第二章　线性方程

October 18, 2016

§1　引言

一阶线性方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

其中$a_{ij}, f_i, i = 1, \cdots, n$都是区间$I$上的已知函数。记

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{pmatrix},$$

引言

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

方程可写为：

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t). \qquad (NH)$$

- 当$f(t)\equiv 0$，方程称为齐次线性方程.
- 当$f_i(t)(i=1,\cdots,n)$不都恒为零时，方程称为非齐次线性方程。
- 初始条件：$x_i(t_0)=\xi_i,\quad i=1,2,\cdots,n$

  向量形式：$x(t_0)=\xi.$

问题

(1.) 线性方程组初值问题解的存在性、唯一性？

回忆一阶线性方程。

(2.) 理论上通解结构？

求解问题？

矩阵范数

记

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

- 向量x和矩阵A的模（也称为范数）定义如下：

$$|x| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad |A| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

- 范数的性质：

I. $|Ax| \le |A||x|$.

II. $|AB| \le |A||B|, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

III. $|A^m| \le |A|^m$.

矩阵（向量）函数的性质

IV. $|x+y| \le |x| + |y|, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n.$

矩阵函数或向量函数的概念和性质：

(i) 矩阵函数称为连续（可微）的，如果它的每一个元素都是连续（可微）的。

(ii) 一个矩阵函数的导数仍为一矩阵函数，它的每个元素是原矩阵相应元素的导数。

向量函数及向量函数序列的性质

(I) 向量序列$\{x_k\} = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix}$称为收敛的，如果每个分量序列$\{x_{ki}\}$都是收敛的。

(II) 向量函数序列$\{x_k(t)\} = \begin{pmatrix} x_{k1}(t) \\ \vdots \\ x_{kn}(t) \end{pmatrix}$称为在区间$I$上一致收敛的，如果每个分量函数序列$\{x_{ki}(t)\}$在区间$I$上都是一致收敛的。

(II) n维向量函数级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)$在$I$上收敛（一致收敛），如果其部分和$S_k(t) = x_1(t) + \cdots + x_k(t)$ 构成的向量函数序列在I上收敛（一致收敛）。

(IV) 判定向量函数级数一致收敛的Weierstrass判别法：

如果$|x_k(t)| \leq M_k$, $t \in I$，而数项级数$\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 收敛，

则$\sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)$在$I$上一致收敛。

(V) 若$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$是$n$维向量，于$[a,b]$上连续，则

$$\left| \int_a^b x(t)dt \right| = \left| \begin{pmatrix} \int_a^b x_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b x_n(t)dt \end{pmatrix} \right| \leq \left| \int_a^b |x(t)|dt \right|.$$

向量函数及向量函数序列的性质

(VI) 积分号下取极限（积分号和极限号互换）：

如果$x_k(t)$在$[t_1, t_2]$上一致收敛，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_{t_1}^{t_2} x_k(t)dt = \int_{t_1}^{t_2}\lim_{k\to\infty} x_k(t)dt.$$

§2 解的存在性与唯一性

定理2.1 设$A(t)$和$f(t)$在区间I上连续，则对任意$t_0 \in I$和任意n维常向量ξ，方程组（NH）恒有定义在整个区间I上且满足初始条件$x(t_0) = \xi$的解，并且初值问题的解是唯一的。

证明思路：分4步。

(1.) 初值问题的解等价于下列积分方程的解：

$$x(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} (A(s)x(s) + f(s))ds. \tag{1}$$

(2.) 构造Picard逐步逼近序列：

$$\varphi_0(t) = \xi,$$

$$\varphi_k(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} (A(s)\varphi_{k-1}(s) + f(s))ds, \quad k = 1, 2, \cdots . \tag{2}$$

利用归纳法易证明$\varphi_k(t)$在区间I上有定义且连续。

(3.) 证明$\varphi_k(t)$在区间I上处处收敛，其极限函数是积分方程的解。为此，证明$\varphi_k(t)$在区间I的任意闭子区间$[a,b]$上一致收敛。

(4.) 因为$\varphi_k(t)=\varphi_0(t)+\sum_{m=1}^{k}(\varphi_m(t)-\varphi_{m-1}(t))$.

只需证明上述无穷级数在$[a,b]$上一致收敛。令

$$K=\max_{t\in[a,b]}\{|A(t)|,|A(t)\xi+f(t)|\}.$$

$$|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}(A(s)\xi+f(s))ds\right|\le K|t-t_0|,\quad t\in[a,b].$$

$$|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}A(s)(\varphi_1(s)-\varphi_0(s))ds\right|\le\frac{K^2|t-t_0|^2}{2!}.$$

解的存在性与唯一性

归纳法证明：

$$|\varphi_m(t) - \varphi_{m-1}(t)| \leq \frac{K^m|t-t_0|^m}{m!} \leq \frac{K^m|b-a|^m}{m!}, \quad t \in [a,b].$$

由一致收敛的判别法知序列$\{\varphi_k(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛。

- 令$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(t) = \varphi(t)$.

  由于对每个k，$\varphi_k(t)$在$[a,b]$上都连续，因此$\varphi(t)$也在$[a,b]$上连续。

- 于(2)两端对k取极限，则

$$\varphi(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} (A(s)\varphi(s) + f(s))ds,$$

即$x = \varphi(t)$是积分方程在$[a,b]$上的连续解。

- 故$x=\varphi_k(t)$在区间I上处处收敛，其极限函数仍记为$\varphi(t)$，因$\varphi(t)$在包含t_0的任意闭子区间上连续，所以$\varphi(t)$在区间I上连续。

(4.) 证明唯一性。

设$x=\varphi(t)$和$x=\psi(t)$是方程于区间I上的满足初始条件$x(t_0)=\xi$的两个解，往证$\varphi(t)=\psi(t)$在区间I上处处成立，只需证明上述等式在I的任意闭子区间$[a,b]$上都成立。

令

$$N=\max_{t\in[a,b]}\{|A(t)|,|\varphi(t)-\psi(t)|\}.$$

解的存在性与唯一性

则

$$\begin{aligned} |\varphi(t)-\psi(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} A(s)(\varphi(t)-\psi(t))ds\right| \\ &\leq N\left|\int_{t_0}^{t} |\varphi(t)-\psi(t)|ds\right| \end{aligned} \tag{3}$$

于是

$$|\varphi(t)-\psi(t)| \leq N^2|t-t_0|.$$

再代入(3)，则有

$$|\varphi(t)-\psi(t)| \leq \frac{N^3|t-t_0|^2}{2!}.$$

利用归纳法可得：

$$|\varphi(t)-\psi(t)| \leq \frac{N^{m+1}|t-t_0|^m}{m!}, \quad t \in [a,b].$$

令$m \to \infty$，则$\varphi(t)=\psi(t)$.

解的存在性与唯一性

- **引理2.1**　　齐次线性方程组的解若于区间I的某点处为零，则必于区间I上恒为零。

  （方程有零解，利用初值解的唯一性）

- Picard 迭代序列给出了求近似解的方法。

- 线性方程组的任何解的定义区间都在系数矩阵连续的区间上存在。非线性方程不具有这样的性质。

  例：$\dfrac{dy}{dx} = -y^2$.

  $f(x,y) = -y^2$在整个平面上处处连续，但解$y = \dfrac{1}{x}$不是在整个x轴上有定义。

作业

- P44: 1(I,III).
- P46: 1,2,5,6,8.
- 思考：

  （1）逼近的效果如何？

  （2）真实解和逼近解的误差估计。