第一讲　　稳定性的概念

February 21, 2017

稳定性理论

（一） Lyapunov稳定性理论

(1) 稳定性的基本概念
(2) Lypunov第二方法，判定稳定和渐进稳定的方法和结果
(3) 不稳定性
(4) 周期系统的一致渐进稳定
(5) 时变系统的一致渐进稳定
(6) 一致渐进稳定的反问题，力学系统的稳定性

（二） 线性时不变系统—多项式理论

(1) 系统的结构性质
(2) 系统的稳定性特性
(3) Hurwitz稳定
(4) 区间多项式族稳定的顶点检验
(5) 复Hurwitz多项式及复系数区间多项式族稳定的顶点检验

(三） 线性时不变系统—状态空间方法

(1) Lyapunov方程与二次型Lyapunov函数
(2) 一次近似的合理性
(3) 输出稳定
(4) 极点配置与系统镇定
(5) 二次型最优
(6) 矩阵的稳定半径，摄动界确定的近似方法

(四） 线性时变系统

(1) 时变系统的特征
(2) 周期线性系统
(3) 时变系统零解的指数渐进稳定
(4) 时变系统的可控性、可观性
(5) 时变系统的可镇定性

(五） 控制系统稳定性—-绝对稳定性及相关问题

(1) 线性系统的频域稳定性判据
(2) 绝对稳定性
(3) 圆判据
(4) Popov判据
(5) 超稳定性

Lyapunov稳定性理论

- 各种稳定性的概念
- Lypunov第二方法，判定各种稳定性的方法和结果

符号

- $\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$：实数与复数域。$\mathbf{R}_+$：全体正实数。
- $\mathbf{R}^n$，$\mathbf{C}^n$：n维实与复向量空间。
- $\mathbf{R}^{m\times n}$，$\mathbf{C}^{m\times n}$：$m\times n$的实与复矩阵组成的集合。
- $\mathbf{B}(x_o,\rho)$: n维实空间中中心在x_0半径为ρ的闭球，即

$$\mathbf{B}(x_0,\rho)=\{x|x\in\mathbf{R}^n,\|x-x_0\|\le\rho\}$$

其中$x^Tx=\|x\|^2$. 开球:

$$\overset{\circ}{\mathbf{B}}(x_0,\rho)=\{x|x\in\mathbf{R}^n,\|x-x_0\|<\rho\}$$

概念、定理的叙述方法

- **例1.1** 实函数$f(x):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$在开集$\mathbf{M}\subset\mathbf{R}^n$内是连续的：

$$(\forall\varepsilon>0)(\forall x_0\in\mathbf{M})(\exists\delta>0)(\forall x\in\overset{\circ}{\mathbf{B}}(x_0,\delta)\subset\mathbf{M}):$$

$$\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon.$$

  在$\mathbf{M}$上连续的函数的集合记为$C[\mathbf{M}]$.

- **例1.2** 设$\mathbf{S}\subset\mathbf{R}^n$系一开集，$\theta\in\mathbf{R}$，称$f(t,x)$关于$x$在$\mathbf{S}$上满足Lipschitz条件，系指

$$(\exists k>0)(\forall x_1,x_2\in\mathbf{S})(\forall t\in\mathbf{R}_\theta):\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\le k\|x_1-x_2\|.$$

  函数$f(t,x):\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}\to\mathbf{R}^m$称为对$x$满足局部Lipschitz条件，系指

$$(\forall\text{有界闭集}\mathbf{N}\subset\mathbf{S})(\exists k>0)(\forall x_1,x_2\in\mathbf{N})(\forall t\in\mathbf{R}_\theta):$$

$$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\le k\|x_1-x_2\|.$$

- Lip$_x[\cdot]$: 表示对x的Lipschitz条件，LLip$_x[\cdot]$: 表该条件是局部的.

稳定性概念

- 考虑微分方程

$$\dot{z} = g(t, z) \tag{1.1}$$

其中$z(t) \in \mathbf{R}^n, g(t, z) : \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S} \to \mathbf{R}^n, \mathbf{S} \subset \mathbf{R}^n$,且

$$g(t, z) \in C[\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}] \cap LLip_z[\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}] \tag{1.2}$$

则初值问题:

$$\dot{z} = g(t, z), \ z(t_0) = z_0 \in \mathbf{S} \tag{1.3}$$

存在唯一解. 记为$z(t; t_0, z_0)$. 显然$z(t_0; t_0, z_0) = z_0$.

- 假定$z(t; t_0, z_0)$在$[t_0, +\infty)$有定义且有$z(t; t_0, z_0) \in \mathbf{S}, \forall t \geq t_0$.

- **定义1.1** 系统(1.1)的特解$\tilde{z}(t)$是稳定的，系指

$$(\forall\varepsilon>0)(\forall t_0\in\mathbf{R}_\theta)(\exists\delta>0)(\forall z_0|(z_0-\tilde{z}(t_0))\in\overset{\circ}{\mathbf{B}}_\delta)$$

$$(\forall t\geq t_0):(z(t;t_0,z_0)-\tilde{z}(t))\in\overset{\circ}{\mathbf{B}}_\varepsilon\ . \tag{1.4}$$

若此外还有

$$\lim_{t\to\infty}(z(t;t_0,z_0)-\tilde{z}(t))=0 \tag{1.5}$$

则特解$\tilde{z}(t)$就是渐近稳定的.

几何意义

- 初值靠近,解曲线不会离得太远.
- 任给一个以$\tilde{z}(t)$为中心，2ε为长度的带形区域Σ,
对$\forall t_0 \in \mathbf{J} = \mathbf{R}_\theta = [\theta, +\infty), \exists \delta(\varepsilon, t_o) > 0$，当初值$z_0$在以$\tilde{z}(t_0)$ 为中心的δ邻域时，解$z(t; t_0, z_0)$不会跑出带形区域Σ。
- 图形理解

方程(1.1)特解的稳定性⇔ 另一方程零解的稳定性

- **注1**: 不失一般性，只讨论零解的稳定性，即方程(1.1)特解的稳定性⇔ 另一方程零解的稳定性。

设$\tilde{z}(t)$是$\dot{z}(t) = g(t, z(t))$的特解，令$x(t) = z(t) - \tilde{z}(t)$，则

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(t, x(t) + \tilde{z}(t)) - g(t, \tilde{z}(t)) = f(t, x) \\ x(t_0) = z(t_0) - \tilde{z}(t_0) \end{cases} \tag{1.6}$$

容易证明：
$1^\circ . f(t, 0) \equiv 0$,即$x = 0$是(1.6)的一个特解，它是(1.6)的平衡位置；
2°.系统(1.1)的特解$\tilde{z}(t)$是稳定或渐近稳定当且仅当系统

$$\dot{x}(t) = f(t, x), f(t, 0) = 0 \tag{1.7}$$

的平衡位置$x = 0$是稳定或渐近稳定.

零解的稳定性和一致稳定性

- **定义1.2** 系统(1.7)平衡点$x=0$是稳定的，系指

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall t_0 \in \mathbf{R}_\theta)(\exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0)(\forall x_0 \in \mathring{\mathbf{B}}_\delta)(\forall t \geq t_0):$$

$$x(t; t_0, x_0) \in \mathring{\mathbf{B}}_\varepsilon$$

反之，若

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists t_0 \in \mathbf{R}_\theta)(\forall \delta > 0)(\exists x_0 \in \mathring{\mathbf{B}}_\delta)(\exists t_1 \geq t_0): x(t_1; t_0, x_0) \bar{\in} \mathring{\mathbf{B}}_\varepsilon$$

则系统(1.7)的平衡位置$x=0$为不稳定.

- **定义1.3** 系统(1.7)的零解$x=0$是一致稳定的，系指

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall t_0 \in \mathbf{R}_\theta)(\forall x_0 \in \mathring{\mathbf{B}}_\delta)(\forall t \geq t_0): x(t; t_0, x_0) \in \mathring{\mathbf{B}}_\varepsilon$$

δ实际上只与$\varepsilon > 0$有关(看图).

- 一般情况下系统特解是否稳定将不仅取决于系统，而且取决于特解本身.
- 对于线性系统

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.8}$$

则可以有

定理1.1 线性系统(1.8)任一特解$\tilde{x}(t)$是稳定的当且仅当其零解是稳定的.

证明 考虑任一特解$\tilde{x}(t)$，令$y(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$，则$y$满足

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t) = A(t)x(t) - A(t)\tilde{x}(t) = A(t)y \tag{1.9}$$

注意到(1.8)与(1.9)实际上是同一系统，则定理得证. □

- **注3**: 定理1.1所表述的这种线性系统才具有的特性对一般非线性系统说来是不存在的，即一般非线性系统其特解的稳定性并不等价于零解的稳定性.

例子

- **例1.1** 研究单摆运动方程

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \sin\xi = 0$$

令$\xi_1 = \xi, \xi_2 = \dot{\xi}$，则

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = -\omega\sin\xi_1 \end{cases}$$

考虑该系统的总能量$V = \omega^2(1-\cos\xi_1) + \frac{1}{2}\xi_2^2$，则

$1°.\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \xi_1}\dot{\xi}_1 + \frac{\partial V}{\partial \xi_2}\dot{\xi}_2 = 0$，系统是保守的或能量守衡的.

$2°.V =$常数，在原点附近是封闭曲线.

因$V(0,0) = 0, V$是ξ_1, ξ_2的连续函数，且

$$V(\xi_1(t), \xi_2(t)) = V(\xi_1(t_0), \xi_2(t_0)).$$

平衡点$\xi_1 = \xi_2 = 0$是稳定的.

- 考虑时不变系统

$$\dot{x}= f(x), \quad f(0) = 0 \tag{1.10}$$

定理1.2 时不变系统(1.10)的零解稳定与零解一致稳定是等价的.

证明 $x(t;0,x_0)$是解$\Rightarrow$ 对任意t_0, $x(t-t_0;0,x_0)$也是解。
唯一性$\Rightarrow x(t;t_0,x_0) = x(t-t_0;0,x_0)$.
零解稳定$\Rightarrow (\forall\varepsilon>0),(\exists\delta(\varepsilon)>0),(\forall\|x_0\|<\delta),(\forall t-t_0\geq 0):$
$\|x(t-t_0;0,x_0)\|<\varepsilon$.
$\Rightarrow \|x(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon$，即零解是一致稳定的. □

- **注4 （作业）** 系统若是周期的，即存在$T\in\mathbf{R}_+$使系统(1.7)有

$$f(t,x) = f(t+T,x), \forall x\in\mathbf{S}, \forall t\in\mathbf{R}_\theta \tag{1.11}$$

则(1.7)的零解稳定可推出一致稳定.

吸引的概念

- **定义1.4** 系统(1.7)的零解$x=0$是吸引的，系指

$$(\forall t_0 \in \mathbf{R}_\theta)(\exists \eta > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\forall x_0 \in \mathbf{B}_\eta)(\exists T \geq 0)(\forall t \geq t_0 + T): \\ x(t;t_0,x_0) \in \mathbf{B}_\varepsilon \tag{1.12}$$

即对任意初始时刻都存在一个吸引区$\mathbf{B}_\eta$，从此吸引区内出发的解$\to 0$.

- 系统(1.7)的零解$x=0$是一致吸引的，系指

$$(\exists \eta > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\exists T \geq 0)(\forall t_0 \in \mathbf{R}_\theta)(\forall x_0 \in \mathbf{B}_\eta)(\forall t \geq t_0 + T): \\ x(t;t_0,x_0) \in \mathbf{B}_\varepsilon \tag{1.13}$$

即存在一个吸引区$\mathbf{B}_\eta$（与t_0无关），对任意初始时刻从此吸引区内出发的解$\to 0$.

吸引的概念

- 系统(1.7)的零解$x=0$是全局一致吸引的，系指

$$(\forall \eta > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\exists T \geq 0)(\forall t_0 \in \mathbf{R}_\theta)(\forall x_0 \in \mathbf{B}_\eta)(\forall t \geq t_0 + T):$$
$$x(t; t_0, x_0) \in \mathbf{B}_\varepsilon \tag{1.14}$$

即对任意初始时刻从任一点出发的解$\to 0$（吸引区是全空间）.

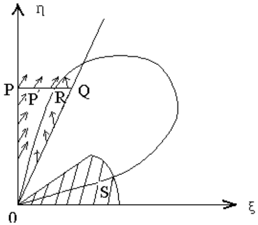
- **注5** 上述定义中出现的T常称为吸引时间或衰减时间，而初值选取的范围称为吸引区。当原点为吸引时，其吸引区的寻求是十分困难的，一般只可能寻求其子集以满足充分性的要求，例如上述$\mathbf{B}_\eta$就是一个满足充分性要求的吸引区.

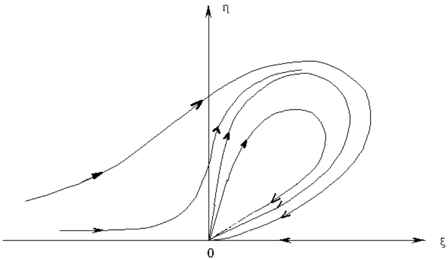
- **例1.2** 研究二阶系统
$$\begin{cases} \dot{\xi} = \varphi_1(\xi,\eta) = \dfrac{\xi^2(\eta-\xi)+\eta^5}{(\xi^2+\eta^2)[1+(\xi^2+\eta^2)^2]} \\ \dot{\eta} = \varphi_2(\xi,\eta) = \dfrac{\eta^2(\eta-2\xi)}{(\xi^2+\eta^2)[1+(\xi^2+\eta^2)^2]} \end{cases}$$
$\xi=\eta=0$ 是该系统唯一的平衡点。
零解是吸引的但不稳定.

- 由于
$$\varphi_1(-\xi,-\eta) = -\varphi_1(\xi,\eta), \varphi_2(-\xi,-\eta) = -\varphi_2(\xi,\eta)$$
则吸引的积分曲线及流向刚好关于原点对称，因而整个讨论仅需在上半平面进行.

- 引入极坐标$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}, u=\tan\varphi=\dfrac{\eta}{\xi}$,则有
$$\dot{\rho}=\frac{\rho}{(1+\rho^4)(1+u^2)^2}[u^4-2u^3+u-1+u^3\rho^3\sin^2\varphi]$$
可以证明积分曲线的渐近性质，它们最终将进入图1.1中带阴影的区域S中，而$\rho(t)$的渐近性质可由
$$\rho(t)=o(e^{-t/15}),\quad \lim_{t\to\infty}\rho(t)=0$$
刻画，从而零解是吸引的.

吸引和稳定的关系





吸引和稳定的关系

- 为了证明原点不稳定，研究三角形区域OPQ，其边界为
$$\eta = \frac{1}{\sqrt{27}}, \quad \eta = 3\xi, \quad \xi = 0$$
交点Q的坐标为$(1/3\sqrt{27}, 1/\sqrt{27})$.
PO线上，$\dot{\xi} > 0$;
PQ 线上，$\dot{\eta} > 0$;
OQ 线上，$\dfrac{d\eta}{d\xi} = \dfrac{9}{2 + 243\xi^2} > 3.$
由此，在三角形OPQ 的两边OP 与OQ上积分曲线均流入，而于PQ线上流出.由于$1/\sqrt{27}$是一固定的数，于是原点是不稳定的.

渐近稳定和指数渐近稳定

- **定义1.5** 系统(1, 7)的零解是渐近稳定的，系指它是稳定的又是吸引的；是一致渐近稳定的，系指它是一致稳定的又是一致吸引的；是全局一致渐近稳定的，系指它是一致稳定的又是全局一致吸引的.

- **定义1.6** 系统(1.7)的零解$x = 0$是局部按指数渐近稳定的，系指

$$(\exists\eta > 0)\,(\exists M > 0)\,(\exists\alpha > 0(\forall t_0 \in \mathbf{R}_\theta)(\forall x_0 \in \mathring{\mathbf{B}}_\eta)(\forall t \geq t_0) : \\ \|x(t; t_0, x_0)\| \leq M\|x_0\|e^{-\alpha(t-t_0)}$$

- 当$\eta = +\infty$时，则称对应的零解是全局指数渐近稳定的.

- 局部，全局：初值的范围。

渐近稳定和指数渐近稳定

- **注6** 零解局部指数渐近稳定必为一致渐近稳定，全局指数渐近稳定必为全局一致渐近稳定，但逆命题一般不成立.

- **例1.3** $\dot{\xi} = -\xi^3$
  通解为$\xi(t;t_0,\xi_0) = \dfrac{\xi_0}{\sqrt{1+2\xi_0^2(t-t_0)}} = \varphi(t-t_0,\xi_0)$.显然它是一致渐近稳定的，但不是指数渐近稳定的.

- 定理1.2指出，对于具周期的系统（时不变系统是其特例）稳定与一致稳定等价. 用完全类似的方法可以证明

  定理1.3 对于具周期的系统(1.11)，则其零解渐近稳定与一致渐近稳定等价.

- 求解非线性微分方程再讨论其解的性质非常困难.
- Lyapunov 受力学系统中渐近稳定平衡位置附近总能量必逐步减少这一物理现象的启发，引入一个供讨论用的辅助函数（以后称Lyapunov函数或V函数）通过它及它对系统的全导数的性质来判定稳定性等。
- Lyapunov函数方法又与一系列控制问题，诸如最优控制、鲁棒控制、自适应辨识$\cdots$等，有着广泛的联系，并成为解决这些问题的锐利工具。

- 设辅助函数$V : \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S} \to \mathbf{R}$ 具有下述性质：
  $1^\circ.V(t,x)$对其变量是一阶可微的或至少是分块一阶可微的；
  $2^\circ.V(t,0)=0, \forall t \in \mathbf{R}_\theta$.
-
$$\dot{x}(t) = f(t,x), f(t,0) = 0 \tag{2.1}$$
  设(2.1)满足解对初值的存在唯一性条件. $x(t)$ 是方程(2.1)的解，则$V(t,x)=V(t,x(t))$对t的Dini导数存在，即
$$D^+V(t,x)|_{(2.1)} = \limsup_{h\to 0^+} \frac{V(t+h, x+hf(t,x)) - V(t,x)}{h} \tag{2.2}$$
- 若$V(t,x)$本身是一阶可微的，则对应Dini导数就是通常的导数.
$$\dot{V}(t,x)|_{(2.1)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla V \cdot f(t,x) \tag{2.3}$$
  其中
$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$$

正定Lyapunov函数

- **定义2.1** $W(x): \mathbf{S} \to \mathbf{R}$是正定的，系指

$$(\forall x \neq 0): W(x) > 0, \quad W(0) = 0 \tag{2.4}$$

- $V(t,x): \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S} \to \mathbf{R}$是正定的，系指

$$(\exists W(x)\text{正定})(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}): V(t,x) \geq W(x)\text{且}V(t,0) = 0 \tag{2.5}$$

- $V(t,x): \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S} \to \mathbf{R}$是半正定的(或非负定的)，系指

$$(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}): V(t,x) \geq 0\text{且}V(t,0) = 0 \tag{2.6}$$

- 类似可以有负定、半负定(非正定)的概念.

例子

- **例2.1** 若$P = P^T \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $V(x) = x^T Px$,则$V(x)$正定当且仅当P是正定对称矩阵.
- **例2.2** $V(t,x) = \dfrac{x^T x}{1+t^2}$是半正定的但不是正定的.
- **例2.3** $V(x) = 1 + x^T x$不是正定函数，虽然它具有

$$(\forall x \neq 0) : V(x) > 0$$

但$V(0) = 1 \neq 0$.

$\mathcal{K}$类函数

- **定义2.2** （见图）函数$\alpha(\mu):\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$是$\mathcal{K}$类函数或$\alpha(\mu)\in\mathcal{K}$,系指$\alpha(\cdot)$连续且
  $1^\circ.(\forall\mu\neq 0):\alpha(\mu)>0$且$\alpha(0)=0$;
  $2^\circ.(\forall\mu_1>\mu_2\geq 0):\alpha(\mu_1)>\alpha(\mu_2)$.
- **定义2.3** $V(t,x):\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}\to\mathbf{R}$ 具无穷小上界，系指

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall(t,x)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{B}_\delta):|V(t,x)|<\varepsilon$$

  是具定常界，系指

$$(\exists\text{连续函数}W(x),W(0)=0)(\forall(t,x)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}):$$

$$|V(t,x)|\leq W(x).$$

- **注1** $V(t,x)$具定常界$\Rightarrow V(t,x)$具无穷小上界.
  （利用$W(x)$在$x=0$点连续）

正定函数的等价条件

- **定理2.1** 函数$V(t,x):\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}\to\mathbf{R}$是正定的当且仅当

$$(\exists\alpha(\mu)\in\mathcal{K})(\forall(t,x)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}):V(t,x)\geq\alpha(\|x\|) \tag{2.7}$$

是具定常界的当且仅当

$$(\exists\beta(\mu)\in\mathcal{K})(\forall(t,x)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}):|V(t,x)|\leq\beta(\|x\|) \tag{2.8}$$

- **证明** 先证$V(t,x)$是正定的情形.
$\Leftarrow$: 显然.
$\Rightarrow$(构造性): $V(t,x)$正定$\Rightarrow$

$$(\exists W(x)\text{正定})(\forall(t,x)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}):V(t,x)\geq W(x)$$

由$W(x)$连续，可令

$$\varphi(\mu)=\min_{\|x\|=\mu}W(x)$$

由$W(x)$正定$\Rightarrow$:

1. $\varphi(0)=0,\varphi(\mu)\in\mathbf{C}([0,\rho))$, 其中$\rho=\sup\{\|x\|\mid x\in\mathbf{S}\}$
2. $(\forall\mu\neq0):\varphi(\mu)>0$

定理2.1的证明

- 如图所示，在$\mathbf{R}^2$上考虑集合

$$\mathbf{F} = \{(\mu, \lambda) \mid \lambda \geq \varphi(\mu); 0 \leq \mu < \rho\}$$

令$\mathbf{A}$ =Conv($\mathbf{F}$)，即$\mathbf{A}$是$\mathbf{F}$的凸包，其定义为

$$\mathbf{A} = \{y \mid y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2; \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, y_i \in \mathbf{F}\}$$

则由$\mathbf{A}$可确定一凸函数$\alpha(\mu) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$，且有

$1^\circ.(\forall \mu \neq 0) : \alpha(\mu) > 0, \quad \alpha(0) = 0;$

$2^\circ.(\forall 0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \rho) : \alpha(\mu_1) < \alpha(\mu_2);$

$3^\circ.(\forall 0 \leq \mu < \rho) : \alpha(\mu) \leq \varphi(\mu).$

从而就有$\alpha(\cdot) \in \mathcal{K}$，且

$$(\forall (t, x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}) : V(t, x) \geq W(x) \geq \varphi(\|x\|) \geq \alpha(\|x\|)$$

定理2.1的证明

- 再证$V(t,x)$具定常界的情形.
  $\Leftarrow$: 显然.
  $\Rightarrow$: $V(t,x)$具定常界$\Rightarrow$

  $(\exists W(x)$是连续函数且$W(0)=0)(\forall(t,x)\in \mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}):|V(t,x)|\le W(x)$

  取$\varepsilon>0$,令$\beta(\mu)=\max\limits_{0\le\|x\|\le\mu}\{W(x)\}+\varepsilon\mu$,则有

  $1^\circ.\beta(0)=0,\beta(\mu)$连续;
  $2^\circ.(\forall 0\le\mu_1<\mu_2<\rho):\beta(\mu_1)<\beta(\mu_2)$;
  $3^\circ.(\forall(t,x)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}):V(t,x)\le\beta(\|x\|)$. $\square$

- **定义2.4** $V(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是m次齐次函数或m次型，系指

$$(\forall \lambda \in \mathbf{R})(\forall x \in \mathbf{R}^n) : V(\lambda x) = \lambda^m V(x)$$

- $V(t, x) : \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$为时变$m$ 次型，系指

$$(\forall \lambda \in \mathbf{R})(\forall (t, x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}^n) : V(t, \lambda x) = \lambda^m V(t, x)$$

正定m次型的等价条件

- **定理2.3** 若$V(t,x):\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为时变m次型，则$V(t,x)$正定当且仅当
$$(\exists\alpha>0)(\forall(t,x)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{R}^n):V(t,x)\geq\alpha\|x\|^m \tag{2.9}$$
$V(t,x)$具定常界当且仅当
$$(\exists\beta>0)(\forall(t,x)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{R}^n):V(t,x)\leq\beta\|x\|^m \tag{2.10}$$
- **证明** 由$V(t,x)$正定，可知存在正定函数$W(x)$，使得
$$V\left(t,\frac{x}{\|x\|}\right)\geq W\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$
令
$$\alpha=\inf_{\|x\|=1}\{W(x)\} \tag{2.11}$$
则$\alpha>0$且$\alpha\leq V\left(t,\frac{x}{\|x\|}\right)=\frac{1}{\|x\|^m}V(t,x)\Rightarrow(2.9)$.
令$\beta=\sup\limits_{t\in\mathbf{R}_\theta,\|x\|=1}\{|V(t,x)|\}$，类似可证明(2.10)成立. □

定理2.4和定理2.5

- **定理2.4** 设$V(t,x):\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}\to\mathbf{R}$有
$$V(t,x)=U(t,x)+W(t,x)$$
其中$U(t,x)$是时变正定m次型，$W(t,x)$有
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall(t,x)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{B}_\delta):|W(t,x)|\le\varepsilon\|x\|^m \tag{2.12}$$
即$W(t,x)=o(\|x\|^m)$对t一致成立，则
$$(\exists\eta>0)(\forall(t,x)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{B}_\eta):V(t,x)\text{正定} \tag{2.13}$$
- **定理2.5** 设$V(t,x)=U(t,x)+W(t,x),U$为m次型且
$$(\exists x_1,x_2\in\mathbf{R}^n)(\exists t_1,t_2\in\mathbf{R}_\theta):U(t_1,x_1)>0,U(t_2,x_2)<0$$
而$W(t,x)=o(\|x\|^m)$，即有(2.12)，则
$$(\forall\eta>0)(\exists z_1,z_2\in\mathbf{B}_\eta):V(t_1,z_1)>0,V(t_2,z_2)<0$$

$\mathcal{K}_\infty$类函数, 径向无界

- **定义2.5** $W(x) : \mathbf{S} \to \mathbf{R}$是在$\mathbf{S}$的边界上具无穷大下界，系指
$$(\forall M > 0)(\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \partial\mathbf{S})(\exists N > 0)(\forall n \geq N) : W(x_n) > M.$$
- **例** $V(x) = \dfrac{1}{1 - x^T x}$在$\mathbf{B}_1 = \{x \mid x^T x \leq 1\}$的边界$\partial\mathbf{B}_1$上具无穷大下界.
- **定义2.6** $\varphi(\mu) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ 称为$\mathcal{K}_\infty$类函数，系指$\varphi(\mu) \in \mathcal{K}$ 且有
$$\lim_{\mu\to\infty} \varphi(\mu) = +\infty.$$
- $V(t, x) : \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$称为是径向无界的，系指存在$\varphi \in \mathcal{K}_\infty$且有
$$(\forall (t, x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}^n) : V(t, x) \geq \varphi(\|x\|).$$

具无穷大下界的正定函数的等价条件

- **定理2.6** $W(x):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$正定且具无穷大下界当且仅当存在$\varphi(\mu)\in\mathcal{K}_\infty$,使

$$(\forall x\in\mathbf{R}^n): W(x)\geq\varphi(\|x\|).$$

- **例** $P=P^T\in\mathbf{R}^{n\times n}$是正定矩阵，则$x^TPx$是径向无界的.

令λ_1是P的最小特征值，则

$$x^TPx\geq\lambda_1 x^Tx=\lambda_1\|x\|^2.$$

- **例2.4** $(t+1)x^T x$ 在$[0,+\infty)\times\mathbf{R}^n$上正定但不具无穷小上界.
- **例2.5** 考虑

$$V(t,x)=\begin{cases} x^T x, & \|x\|\le 1\\ \left(1+t\sqrt{x^T x-1}\right)x^T x, & \|x\|>1\end{cases}$$

则V在$[0,+\infty)\times\mathbf{R}^n$上正定、具无穷小上界，但不具定常界。而当只讨论$t<1$时，则$V$在$[0,1)\times\mathbf{B}_\delta$上具定常界.

- **例2.6** $V(x)=5\xi_1^2+5\xi_2^2-6\xi_1\xi_2-\xi_1^3+\xi_2^5$
由于$U(x)=5\xi_1^2+5\xi_2^2-6\xi_1\xi_2\ge 2(\xi_1^2+\xi_2^2)$是二次齐次函数，且$|\xi_1|\le\sqrt[3]{\delta},|\xi_2|\le\sqrt[3]{\delta}$ 时有$|\xi_1^3|\le\delta\xi_1^2,|\xi_2^5|\le\delta\xi_2^2$, 其中，$\delta>0$，于是$V(x)$为正定函数.

作业

- 证明注4。
- 总结第一、第二节。
- 证明定理2.4, 2.5和定理2.6。
- 验证例2.4，2.5和例2.6。