第23讲 Lyapunov稳定性理论

December 24, 2014

稳定性理论、定性理论

- 稳定性理论、定性理论：直接根据微分方程的结构研究解的特性，或者研究方程积分曲线的分布情况。
- 开创者：庞加莱（法国），李雅普诺夫（前苏联）
- 研究的问题：

(i) 微分方程某个解在初始扰动下的稳定性（李雅普诺夫稳定性）；

(ii) 微分方程的解族在微分方程的扰动下的稳定性（结构稳定性）；

(iii) 奇点、极限环；

(iv) 稳定性遭到破坏时的分支和混沌

(I) 解对初值的连续相依性

设$x = \varphi(t, \tau, \xi)$是初值问题：$\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$, $x(\tau) = \xi$ 的解。如果$f(t, x)$在G内连续，且$f(t, x)$关于x满足局部**Lipschitz**条件，则$\varphi(t, \tau, \xi)$作为t, τ, ξ在其存在范围内是连续的。

若$x = \varphi(t, \tau, \xi_0)$在有限区间$T_1 \le t \le T_2$上有定义，则当$\xi$充分靠近$\xi_0$时，$x = \varphi(t, \tau, \xi)$也在有限区间$T_1 \le t \le T_2$ 上有定义，并且对$T_1 \le t \le T_2$一致地有

$$\lim_{\xi \to \xi_0} \varphi(t, \tau, \xi) = \varphi(t, \tau, \xi_0)$$

- 注：有限区间

- 无限区间

  例1

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad x(\tau) = \xi$$

的饱和解

$$\varphi(t, \tau, \xi) = \xi e^{t-\tau}$$

在$t \geq \tau$有定义，但

$$|\varphi(t, \tau, \xi) - \varphi(t, \tau, 0)| = |\xi| e^{t-\tau}$$

在$t \geq \tau$上无界，不管$|\xi|$多么小。（τ时刻初值ξ接近初值0）

一. Lyapunov稳定性

- **定义1:**（解$x=\varphi(t,\tau,\xi_0)$在**Lyapunov**意义下稳定）
  假设解$x=\varphi(t,\tau,\xi_0)$于$t\geq\tau$上有定义，如果对$\forall\varepsilon>0$，都有$\delta>0$，只要$|\xi-\xi_0|<\delta$，解$x=\varphi(t,\tau,\xi)$ 在$t\geq\tau$上有定义，且

$$|\varphi(t,\tau,\xi)-\varphi(t,\tau,\xi_0)|<\varepsilon,\quad t\geq\tau$$

  则称解$x=\varphi(t,\tau,\xi_0)$是稳定的。否则是不稳定的。
- 例. 比较方程$\dfrac{dx}{dt}=-x$与$\dfrac{dx}{dt}=x$零解的稳定性.

- **定义2：（渐进稳定）**如果$x=\varphi(t,\tau,\xi_0)$是稳定的，并且存在$\delta_0>0$，使得只要$|\xi-\xi_0|<\delta_0$，就有

$$\lim_{t\to\infty}\left(\varphi(t,\tau,\xi)-\varphi(t,\tau,\xi_0)\right)=0$$

  则称解$x=\varphi(t,\tau,\xi_0)$是渐进稳定的。

- **定义3：（全局渐进稳定）**如果$x=\varphi(t,\tau,\xi_0)$是稳定的，并且对于$\forall\xi\in R^n$，有

$$\lim_{t\to\infty}\left(\varphi(t,\tau,\xi)-\varphi(t,\tau,\xi_0)\right)=0$$

  则称解$x=\varphi(t,\tau,\xi_0)$是全局渐进稳定的。

- **注1：不失一般性，对方程**$x' = f(t,x)$**，可假设**$f(t,0)=0$**，即**$x=0$**是解。否则非零解的稳定性可转化为另一方程零解的稳定性。**

  作变换：$x = y + \varphi(t,\tau,\xi_0)$**，则**

  $$\frac{dy}{dt} = f(t, y+\varphi(t,\tau,\xi_0)) - f(t,\varphi(t,\tau,\xi_0)) = F(t,y).$$

  此方程有解$y=0$**.**

- **注2**（零解稳定）如果对$\forall\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，只要$|x_0|<\delta$时，解$x=\varphi(t,t_0,x_0)$ 在$t\geq t_0$上有定义，且

$$|\varphi(t,t_0,x_0)|<\varepsilon,\quad t\geq t_0$$

则称零解是稳定的。否则是不稳定的。

- **注3**（零解渐进稳定）如果零解是稳定的，并且存在$\delta_0>0$，使得只要$|x_0|<\delta$，就有

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t,t_0,x_0)=0$$

则称零解是渐进稳定的。

二. 按一次近似确定稳定性

- $\dot{x} = Ax$零解的稳定性。
- $\dot{x} = A(t)x$零解的稳定性。
- $\dot{x} = f(t, x)$零解的稳定性。其零解稳定性与线性化系统零解稳定性之间的关系。

二. 按一次近似确定稳定性

方程组$x' = Ax$的零解稳定性：

定理1 方程组$x' = Ax$的零解

(1) 是渐进稳定的（实际上是全局渐进稳定的），当且仅当A的全部特征根都有负的实部；

(2) 是稳定的，当且仅当A的全部特征根的实部是非正的，并且那些实部为零的特征根所对应的若当块都是一阶的；

(3) 是不稳定的，当且仅当A的特征根中至少有一个实部为正，或者至少有一个实部为零，而它所对应的若当块是高于一阶的。

二. 按一次近似确定稳定性

判定A的特征根实部为负的方法：

命题1　设

$$P(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

是一实系数多项式。记$D_1=a_1$，

$$D_k=det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{bmatrix}, \quad k=2,\cdots,n,$$

其中$a_i = 0, i > n$，则$P(\lambda) = 0$所有根的实部均为负的当且仅当$D_k > 0$，$k = 1, \cdots, n$，并且$a_i > 0, i = 1, \cdots, n$。

（$a_i > 0$是A稳定的必要条件）。

例1：$P(s) = s^2 + a_1 s + a_2$是**Hurwitz**稳定多项式的条件。

例2：$P(s) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$是**Hurwitz**稳定多项式的条件。

二. 按一次近似确定稳定性

方程组$x' = A(t)x$的零解稳定性：

定理2 设$\Phi(t)$是方程组$x' = A(t)x$ 的一个基本解矩阵。则其零解

(1) 是稳定的，当且仅当$\Phi(t)$于$t \geq 0$上有界；

(2) 是渐进稳定的（实际上是全局渐进稳定的），当且仅当

$$\lim_{t \to +\infty} \Phi(t) = 0$$

原因：$x(t, t_0, x_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$

二. 按一次近似确定稳定性

方程组形式：

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) = A(t)x + R(t,x), \quad f(t,0) = 0. \tag{1}$$

一次近似方程组：

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{2}$$

假定：

(1) $A(t)$于$t \geq \tau$上连续，$R(t,x)$于$t \geq \tau, |x| < H$上连续，且关于x满足局部**Lipschitz**条件。

(2) $R(t,0) = 0$，且对一切$t \geq \tau$一致地有

$$\lim_{|x| \to 0} \frac{R(t,x)}{|x|} = 0 \tag{3}$$

二. 按一次近似确定稳定性

方程组$x' = Ax + R(t,x)$的零解稳定性：

定理3 设$A(t)$是常数矩阵A，$R(t,x)$满足条件**(3)**。

(1) 若A的全部特征根都有负的实部，则方程组**(1)**的零解是渐进稳定的；

(2) 若A的特征根中至少有一个具有正的实部，则方程组**(1)**的零解是不稳定的。

二. 按一次近似确定稳定性

- **(1)** $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}R(s,x(s))ds.$
- **(2)** $\exists K > 0, \alpha > 0$，当$t \geq t_0$时有

$$||e^{At}|| \leq Ke^{-\alpha t}.$$

- **(3)** $\exists \delta > 0$，当$||x|| \leq \delta$，$t \geq t_0$时有

$$||R(t,x)|| \leq \varepsilon ||x||, \quad \varepsilon < \frac{\alpha}{K}$$

- **(4)** 取$||x_0|| \leq \dfrac{\delta}{K+1}$，当$t - t_0$充分小时，$||x(t)|| < \delta$。

二. 按一次近似确定稳定性

设满足$||x(t)|| < \delta$的右行解的最大区间为$[t_0, t_1)$，则对$t \in [t_0, t_1)$，利用Bellman不等式有

$$e^{\alpha t}||x(t)|| \leq K||x_0||e^{\alpha t_0}e^{\varepsilon K(t-t_0)}$$

$$||x(t)|| \leq K||x_0||e^{-(\alpha-\varepsilon K)(t-t_0)} < \delta$$

利用延展定理知$t_1 = +\infty$，于是零解稳定且$x(t) \to 0$, $t \to \infty$.

注4 A的特征根有实部为零，但没有正特征根的情形，不能通过一次近似来确定**(1)** 零解的稳定性，视具体情况而定。

二. 按一次近似确定稳定性

例2 讨论方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + \sigma(x^3 + xy^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \sigma(x^2y + y^3) \end{cases}$$

零解的稳定性，其中σ是常数，取值$-1, 0, 1$.

- 一次近似系数矩阵的特征根为$\pm i$，不能用定理**3**。
- 第一个方程乘以x，第二个方程乘以y，然后相加可得：

$$\frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) = 2\sigma(x^2(t) + y^2(t))^2$$

设$x(t), y(t)$满足初始条件$x(0) = x_0, y(0) = y_0$，则有

$$x^2(t) + y^2(t) = \frac{x_0^2 + y_0^2}{1 - 2\sigma(x_0^2 + y_0^2)t}$$

二. 按一次近似确定稳定性

(i) 当$\sigma=-1$时，零解全局渐进稳定；

(ii) 当$\sigma=0$时，零解稳定；

(iii) 当$\sigma=1$时，零解不稳定。

原因：

- $\sigma=-1$：$x^2(t)+y^2(t)=\dfrac{x_0^2+y_0^2}{1-2\sigma(x_0^2+y_0^2)t}\leq x_0^2+y_0^2.$
  当$t\to+\infty$时，$x^2(t)+y^2(t)<\dfrac{1}{2t}\to 0.$
- $\sigma=1:\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{3}$，对$\forall\delta>0,\exists x_0=y_0=\dfrac{\delta}{2},\exists t_1=\dfrac{1-\delta^2}{\delta^2}$
  使得：$x^2(t_1)+y^2(t_1)=\dfrac{1}{2}>\varepsilon_0.$

例3 判定方程组

$$x' = y, \quad y' = -y - \sin x$$

零解的稳定性。

一次近似系统：

$$x' = y, \quad y' = -y - x$$

作业

作业：

P142: 1（稳定、全局渐进稳定的情形）；2.

P146: 2(1); 3.