第25讲　定性理论的概念

December 25, 2012

一般定性理论(几何理论)的概念

考虑系统:

$$x' = f(x), \quad x \in R^n \tag{1}$$

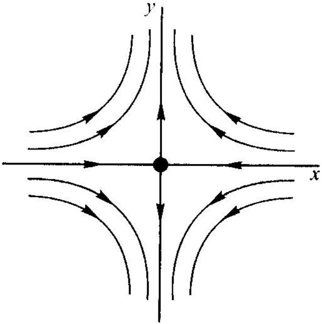
- 相空间：x的取值空间R^n称为相空间.
- 轨线：解曲线沿t轴增加方向在相空间中的投影. (轨线有方向)
- 相图：轨线的分布图

一般定性理论的概念

例1 $x' = -x, y' = y$

$x = c_1 e^{-t}, \quad y = c_2 e^t$

轨线: $xy = c$双曲线，方向(如图).



一般定性理论的概念

- 奇点：若$f(x_0)=0$，则x_0称为方程**(1)**的奇点，也叫平衡点。此时$x=x_0$是方程**(1)**的常数解。
- 闭轨：周期解（非定常解）所对应的轨线。
- 极限环：孤立的闭轨。

$$\frac{dx}{dt}=y+x(1-x^2-y^2)$$
$$\frac{dy}{dt}=-x+y(1-x^2-y^2)$$

令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$\frac{dr}{dt}=r(r^2-1)$$
$$\frac{d\theta}{dt}=-1$$

一般定性理论的概念

- ω-极限集：设$x=\varphi(t,0,x_0)$在$t\geq 0$上有定义，如果存在点$y_0\in R^n$及趋于$+\infty$的点列t_k使得

$$\lim_{k\to+\infty}\varphi(t_k,0,x_0)=y_0 \tag{2}$$

  则称y_0是解$x=\varphi(t,0,x_0)$的ω-极限点，所有ω-极限点的全体，称为解$x=\varphi(t,0,x_0)$的ω-极限集，记为$\Omega^+(x_0)$。

- α-极限集：如果$x=\varphi(t,0,x_0)$在$t\leq 0$上有定义，如果存在点$y_0\in R^n$ 及趋于$-\infty$的点列t_k使得**(2)**成立，则称y_0是解$x=\varphi(t,0,x_0)$的α-极限点，所有α-极限点的全体，称为解$x=\varphi(t,0,x_0)$的α-极限集，记为$\Omega^-(x_0)$。

一般定性理论的概念

- **极限集**：$\Omega^+(x_0)\cup\Omega^-(x_0)$称为解$x=\varphi(t,0,x_0)$的极限集，记为$\Omega(x_0)$。
- **注1**　$\Omega^+(x_0)$，$\Omega^-(x_0)$和$\Omega(x_0)$都是闭集。
  若$\varphi(t,0,x_0)$在$t\geq 0$（$t\leq 0$）上有界，则$\Omega^+(x_0)$（$\Omega^-(x_0)$）是非空的，连通的有界闭集。

自治方程组的性质

考虑方程组：

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{3}$$

其中$f(x)$于R^n上连续可微。

(1) **积分曲线的平移不变性：**

若$x = \varphi(t)$ 是(3)的任一解,则$x = \varphi(t+c)$也是解,其中c为任意常数.

(2) **群性质：** $\varphi(t_2, \varphi(t_1, \xi)) = \varphi(t_1 + t_2, \xi)$,

其中符号$\varphi(t, \xi) = \varphi(t, 0, \xi)$. （画图）

原因：初值解的唯一性：$\varphi(t, \varphi(t_1, \xi)) = \varphi(t + t_1, \xi)$。

($t = 0$时值为$\varphi(t_1, \xi)$)

自治方程组的性质

(3) **轨线的唯一性：经过相空间中的每一点只有一条轨线通过。**

证明思路：

（i）假设经过相空间中一点$\xi \in R^n$有两条轨线通过,设他们对应的解为$x = \varphi(t)$和$x = \psi(t)$，且有$\tau_1, \tau_2, \tau_1 \neq \tau_2$，使得

$$\varphi(\tau_1) = \psi(\tau_2) = \xi.$$

（ii）由性质1及初值解的唯一性有

$$\varphi(t) = \psi(t - \tau_1 + \tau_2). \tag{4}$$

自治方程组的性质

（iii）证明轨线L_1和轨线L_2是相同，即L_1上的点一定在L_2上，反之亦然。

(a) 对$\forall x_0 \in L_1, \exists t_1, \varphi(t_1) = x_0$, 因此由**(4)**可
有$x_0 = \varphi(t_1) = \psi(t_1 - \tau_1 + \tau_2)$，即$x_0 \in L_2$。

(b) 反之, 若$\forall x_0 \in L_2, \exists t_2, \psi(t_2) = x_0$, 因此由**(4)**可
有$x_0 = \psi(t_2) = \varphi(t_2 + \tau_1 - \tau_2)$，即$x_0 \in L_1$。矛盾。