第22讲　解对初值和参数的可微性

December 16, 2014

- **Bellman 不等式及其应用**

引理1 设$x(t), f(t)$是定义在区间$[t_1, t_2]$上连续、非负的纯量函数，如果对$\tau \in (t_1, t_2)$，有

$$x(t) \leq k + \left| \int_{\tau}^{t} f(s)x(s)ds \right|, \quad t \in (t_1, t_2), \tag{1}$$

其中k是非负常数，则

$$x(t) \leq k e^{\left| \int_{\tau}^{t} f(s)ds \right|}, \quad t \in (t_1, t_2). \tag{2}$$

证明：分$t \in [\tau, t_2)$及$t \in (t_1, \tau)$两种情况

解对初值与参数的可微性

- **Bellman** 不等式可用来证明唯一性、可微性等。

  例：若$f(t,x)$在区域**G**上连续，关于x满足**Lipschitz**条件，证明初值问题$x' = f(t,x), x(t_0) = x_0$的解唯一。

- **定理1**　若$f(t,x)$及$f(t,x)$关于x的各个分量的偏导数都在区域G内连续，则初值问题的解$x = \varphi(t,t_0,x_0)$ 作为t, t_0, x_0的函数在它的存在范围S内是连续可微的。

  证明思路：

(i) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t,t_0,x_0)$在$S$上存在且连续。

解对初值与参数的可微性

(ii) $\dfrac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial x_0}$在$S$上存在，连续且为如下初值问题的解：

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = f'_x(t,\varphi(t,t_0,x_0))z, \\ z(t_0) = 1. \end{cases}$$

原因：令$z = \dfrac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial x_0}$，于$\dfrac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial t} = f(t,\varphi(t,t_0,x_0))$ 两端对x_0求微商，假设微分号可交换，则

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(t,\varphi(t,t_0,x_0))\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t,t_0,x_0) = f'_x(t,\varphi(t,t_0,x_0))z,$$

$$z(t_0) = \lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{\varphi(t_0,t_0,x_0+\Delta x_0)-\varphi(t_0,t_0,x_0)}{\Delta x_0} = 1.$$

解对初值与参数的可微性

证明思路：

(a) 对任意$(t_1,\tau_0,\xi_0)\in S$，证明$\varphi(t,t_0,x_0)$在此点可微。此时有解$x=\varphi(t,\tau_0,\xi_0)$，取其存在区间的闭子区间$[a,b]$，使得$t_1,\tau_0\in[a,b]$，则存在$\delta>0$，$\varphi(t,t_0,x_0)$于

$$V:\quad t\in[a,b],\quad t_0\in[a,b],\quad |x_0-\varphi(t_0,\tau_0,\xi_0)|\le\delta$$

上连续。往证$\varphi(t,t_0,x_0)$在V上可微，为此证明其偏导数在V上存在且连续。

解对初值与参数的可微性

(b) $$\frac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial x_0}=\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0},\ \Delta\varphi=\varphi(t,t_0,x_0+\Delta x_0)-\varphi(t,t_0,x_0).$$

$$\varphi(t,t_0,x_0+\Delta x_0)=x_0+\Delta x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s,t_0,x_0+\Delta x_0))ds,$$
$$\varphi(t,t_0,x_0)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s,t_0,x_0))ds.$$

$$\Delta\varphi=\Delta x_0+\int_{t_0}^{t}[f'_x(s,\varphi(s,t_0,x_0))+r]\Delta\varphi ds.$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}=1+\int_{t_0}^{t}[f'_x(s,\varphi(s,t_0,x_0))+r]\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}ds.$$

其中，$\lim\limits_{\Delta x_0\to 0} r=0$.

(c) $z(t,t_0,x_0) = 1 + \int_{t_0}^{t} f'_x(s,\varphi(s,t_0,x_0))z(s,t_0,x_0)ds$.

(d) 令$u = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x_0} - z$，证明$\lim\limits_{\Delta x_0 \to 0} |u| = 0$.

$$u = \int_{t_0}^{t} [f'_x(s,\varphi(s,t_0,x_0))u + r(u+z)]ds.$$

在V上，设 $|f'_x(s,\varphi(s,t_0,x_0))| \le M, \quad |z(s,t_0,x_0)| \le N$.

利用贝尔曼不等式即可证明。

解对初值与参数的可微性

(iii) $\dfrac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial t_0}$在$S$上存在，连续且为如下初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = f'_x(t,\varphi(t,t_0,x_0))z, \\ z(t_0) = -f(t_0,x_0) \end{cases}$$

的解。

- 验证初始条件：

$$\begin{aligned}&\frac{\varphi(t_0, t_0+\Delta t_0, x_0)-\varphi(t_0, t_0, x_0)}{\Delta t_0}\\ =&\frac{\varphi(t_0, t_0+\Delta t_0, x_0)-\varphi(t_0+\Delta t_0, t_0+\Delta t_0, x_0)}{\Delta t_0}\\ =&-\frac{1}{\Delta t_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} f(s, \varphi(s, t_0+\Delta t_0, x_0))ds\end{aligned}$$

$$z(t_0)=\frac{\partial\varphi(t, t_0, x_0)}{\partial t_0}\bigg|t=t_0=-\lim_{\Delta t_0\to 0} f(\eta, \varphi(\eta, t_0+\Delta t_0, x_0)),$$

其中， $t_0\le\eta\le t_0+\Delta t_0$. 故

$$z(t_0)=-f(t_0, x_0).$$

解对初值与参数的可微性

- **注1** $\dfrac{\partial \varphi(t,t_0,x_0)}{\partial x_0} = e^{\int_{t_0}^{t} f'_x(s,\varphi(s,t_0,x_0))ds}.$
- **注2** $\dfrac{\partial \varphi(t,t_0,x_0)}{\partial t_0} = -f(t_0,x_0)e^{\int_{t_0}^{t} f'_x(s,\varphi(s,t_0,x_0))ds}.$
- **注3** 方程组有类似的结果。
- **注4** 解对初值的高阶可微性（条件及结论）。

- **解对初值和参数的可微性：**

  定理2 若$f(t,x,\lambda)$以及$f(t,x,\lambda)$对x和λ的偏倒数在域D_λ内连续，则方程组初值问题$x' = f(t,x,\lambda), x(t_0) = x_0$的解$x = \varphi(t,t_0,x_0,\lambda)$作为$t,t_0,x_0,\lambda$的函数在它的存在范围内是连续可微的。

解对初值与参数的可微性

- 高阶方程

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)})$$

的情形可化为方程组（包括存在性、存在唯一性、延展性、解对初值和参数的连续性和可微性）。

- 定理（存在唯一性）：假

设$f(t, x, x_1, \cdots, x_{n-1})$在$(t, x, x_1, \cdots, x_{n-1})$空间某区域$G$内连续，且满足局部**Lipschitz**条件，即对于每一点$(t_0, x^0, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0) \in G$，存在$a > 0, b > 0, N > 0$，使其在闭域

$$|t-t_0|\le a,\quad |x-x^0|+|x_1-x_1^0|+\cdots+|x_{n-1}-x_{n-1}^0|\le b$$

上满足

$$|f(t,x,x_1,\cdots,x_{n-1})-f(t,\bar{x},\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_{n-1})|$$
$$\le N(|x-\bar{x}|+|x_1-\bar{x}_1|+\cdots+|x_{n-1}-\bar{x}_{n-1}|).$$

则方程在某区间$|t-t_0|\le h$上有满足初始条件

$$x(t_0)=x^0,x'(t_0)=x_1^0,\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=x_{n-1}^0$$

的解，并且是唯一的。

作业 **P135: 2, 3; P136: 1, 2(1).**