第21讲　解对初值与参数的连续性

December 11, 2014

解对初值的连续性

- 方程：$\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$.
  初始条件：$x(t_0) = x_0$.
  初值问题的解：$\varphi(t,t_0,x_0)$.
- 例：初值问题$x' = x, x(t_0) = x_0$ 的解为$x(t,t_0,x_0) = x_0 e^{t-t_0}$.
  初始值变动时，解如何变动？实际意义？

解对初值的连续性

- **定理1** 设$f(t,x)$ 在区域G内连续，且关于x满足局部**Lipschitz**条件。若$x=\psi(t)$ 是方程的一个解，而$[a,b]$是其存在区间的任一闭子区间，则存在$\delta>0$，当(t_0,x_0)取在区域

$$R: \quad t_0 \in [a,b], \quad |x_0-\psi(t_0)| \le \delta$$

上时，初值问题的唯一解$x=\varphi(t,t_0,x_0)$至少在$[a,b]$上有定义，并且在闭域

$$V: \quad t \in [a,b], \quad t_0 \in [a,b], \quad |x_0-\psi(t_0)| \le \delta$$

上关于t,t_0,x_0连续。

解对初值的连续性

几何意义：

(i) 存在一个以曲线$x = \psi(t)$为中心的带形区域R，当初值(t_0, x_0)取在这个区域时，解$\varphi(t, t_0, x_0)$至少在$[a, b]$上存在，且解$x = \varphi(t, t_0, x_0)$在$t \in [a, b], (t_0, x_0) \in R$上是三元连续函数。

(ii) 设解$x = \varphi(t, \bar{t}_0, \bar{x}_0)$在$[a, b]$上存在，对任一以曲线$x = \varphi(t, \bar{t}_0, \bar{x}_0)$为中心的$\varepsilon$ 带形区域，一定存在以曲线$x = \varphi(t, \bar{t}_0, \bar{x}_0)$为中心的$\delta$带形区域，当初始点$(t_0, x_0)$取在这个$\delta$带形区域时，解$x = \varphi(t, t_0, x_0)$不会跑出$\varepsilon$ 带形区域。

注意到：

$$|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, \bar{t}_0, \bar{x}_0)| = |\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, \varphi(t_0, \bar{t}_0, \bar{x}_0))| < \epsilon$$

解对初值的连续性

- **推论1**　设$f(t,x)$在G内连续，且关于x满足局部**Lipschitz**条件。若解$x=\varphi(t,\bar{t}_0,\bar{x}_0)$在$[a,b]$上有定义，则当$(t_0,x_0)$ 与$(\bar{t}_0,\bar{x}_0)$充分靠近时，解$x=\varphi(t,t_0,x_0)$也至少在$[a,b]$上有定义，并且对$t\in[a,b]$一致地成立

$$\lim_{(t_0,x_0)\to(\bar{t}_0,\bar{x}_0)}\varphi(t,t_0,x_0)=\varphi(t,\bar{t}_0,\bar{x}_0).$$

（当(t_0,x_0)与$(\bar{t}_0,\bar{x}_0)$靠近时，(t_0,x_0)与$(t_0,\varphi(t_0,\bar{t}_0,\bar{x}_0))$靠近（见图））

- 初值靠近，对应的解也靠近。

解对初值的连续性

- **推论2** 设$f(t,x)$在G内连续，且关于x满足局部**Lipschitz**条件。则方程组的解$x=\varphi(t,t_0,x_0)$作为t,t_0,x_0的函数在它的存在范围内是连续的。

$$\begin{aligned}\varphi(t,t_0,x_0)-\varphi(\bar{t},\bar{t}_0,\bar{x}_0)&=\varphi(t,t_0,x_0)-\varphi(\bar{t},t_0,x_0)\\&+\varphi(\bar{t},t_0,x_0)-\varphi(\bar{t},\bar{t}_0,\bar{x}_0).\end{aligned}$$

定理1的证明

定理1的证明思路：

(I) **存在$\delta_1 > 0$充分小，使得闭域**

$$U: \quad t \in [a,b], \quad |x - \psi(t)| \leq \delta_1$$

含于G内，且$f(t,x)$在U上满足Lipschitz条件。

原因：积分曲线$x = \psi(t)$是G内有界闭集，利用有限覆盖定理确定子区域G_1，$f(t,x)$在其上满足Lipschitz条件，记Lipschitz常数为N。取带形区域U使得$U \subset G_1$。

定理1的证明

(II) 取$\delta > 0$使$\delta < e^{-N(b-a)}\delta_1$。

构造连续的逼近序列$\varphi_n(t, t_0, x_0)$，使其在V上一致收敛，其极限函数是$\varphi(t, t_0, x_0)$，于是$\varphi(t, t_0, x_0)$在V上连续。

构造逼近序列如下：

$$\varphi_0(t, t_0, x_0) = x_0 - \psi(t_0) + \psi(t),$$

$$\varphi_k(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{k-1}(s, t_0, x_0))ds.$$

定理1的证明

则对所有的k和$(t,t_0,x_0)\in V$有

(i) $(t,\varphi_k(t,t_0,x_0))\in U$.

(ii) $\varphi_k(t,t_0,x_0)$在V上连续。

(iii) $|\varphi_{k+1}(t,t_0,x_0)-\varphi_k(t,t_0,x_0)|\leq\dfrac{N^{k+1}|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}|x_0-\psi(t_0)|$.

于是$\varphi_k(t,t_0,x_0)$在V上一致收敛，其极限函数$x=\phi(t)$是积分方程的解，从而是初值问题的解，由解的唯一性知$\phi(t)=\varphi(t,t_0,x_0)$，故$\varphi(t,t_0,x_0)$在$V$上连续。

证明（i），（ii）和（iii）用归纳法。

定理1的证明

(a) $k=0$时，**(i),(ii),(iii)** 成立。

(b) 假设$k \le m-1$时，**(i),(ii),(iii)** 成立，往证$k=m$时，**(i),(ii),(iii)** 亦成立。

$$|\varphi_m(t,t_0,x_0)-\psi(t)| \le \sum_{k=1}^{m} |\varphi_k(t,t_0,x_0)-\varphi_{k-1}(t,t_0,x_0)| \\ +|x_0-\psi(t_0)| \\ \le e^{N|t-t_0|}|x_0-\psi(t_0)| \le e^{N|b-a|}\delta < \delta_1$$

解对初值和参数的连续性

- 方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda) \tag{1}$$

初值解$\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ 关于参数相依的意义。

- 设G是(t, x)空间中某区域，$I_\lambda = (\alpha, \beta)$是$\lambda$轴上某区间，令

$$D_\lambda : \quad (t, x) \in G, \quad \lambda \in I_\lambda.$$

解对初值和参数的连续性

- **定理2**　设$f(t,x,\lambda)$ 在区域D_λ内连续，且关于(x,λ)满足局部**Lipschitz**条件。若$x=\psi(t)$ 是方程的一个解在$[a,b]$上有定义，则存在$\delta>0$，当(t_0,x_0,λ_0)取在区域

$$R:\quad t_0\in[a,b],\quad |x_0-\psi(t_0)|+|\lambda-\lambda_0|\le\delta$$

上时，初值问题的唯一解$x=\varphi(t,t_0,x_0,\lambda)$至少在$[a,b]$上有定义，并且在闭域

$$V_\lambda:\quad t\in[a,b],\quad t_0\in[a,b],\quad |x_0-\psi(t_0)|+|\lambda-\lambda_0|\le\delta$$

上关于t,t_0,x_0,λ连续。

解对初值和参数的连续性

证明思路：转化为方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x, \mu) \\ \dfrac{d\mu}{dt} = 0 \end{cases}$$

初值问题的解为$x = \varphi(t, t_0, x_0, \mu), \mu = \lambda$**.**

- **推论3** 设$f(t,x,\lambda)$在D_λ内连续，且关于(x,λ)满足局部**Lipschitz**条件。若**(1)**的解$x=\varphi(t,\bar{t}_0,\bar{x}_0,\bar{\lambda})$在$[a,b]$上有定义，则当$(t_0,x_0)$ 与$(\bar{t}_0,\bar{x}_0)$，λ 与$\bar{\lambda}$充分靠近时，解$x=\varphi(t,t_0,x_0,\lambda)$也至少在$[a,b]$上有定义，并且对$t\in[a,b]$一致地成立

$$\lim_{\substack{(t_0,x_0)\to(\bar{t}_0,\bar{x}_0)\\ \lambda\to\bar{\lambda}}} \varphi(t,t_0,x_0,\lambda)=\varphi(t,\bar{t}_0,\bar{x}_0,\bar{\lambda}).$$

解对初值和参数的连续性

- **推论4**　设$f(t,x,\lambda)$在D_λ内连续，且关于(x,λ)满足局部**Lipschitz**条件。则方程组的解$x=\varphi(t,t_0,x_0,\lambda)$作为$t,t_0,x_0,\lambda$的函数在它的存在范围内是连续的。
- 有唯一性，都有解对初值和参数的连续相依性。
- 有限区间的连续相依性,无穷区间为稳定性。
- 作业：**P112：1（2，4），2（1），4**