi_n(\sigma))d\sigma+\bar{d}_n(t),$$

其中

$$d_n(k)=\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k,x_k)d\sigma-\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,\varphi_n(t))dt,$$

$$\bar{d}_n(t)=\int_{t_s}^{t} f(t_s,x_s)d\sigma-\int_{t_s}^{t} f(\sigma,\varphi_n(\sigma))d\sigma.$$

(3)

$$\varphi_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\sigma,\varphi_n(\sigma))d\sigma+\bar{d}_n(t)+\sum_{k=0}^{s-1} d_n(k).$$

(4) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n(t)=0$，$\delta_n(t)=\bar{d}_n(t)+\sum\limits_{k=0}^{s-1}d_n(k)$.

（利用欧拉折线的性质及$f(t,x)$的连续性证明）

- **(i)** $f(t,x)$在**R**上一致连续$\Rightarrow\ \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$

  对$\forall(t,x),(\bar{t},\bar{x}),|t-\bar{t}|<\delta,|x-\bar{x}|<\delta$，有

$$|f(t,x)-f(\bar{t},\bar{x})|<\frac{\varepsilon}{h}.$$

- **(ii)** 对$t\in[t_k,t_{k+1}]$，有

$$\varphi_n(t)=x_k+f(t_k,x_k)(t-t_k).$$

欧拉序列的性质

- **(iii)** 存在$N > 0$，当$n > N$时，有

$$|\varphi_n(t) - x_k| \leq M|t - t_k| \leq M\frac{h}{n} < \delta, \quad |t - t_k| \leq \frac{h}{n} < \delta.$$

由（i）有

$$|f(t_k, x_k) - f(t, \varphi_n(t))| < \frac{\varepsilon}{h}.$$

$$|d_n(k)| < \frac{\varepsilon}{h}(t_{k+1} - t_k)$$

同理有，$|\bar{d}_n(t)| < \frac{\varepsilon}{h}(t - t_s)$.

- $|\delta_n(t)| < \frac{\varepsilon}{h}(t - t_0) < \varepsilon$.

Peano定理的证明思路：

(i) 由引理2：$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s))ds + \delta_n(t)$.

(ii) $\{\varphi_n(t)\}$在区间$[t_0 - h, t_0 + h]$上存在一致收敛的子序列$\{\varphi_{n_k}(t)\}$，令$\varphi(t) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(t)$，则$\varphi(t)$连续。于等式

$$\varphi_{n_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{n_k}(s))ds + \delta_{n_k}(t)$$

两端对k取极限，并利用引理2，则有

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))ds$$

即$x = \varphi(t)$ 是初值问题的解。

推论

推论1　若$f(t,x)$在开区域G内连续，则对$\forall(t_0,x_0)\in G$，初值问题**(1)**恒有解$x=\varphi(t)$，这个解至少在t_0的某个邻域$|t-t_0|\leq h$上有定义。

注解

- **注1**　欧拉序列的任何收敛的子序列都收敛于**(1)**的解，当初值解唯一时，序列收敛于这个唯一解。但**Picard**序列在不满足**Lipschitz**条件时，可能不收敛（见丁同仁书例子，**Picard**序列不收敛，但初值解唯一。）。
- **注2**　**Peano** 定理不保证唯一性，可以在矩形区域R上构造一个连续函数$f(t,x)$，过R内任一点都有方程$\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)$ 的解但过每一点至少有两条不同的积分曲线（前苏联：拉浦仑捷夫）。
- **注3**　**Peano**定理对方程组也成立。