§4 非齐次线性方程组(NH)的通解结构

October 19, 2016

主要内容

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \qquad\qquad (NH)$$

本节解决的问题：

(I) **通解结构定理。**

(II) **求（ＮＨ）特解的常数变异法。**

非齐次线性方程组解的性质

解的性质：

(1.) 非齐次线性方程组（**NH**）的解与相应的齐次线性方程组（**LH**）的解之和仍为非齐次线性方程组的解。

(2.) 非齐次线性方程组的任意两个解之差为对应的齐次线性方程组的解。

- 利用（1）和（2）来猜测非齐次线性方程组的通解结构。

通解结构定理

定理4.1 设$\varphi(t)$是（**NH**）的一个特解，$\Phi(t)$是对应齐次方程（**LH**）的一个基本解矩阵，则含有n维任意常向量C 的表达式

$$x=\Phi(t)C+\varphi(t) \tag{1}$$

是（N H）全部解的共同表达式。

证明思路：

- 对任意常向量C，形如**(1)**的（向量）函数都是（N H）的解。
- （N H）的任意一个解$x(t)$ 都可表示成**(1)**的形式。

$x(t)-\varphi(t)$是（L H）的解，因此存在常向量C^0使得

$$x(t)-\varphi(t)=\Phi(t)C^0 \Rightarrow x(t)=\Phi(t)C^0+\varphi(t).$$

常数变异法

求（N H）特解的方法和步骤：

1. 设（N H）对应的（L H）的一个基本解矩阵为$\Phi(t)$，则齐次方程的通解：
$$x = \Phi(t)C.$$
2. 设（N H）的特解具有形式：
$$x = \Phi(t)C(t).$$
其中$C(t)$待定。
3. 将$x = \Phi(t)C(t)$代入（N H）中，并利用$\dfrac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi(t)$，则有
$$\Phi(t)\frac{dC(t)}{dt} = f(t) \Rightarrow \frac{dC(t)}{dt} = \Phi^{-1}(t)f(t).$$

$$\Rightarrow C(t) = C + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) f(s) ds.$$

其中C为任意n维常向量。

4. 取$C = 0$，得到（N H）的一个特解

$$\varphi(t) = \Phi(t) C(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) f(s) ds.$$

5. 利用（N H）的通解结构定理得到（N H）的通解为：

$$x = \Phi(t) C + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) f(s) ds.$$

其中C为任意n维常向量。

常数变异公式

- 注意到上述（N H）的通解表达式恰好是将

$$C(t) = C + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) f(s) ds$$

代入到$x = \Phi(t)C(t)$中得到的。

- 设$\Phi(t) = \Psi(t, t_0)$是状态转移矩阵，则初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \\ x(t_0) = \xi \end{cases}$$

的解$x(t, t_0, \xi)$可表示为：

$$x(t, t_0, \xi) = \Phi(t) \left(\xi + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) f(s) ds \right).$$

常数变异公式

定理4.1　设$\Phi(t)$是（**NH**）对应的（**LH**）的一个基本解矩阵，则（**NH**）的全部解的共同表达式为

$$x = \Phi(t)\left(C + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) f(s) ds\right),$$

其中C为任意n维常向量，$t_0 \in I$可任意取定。

- 常数变异法：只要知道对应齐次方程组的一个基本解组（或基本解矩阵），就可求出非齐次方程组的通解。

思考题

思考题：

(i) **（NH）的所有解是否构成线性空间？**

(ii) **(NH)最多有多少个线性无关解？**

例子

例1　考虑微分方程组

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xe^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式中自变量x的取值区间不含$x = 0$.

（**1**）求对应齐次方程的一个基本解矩阵，并求出它的通解。

（**2**）求非齐次方程的通解。

齐次通解：

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x^2e^x - C_1x - C_1 + C_2e^x \\ y_2 = C_1x \end{cases}$$

§8 线性方程的复值解

(I) 复值函数概念及性质。

(II) 如何根据线性方程组（方程）的复值解得到实值解？

复值函数概念及性质

(1) **实变量复值函数**：$f(t) = u(t) + iv(t)$，t：**实变量**，$f(t)$：**复值**。

(2) $\lim_{t\to t_0} f(t) = A, \quad f(t) = u(t) + iv(t), \quad A = \alpha + i\beta.$

定义为：**对**$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$，**当**$|t - t_0| < \delta$**时**，**有**$|f(t) - A| < \varepsilon$。**即**

$$\sqrt{(u(t) - \alpha)^2 + (v(t) - \beta)^2} < \varepsilon \Rightarrow |u(t) - \alpha| < \varepsilon, \quad |v(t) - \beta| < \varepsilon.$$

于是

$$\lim_{t\to t_0} (u(t) + iv(t)) = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} u(t) = \alpha, \ \lim_{t\to t_0} v(t) = \beta.$$

复值函数概念及性质

(3) $f(t)=u(t)+iv(t)$在$t=t_0$处连续（$\lim_{t\to t_0} f(t)=f(t_0)$）.

函数$f(t)$在$t=t_0$处连续$\Leftrightarrow$ $u(t),v(t)$在$t=t_0$处连续。

函数$f(t)$在(a,b)上连续$\Leftrightarrow$ $u(t),v(t)$在(a,b)上连续。

(4) 函数$f(t)$在(a,b)上可积$\Leftrightarrow$ $u(t),v(t)$都在(a,b)上可积，且

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt.$$

(5) 函数$f(t)$在(a,b)上可微$\Leftrightarrow$ $u(t),v(t)$都在(a,b)上可微，且

$$f'(t)=u'(t)+iv'(t).$$

可微函数的性质：

$$(af(t))'=af'(t),\quad (f(t)+g(t))'=f'(t)+g'(t)$$

$$(f(t)g(t))'=f'(t)g(t)+f(t)g'(t),\quad (\frac{f}{g})'=\cdots$$

复值函数概念及性质

(6) **指数函数：** $e^{(\alpha+i\beta)t}$.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots.$$

$$e^{i\beta} = (1 - \frac{\beta^2}{2!} + \cdots) + i(\beta - \frac{\beta^3}{3!} + \cdots) = \cos\beta + i\sin\beta.$$

$$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta).$$

$$\Rightarrow e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t).$$

(7) **性质：** $\dfrac{de^{\lambda t}}{dt} = \lambda e^{\lambda t}, \quad \lambda = \alpha + i\beta.$

§8　线性方程的复值解

- **例：**

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 = \cos t + i\sin t \\ x_2 = -\sin t + i\cos t \end{cases}$$

能否根据复值解确定实值解？

复系数线性方程

1. 复系数线性方程组：

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \tag{2}$$

其中$A(t) = A_1(t) + iA_2(t), \quad f(t) = f_1(t) + if_2(t).$

复值解： $x(t) = u(t) + iv(t)$，**则**

$$u'(t) + iv'(t) = [A_1(t) + iA_2(t)][u(t) + iv(t)] + f_1(t) + if_2(t)$$

$$\begin{cases} u'(t) = A_1(t)u(t) - A_2(t)v(t) + f_1(t) \\ v'(t) = A_1(t)v(t) + A_2(t)u(t) + f_2(t) \end{cases} \tag{3}$$

线性方程的复值解

定理8.1 $x(t)=u(t)+iv(t)$是复系数方程组**(2)**的解$\Leftrightarrow$ $u(t)$和$v(t)$是实系数方程组**(3)**的解。

2. 实系数线性方程组：$\dfrac{dx}{dt}=A(t)x+f(t)$，其中$A(t),f(t)$分别是实值矩阵和实值向量。

复值解：$x(t)=u(t)+iv(t)$，则

$$u'(t)+iv'(t)=A(t)[u(t)+iv(t)]+f(t)$$

$$\begin{cases} u'(t)=A(t)u(t)+f(t) \\ v'(t)=A(t)v(t) \end{cases} \tag{4}$$

实系数线性方程的复值解

定理8.2

(i) $x(t)=u(t)+iv(t)$是实系数线性方程组（**NH**）的解$\Leftrightarrow$ $u(t)$是（**NH**）的解，$v(t)$是（**LH**）的解。

(ii) $x(t)=u(t)+iv(t)$是实系数齐次线性方程组（**LH**）的解$\Leftrightarrow$ $u(t)$和$v(t)$都是（**LH**）的解。

- 作业：

  P52: 1,2,3.