§2 常系数齐次线性方程组的待定系数法

November 16, 2016

（二）A有重特征根的情形。

引理　设矩阵A有s个互不相同的特征根$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$，其重数分别为$n_1, \cdots, n_s$（$n_1 + \cdots + n_s = n$），则

（**1**）R^n的子集合$V_i = \{r \in R^n | (A - \lambda_i I)^{n_i} r = 0\}$是矩阵$A$的$n_i$维不变子空间，$i = 1, \cdots, s$.

（方程组$(A - \lambda_i I)^{n_i} r = 0$有$n_i$个线性无关解。）

（**2**）R^n有直和分解：$R^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$.

（$V_1, V_2, \cdots, V_s$的基合成R^n的基）

待定系数法解方程组$\dot{x} = Ax$

设矩阵A有s个互不相同的特征根$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$，其重数分别为$n_1, \cdots, n_s$ （$n_1 + \cdots + n_s = n$ ）。

(i) 对应λ_i，原方程有什么样形式的解？

(ii) 对应λ_i，有多少个线性无关解？

思路：基本解矩阵

$$
\begin{aligned}
\Phi(t) &= Te^{Jt} = (T_1, \cdots, T_s) \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_s t} \end{pmatrix} \\
&= (T_1 e^{J_1 t}, \cdots, T_s e^{J_s t}).
\end{aligned}
$$

待定系数法解方程组$\dot{x} = Ax$

$$T_i e^{J_i t} = (c_0, c_1, \cdots, c_{n_i-1}) e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

因此解具有形式

$$x(t) = e^{\lambda_i t} \left(h_0 + h_1 t + \frac{t^2}{2!} h_2 + \cdots + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} h_{n_i-1} \right).$$

其中h_i可通过待定系数法得到。

待定系数法解方程组$\dot{x} = Ax$

猜测：

若λ是k重特征根，则有如下形式的解：

$$x(t) = e^{\lambda t}\left(h_0 + h_1 t + \frac{t^2}{2!}h_2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}h_{k-1}\right).$$

待定系数法解方程组$\dot{x} = Ax$

定理2.3 设λ是A的k重特征根，则方程有形如

$$x(t) = e^{\lambda t}\left(h_0 + h_1 t + \frac{t^2}{2!}h_2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}h_{k-1}\right) \tag{1}$$

的非零解当且仅当h_0是代数方程组

$$(A - \lambda I)^k h = 0 \tag{2}$$

的非零解，而$h_1, \cdots, h_{k-1}$由下面的关系式确定

$$\left\{\begin{array}{ccc} h_1 & = & (A-\lambda I)h_0 \\ h_2 & = & (A-\lambda I)h_1 \\ & \vdots & \\ h_{k-1} & = & (A-\lambda I)h_{k-2}. \end{array}\right. \tag{3}$$

待定系数法解方程组$\dot{x} = Ax$

定理**2.3**的证明思路：代入方程比较系数。

定理**2.4**　设矩阵A在复数域上有s个互不相同的特征根$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$，其重数分别为$n_1, \cdots, n_s$（$n_1 + \cdots + n_s = n$），则

(i) 对λ_i，方程组有形如**(1)**的n_i个线性无关解。

(ii) 对每个λ_i，求出方程组形如**(1)**的n_i个线性无关解，将它们合在一起就是方程组$\dot{x} = Ax$的一个基本解组。

原因：利用引理即得（得到的n个解构成的**wronski**行列式在$t = 0$处不为零）。

例题

例2.5　求解方程组$\dfrac{dx}{dt}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}x$。

特征根：$\lambda_1=-2, \lambda_2=\lambda_3=1$.

例2.6　求解方程组$\dfrac{dx}{dt}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}x$.

二种方法求解。

方程组$\dot{x} = Ax$解的渐进性质

讨论方程组$\dot{x} = Ax$解的渐进性质。

基本解组中每个解都具有形式：$x(t) = e^{\lambda t}P(t)$。

(i) 若A的所有特征根的实部都小于零，即$\mathbf{Re}\lambda_i < 0$，则对方程组的任意解$x(t)$都有$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

(ii) 若A至少有一个特征根具有正的实部，则方程组存在解在$t \to +\infty$时趋于∞（存在无界解）。

(iii) 若A的所有特征根的实部都小于等于零，即$\mathbf{Re}\lambda_i \leq 0$，且实部为零的特征根对应的初等因子是一次的，则所有解都有界。

方程组$\dot{x} = Ax$解的渐进性质

- 原因：若$\lambda_0 = i\beta$是k重特征根，因初等因子为一次的，则有k个线性无关的特征向量$h_0^{(1)}, h_0^{(2)}, \cdots, h_0^{(k)}$，即$(A - \lambda_0 I)h_0^{(i)} = 0$，从而$(A - \lambda_0 I)^k h_0^{(i)} = 0$，$i = 1, \cdots, k$。利用定理**2.3**，$\lambda_0$对应的$k$个解具有形式$(\cos\beta t + i\sin\beta t)h_0^{(i)}$，$i = 1, \cdots, k$。
- k重特征值$\lambda_0 = i\beta$，其对应的初等因子都是一次的$\Leftrightarrow$对应特征值$\lambda_0 = i\beta$，A 有k个线性无关的特征向量。
- 作业：

  P 82: 1, 3.

  P 86: 1(2), 1(3).