# 第一章：初等积分法

（一）变量可分离方程：$\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$

（二）齐次方程：$\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$，其中$f(tx,ty) = f(x,y)$

解法：$\dfrac{dy}{dx} = f(1, \dfrac{y}{x})$，令$\dfrac{y}{x} = u$，则方程化为：$\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx} = f(1,u)$.

（三）$\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$

(a) $c = c_1 = 0$：齐次方程

(b) $c, c_1$至少有一个不为零

$$\begin{cases} \textbf{情形1：} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix} \neq 0 \\ \text{做变换：} \quad x = \xi + \alpha,\ y = \eta + \beta \\ \alpha, \beta\text{满足：} \quad \begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases} \\ \text{方程化为：} \quad \dfrac{d\eta}{d\xi} = f\left(\dfrac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right) \text{（齐次方程）} \\ \textbf{情形2：} \quad \Delta = 0\text{，即} \quad \dfrac{a_1}{a} = \dfrac{b_1}{b} = \lambda \\ \dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c}\right) \\ \text{令} \quad ax + by = z \\ \text{则} \quad \dfrac{dz}{dx} = a + bf\left(\dfrac{z+c_1}{\lambda z + c_1}\right) \end{cases}$$

（四）一阶线性方程：$\dfrac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)$

解法：常数变易法

$$\begin{cases} \text{解齐次方程：} \quad \dfrac{dy}{dx} = p(x)y \\ \text{解为：} \quad y = ce^{\int p(x)dx} \\ \text{设非齐次方程解为：} \quad y = c(x)e^{\int p(x)dx} \\ \text{则：} \quad c'(x)e^{\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow c(x) = c + \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx \\ \text{通解：} \quad y = e^{\int p(x)dx}\left(c + \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx\right) \end{cases}$$

**注1**　初值问题：$\dfrac{dy}{dx} = p(x)y + q(x),\ y(x_0) = y_0$的表达式。

**注2**　已知$p(x), q(x)$的某种性质，讨论解的某种性质，解常用定积分表示。

（五）伯努利方程：$\dfrac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^n, \quad (n \neq 0, 1)$

解法：化为一阶线性方程

$$\begin{cases} \text{除以}y^n\text{：} \quad y^{-n}\dfrac{dy}{dx} = p(x)y^{1-n} + q(x) \\ \text{令：} \quad y^{1-n} = z \\ \text{则：} \quad \dfrac{dz}{dx} = (1-n)p(x)z + (1-n)q(x)\text{（线性方程）} \end{cases}$$

（六）恰当方程，积分因子：

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

(a) 方程（1）为恰当方程：$\exists U(x, y)$使得

$$dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \Rightarrow U(x, y) = c$$

方程（1）为恰当方程的充要条件为：$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

解：$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = c$

或：$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = c$

(b) 积分因子：$\mu(x, y)$

$\mu(x, y)$为积分因子，如果$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$为恰当方程。

(i) 方程有只与$x$有关的积分因子：

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\varphi(x)$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\varphi(x)dx \Rightarrow \quad \text{求出} \quad \mu(x)$$

(ii) 方程有只与$y$有关的积分因子：

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\psi(y)$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\psi(y)dy \Rightarrow \quad \text{求出} \quad \mu(y)$$

(iii) 分组求积分因子

性质: 若$\mu(x,y)$是$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$的积分因子，则$\mu(x,y)\Phi(U(x,y))$也是方程的积分因子，其中$dU(x,y)=\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy.$

例：

$$(M_1dx+N_1dy)+(M_2dx+N_2dy)=0 \tag{2}$$

$$\begin{cases} \text{若} \quad \mu_1M_1dx+\mu_1N_1dy=dU_1 \text{，即} \quad \mu_1\text{是第一组的积分因子} \\ \text{若} \quad \mu_2M_1dx+\mu_1N_2dy=dU_2 \text{，即} \quad \mu_2\text{是第一组的积分因子} \\ \text{则} \quad \mu=\mu_1\varphi(U_1)=\mu_2\psi(U_2)\text{是方程（2）的积分因子，其中} \quad \varphi,\psi \quad \text{为任意的连续函数。} \end{cases}$$

（七）一阶隐式方程$F(x,y,y')=0$，奇解

（I）$y=f(x,y')$

解法：

$$\begin{cases} \text{令：y'=p} \\ \text{则：} y = f(x,p) \qquad\qquad (*) \\ \text{两边对}x\text{求导，则：} p = f'_x + f'_p \dfrac{dp}{dx} \\ \text{即得到关于}x,p\text{的显示方程：} [p - f'_x(x,p)]dx - f'_p(x,p)dp = 0 \\ \text{其解为：} p = \omega(x,c)\text{或者}\omega(x,p,c) = 0 \\ \text{代入}(*)\text{则原方程的解：} y = f(x,p) = f(x,\omega(x,c))\text{或者} \begin{cases} y = f(x,p) \\ \omega(x,p,c) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

（II）$x = f(y, y')$

解法：

$$\begin{cases} \text{令：y'=p} \\ \text{则：} x = f(y,p) \qquad\qquad (*) \\ \text{两边对}y\text{求导，则得到关于}y,p\text{的显示方程：} \dfrac{1}{p} = f'_y(y,p) + f'_p(y,p)\dfrac{dp}{dy} \\ \text{其解为：} p = \omega(y,c)\text{，或者}\omega(y,p,c) = 0 \\ \text{代入}(*)\text{则原方程的解：} x = f(y,p) = f(y,\omega(y,c))\text{，或者} \begin{cases} x = f(y,p) \\ \omega(y,p,c) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

（III）$F(x, y') = 0$

解法：

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t) \\ dy = y'dx = \psi(t)\varphi'(t)dt \\ \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C \end{cases} \end{cases}$$

（IV）$F(y, y') = 0$

解法：

$$\begin{cases} y=\varphi(t), \quad y'=\psi(t) \\ dx=\dfrac{dy}{y'}=\dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt \\ \begin{cases} x=\int \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C \\ y=\varphi(t) \end{cases} \end{cases}$$

奇解：定义，判别法（破坏唯一性，$P$判别法）。

（八）高阶方程的几种可积类型

(I) $y^{(n)}=f(x)$

(II) $F(x,y^{(n)})=0$

(III) $F(y^{(n-1)},y^{(n)})=0$

(IV) $F(y^{(n-2)},y^{(n)})=0$

(V) $F(x,ty,ty',ty'')=t^m F(t,y,y',y'')$

(VI) $F(tx,t^m y,t^{m-1}y',t^{m-2}y'')=t^k F(t,y,y',y'')$

# 第二章：线性方程组与线性方程

## 一. 线性方程组

$$x'=A(t)x+f(t)$$

其中矩阵函数$A(t)$和向量函数$f(t)$在$(a,b)$上连续。

（1）存在唯一性定理（叙述，条件，结论）

证明方法：在$(a,b)$的任意闭子区间上用逐步逼近法。

（2）齐次线性方程$x'=A(t)x$的通解结构定理（叙述，证明方法，运用）。

（3）非齐次线性方程$x'=A(t)x+f(t)$的通解结构定理（叙述，证明方法，运用）。

（4）常数变异法：

$$\begin{cases} \text{设}X(t)\text{是齐次线性方程的基本解矩阵} \\ \text{齐次方程的通解为:} \quad x = X(t)c,\ c\text{为常数向量} \\ \text{设非齐次方程的解为:} \quad x(t) = X(t)c(t) \\ \text{则:} \quad X(t)c'(t) = f(t) \\ \text{从而:} \quad c(t) = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)ds + c \\ \text{非齐次方程的通解为:} \quad x(t) = X(t)c + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)ds \end{cases}$$

（5）刘维尔公式：

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds}$$

齐次方程的解$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$线性无关的充要条件为它们构成的朗斯基行列式$W(t)$在某一点处不为零。

（6）边值问题和周期解：

周期边值条件：$x(a) = x(b)$；

两点边值条件：$Lx(a) + Nx(b) = 0.$

(a) 若齐次方程组的边值问题仅有平凡解$x = 0$,则对任何$f(t)$非齐次方程组的边值问题恒有解。

(a) 若$A(t), f(t)$在$R$上有定义，并且是$\omega$周期函数，则非齐次方程组存在$\omega$周期解的充要条件是：非齐次方程组有一个在$R$上有界的解。（会运用）

**注1**　齐次线性方程的所有解构成$n$维线性空间，但非齐次方程的所有解不构成线性空间。

**注2**　非齐次线性方程有且最多有$n+1$个线性无关解。

一方面，设$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$是对应的齐次方程的一个基本解组，$x_0(t)$是非齐次方程的一个特解，则$x_0(t), x_0(t)+x_1(t), x_0(t)+x_2(t), \cdots, x_0(t)+x_n(t)$是非齐次线性方程的$n+1$个线性无关解。

另一方面，非齐次线性方程最多有$n+1$个线性无关解（反证）。

**注3** 已知非齐次线性方程的$n+1$个线性无关解：$\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_{n+1}(t)$，则对应齐次线性方程的一个基本解组可表示为：$\varphi_1(t)-\varphi_{n+1}(t),\varphi_2(t)-\varphi_{n+1}(t),\cdots,\varphi_n(t)-\varphi_{n+1}(t)$。

**高阶线性方程**：$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t)$

（1）存在唯一性定理。

（2）齐次、非齐次线性方程的通解结构定理。

（3）刘维尔公式：$W(t)=W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}$

（4）常数变异法：设$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$是齐次方程的一个基本解组，则齐次线性方程的通解为：

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

设非齐次方程的解为：

$$x(t)=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)+\cdots+c_n(t)x_n(t)$$

则

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \cdots \\ c_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

求出$c_i(t)$，最后写出通解。

（5）求解高阶方程的降阶法：

已知一个解$x=\varphi(t)$，令$x=\varphi(t)y$，可化为关于$y$的低一阶的方程。特别对于二阶非齐次线性方程只需知道对应齐次方程的一个解，即可求出通解。

（6）幂级数解法。

# 第三章：常系数线性方程组、方程的解法

## 一　常系数方程组：$\frac{dx}{dt} = Ax$

（1）$A$有$n$个不同的特征根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则$n$个线性无关解为：

$$e^{\lambda_1 t}\alpha_1, e^{\lambda_2 t}\alpha_2, \cdots, e^{\lambda_n t}\alpha_n$$

其中，$\alpha_i$是对应$\lambda_i$的特征向量。

（2）$A$有$s$个不同的特征根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，重数分别为$n_1, n_2, \cdots, n_s$，$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$。

对应于$\lambda_1$的$n_1$个线性无关解$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_{n_1}(t)$：

$$\begin{cases} (A - \lambda_1 I)^{n_1}\alpha = 0 \Rightarrow \text{有}n_1\text{个线性无关解}r_1^{(0)}, r_2^{(0)}, \cdots, r_{n_1}^{(0)} \\ r_1^{(0)} \xrightarrow{A-\lambda_1 I} r_1^{(1)} \xrightarrow{A-\lambda_1 I} r_1^{(2)} \xrightarrow{A-\lambda_1 I} \cdots \xrightarrow{A-\lambda_1 I} r_1^{(n_1-1)} \\ x_1(t) = e^{\lambda_1 t}(r_1^{(0)} + r_1^{(1)}t + \frac{r_1^{(2)}}{2!}t^2 + \cdots + \frac{r_1^{(n_1-1)}}{(n_1-1)!}t^{n_1-1}) \\ \text{同理利用}r_2^{(0)}, \cdots, r_{n_1}^{(0)}\text{可求出}x_2(t), \cdots, x_{n_1}(t) \end{cases}$$

(3) 求解方程组可化为高阶方程。

(4) 实系数方程组(方程)都要求求出实值解。

(5) 解的渐近性质

## 二　常系数方程$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = 0$

（1）求解方法：

特征方程：$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$

特征根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，重数分别为$n_1, n_2, \cdots, n_s$，$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$。

则基本解组为：

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t}; e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \cdots, t^{n_2-1}e^{\lambda_2 t}; \cdots; e^{\lambda_s t}, te^{\lambda_s t}, \cdots, t^{n_s-1}e^{\lambda_s t}$$

（2）解的渐近性质同方程组。

（3）求解常系数非齐次线性方程$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = f(t)$特解的方法：

（I）常数变异法

（II）待定系数法:

Case 1：$f(t) = P_m(t)e^{\mu t}$，$P_m(t)$为$m$次多项式。

若$\lambda = \mu$不是特征根，则非齐次方程有特解：$x_0(t) = Q_m(t)e^{\mu t}$，其中$Q_m(t)$为$m$次待定多项式。

若$\lambda = \mu$是$k$重特征根，则非齐次方程有特解：$x_0(t) = Q_m(t)t^k e^{\mu t}$，其中$Q_m(t)$为$m$次待定多项式。

Case 2：$f(t) = [A_m(t)\cos\beta t + B_l(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$，$A_m(t), B_l(t)$分别为$m$次和$l$次多项式。

若$\alpha \pm i\beta$ 不是特征根，则非齐次方程有特解：$x_0(t) = [C_p(t)\cos\beta t + D_p(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$，其中$C_p(t), D_p(t)$为$p$次待定多项式，其中$p = max\{m, l\}$。

若$\alpha \pm i\beta$ 是$k$重特征根，则非齐次方程有特解：$x_0(t) = t^k[C_p(t)\cos\beta t + D_p(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$，其中$C_p(t), D_p(t)$为$p$次待定多项式，其中$p = max\{m, l\}$。

（III）：算子解法：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{P(D)}e^{\lambda t} = \dfrac{1}{P(\lambda)}e^{\lambda t} \quad P(\lambda) \neq 0 \\ \dfrac{1}{P(D)}\cos\alpha t = \cos\alpha t \dfrac{1}{P(-\alpha^2)} \quad P(-\alpha^2) \neq 0 \\ \dfrac{1}{P(D)}\sin\alpha t = \sin\alpha t \dfrac{1}{P(-\alpha^2)} \quad P(-\alpha^2) \neq 0 \\ \dfrac{1}{P(D)}e^{\lambda t}v(t) = e^{\lambda t}\dfrac{1}{P(D+\lambda)}v(t) \\ \text{设} f_k(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_k t^k, \quad P(0) = a_n \neq 0 \\ \dfrac{1}{P(D)}f_k(t) = Q_k(t)f_k(t) \\ \text{其中} Q_k(t) \text{是} \dfrac{1}{P(D)} \text{ 在} D = 0 \text{附近泰勒展式的前} k+1 \text{项} \end{cases}$$

三种类型：

$$\begin{cases} (i) \quad f(t) = f_k(t) \\ (ii) \quad f(t) = e^{\lambda t}f_k(t) \\ (iii) \quad f(t) = \cos\alpha t f_k(t), \sin\alpha t f_k(t) \end{cases}$$

（4）求解非齐次线性方程组的消去法：

克莱姆法则—化为高阶线性方程。

# 第四章：基本理论

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

（1）Picard存在唯一性定理（证明方法，求解的存在区间（即$h$））。

（2）证明唯一性的两种方法（Bellman 不等式）。

（3）Peano 存在性定理（欧拉折线方程，意义）。

（4）求逼近解的方法。

（5）解的延展性（有界区域，无界区域，确定解的存在区间）。

（6）解对初值和参数的连续相依性（定理的叙述，条件，几何意义）

（7）解对初值和参数的可微性（条件：$f(t,x)$可微）：

（i） $\dfrac{\partial \varphi(t,t_0,x_0)}{\partial x_0}$存在连续且满足初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = f'_x(t,\varphi(t,t_0,x_0))z \\ z(t_0) = 1 \end{cases}$$

（ii） $\dfrac{\partial \varphi(t,t_0,x_0)}{\partial t_0}$存在连续且满足初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = f'_x(t,\varphi(t,t_0,x_0))z \\ z(t_0) = -f(t_0,x_0) \end{cases}$$

# 第五章：定性理论

（1）稳定性、渐近稳定性的概念；

（2）利用一次近似确定稳定性（注意条件）；

（3）Lyapunov第二方法；

（4）平衡点、奇点、相空间、轨线、相图、闭轨、极限环的概念；

（5）平面二阶系统奇点分类及判定。