第三讲　　渐近稳定

March 3, 2017

定理5.1 若对系统

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) = 0 \tag{5.1}$$

存在一阶可微函数$V(t,x) : \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S} \to \mathbf{R}$与三个$\mathcal{K}$类函数$\alpha(\cdot), \beta(\cdot)$与$\gamma(\cdot)$，使有

$1°.(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}) : \alpha(\|x\|) \le V(t,x) \le \beta(\|x\|)$;

$2°.(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}) : \dot{V}(t,x)|_{(5.1)} \le -\gamma(\|x\|)$.

又对任意给定的$\nu > 0$, $\overline{\mathbf{B}}_\nu \subset \mathbf{S}$,定义集合

$$\mathbf{A}_{t,\nu} = \{x | V(t,x) \le \alpha(\nu), x \in \mathbf{S}\} \tag{5.2}$$

则

(a) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists T > 0)(\forall x_0 \in \mathbf{A}_{t_0,\nu})(\forall t \ge t_0 + T)$:
$x(t;t_0,x_0) \in \overset{\circ}{\mathbf{B}}_\varepsilon$, 即原点是对$(t_0,x_0) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{A}_{t_0,\nu}$一致吸引的；

(b) $\bigcap_{t_0\in\mathbf{R}_\theta}\mathbf{A}_{t_0,\nu}=\mathbf{A}_\nu$是一以$x=0$为内点的区域，或$x=0$具一与$t_0\in\mathbf{R}_\theta$ 无关的公共吸引域.
（即$\exists\mu>0$与t_0无关，$\mathbf{B}_\mu\subset\mathbf{A}_\nu,\forall x_0\in\mathring{\mathbf{B}}_\mu,x(t;t_0,x_0)\to 0$）.
(a)与(b)表明系统零解一致渐近稳定.

证明思路: 先证(a)：

(1) 由$1^\circ,2^\circ$可知，对$\forall(t_0,x_0)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{A}_{t_0,\nu}$有

$$\alpha(\|x(t;t_0,x_0)\|)\le V(t,x(t;t_0,x_0))\le V(t_0,x_0)\le\alpha(\nu).$$

从而

$$(\forall(t_0,x_0)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{A}_{t_0,\nu})(\forall t\ge t_0):x(t;t_0,x_0)\in\mathbf{B}_\nu \tag{5.3}$$

(2) 由1°与2°可知(5.1)的零解一致稳定，即

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\eta>0)(\forall\tau\in\mathbf{R}_\theta)(\forall x_\tau\in\mathring{\mathbf{B}}_\eta)(\forall t\ge\tau):x(t;\tau,x_\tau)\in\mathring{\mathbf{B}}_\varepsilon \tag{5.4}$$

(3) 令

$$T_{\nu,\varepsilon} = \frac{\beta(\nu) - \alpha(\eta)}{\gamma(\eta)} \tag{5.5}$$

任取$\sigma > T_{\nu,\varepsilon}$. 则

$$(\exists \tau \in [t_0, t_0 + \sigma]) : x(\tau; t_0, x_0) \in \overset{\circ}{\mathbf{B}}_\eta \ . \tag{5.6}$$

反证，设若有

$$(\forall \tau \in [t_0, t_0 + \sigma]) : \|x(\tau; t_0, x_0)\| \geq \eta \tag{5.7}$$

则由(5.3)与(5.6)可知

$$\begin{aligned} \beta(\nu) - \alpha(\eta) &\geq V(t_0, x_0) - V(t_0 + \sigma, x(t_0 + \sigma; t_0, x_0)) \\ &= \int_{t_0}^{t_0+\sigma} -\dot{V}(\tau, x(\tau; t_0, x_0)) d\tau \geq \int_{t_0}^{t_0+\sigma} \gamma(\eta) d\tau \\ &= \sigma\gamma(\eta) > \beta(\nu) - \alpha(\eta) \end{aligned}$$

矛盾，从而(5.6)成立。

(4) 联系到(5.4)，则(a)成立，其中$T=\sigma$与$(t_0,x_0)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}$无关.（看图）

(b) 令$\mu>0$使$\beta(\mu)=\alpha(\nu)$,则

$$(\forall x\in\mathbf{B}_\mu):V(t,x)\le\beta(\mu)=\alpha(\nu).$$

于是

$$(\forall t\in\mathbf{R}_\theta):\mathbf{B}_\mu\subset\mathbf{A}_{t,\nu}.$$

从而

$$\mathbf{B}_\mu\subset\bigcap_{t\in R_\theta}\mathbf{A}_{t,\nu}=\mathbf{A}_\nu,$$

即(b)成立。

- **注1**　V正定，$\dot V$负定不能推出渐近稳定（书上反例）。

- **例5.1** $\dot{x} = p(t)x, \quad x \in \mathbf{R}$，其中$p(t)$有界，即

$$(\exists M > 0)\,(\forall t \in \mathbf{R}) :\mid p(t) \mid \leq M$$

取$V = e^{-(2M+1)t}x^2$，则有

$$\dot{V} = -(2M+1)e^{-(2M+1)t}x^2 + 2e^{-(2M+1)t}x^2 p(t) \leq -V$$

由于V与$-\dot{V}$均正定，于是任何一维有界线性系统都渐近稳定的。（荒谬结论！错误：V与$-\dot{V}$均正定）

- **注2** $T_{\nu,\varepsilon}$常称为由$\mathbf{A}_\nu$至$\mathbf{B}_\varepsilon$的衰减时间或吸引时间，它表明一切初值发生在$\mathbf{A}_\nu$内的运动，在经过$T_{\nu,\varepsilon}$时间后将永远留在$\mathbf{B}_\varepsilon$内。(5.5)给出的衰减时间是一充分性的估计.

S是吸引区的条件：

定理5.2　设$0 \in \mathbf{S} = \overset{\circ}{\mathbf{S}}$,则系统(5.1)的零解一致渐近稳定且$\mathbf{S}$为吸引区，如果存在一阶可微函数$V(t,x)$与正定函数$W_1(x)$和$W_2(x)$，满足

(i) $(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}) : W_1(x) \geq V(t,x) \geq W_2(x)$;

(ii) $(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}) : \dot{V}(t,x)|_{(5.1)}$负定；

(iii) $\lim\limits_{x \to \partial \mathbf{S}} W_2(x) = +\infty, \partial \mathbf{S}$是$\mathbf{S}$的边界. （无穷大边界）

证明思路：　定理5.1$\Rightarrow$ 一致渐近稳定.
下面证明$\mathbf{S}$是吸引区.

(1) 考虑$(t_0, x_0) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}$，因$W_1(x_0)$有限，于是$\exists k > 0$使集合$\{x | W_1(x) \leq k\} = \mathbf{S}_{1k} \subset \mathbf{S}$，$x_0 \in \mathbf{S}_{1k}$，且$\mathbf{S}_{1k}$是闭的。

(2) 对任给$\varepsilon > 0$，由于系统是一致稳定的，则存在$\varepsilon_1 > 0$，只要解一旦进入球$\mathbf{B}_{\varepsilon_1}$，其后的解永远留在球$\mathbf{B}_\varepsilon$内.

(3) 令

$$\eta = \min_{x}\{W_2(x)|x \in \mathbf{M} = \{\mathbf{S}_{1k} \backslash \overset{\circ}{\mathbf{B}}_{\varepsilon_1}\}\}$$

则

$$(\forall x|W_1(x) \leq \eta) : x \in \mathbf{B}_{\varepsilon_1}$$

事实上，$\forall x, W_1(x) \leq \eta \Rightarrow W_2(x) \leq \eta \Rightarrow x \bar{\in} \{\mathbf{S}_{1k} \backslash \overset{\circ}{\mathbf{B}}_{\varepsilon_1}\}$
再令

$$T = \frac{k-\eta}{\gamma}, \quad \gamma = \inf_{t \in \mathbf{R}_\theta, x \in \mathbf{M}}\{-\dot{V}(t,x)|_{(5.1)}\},$$

则在$[t_0, t_0 + T]$内至少有一点t_1 使$x(t_1, t_0, x_0) \in \overset{\circ}{\mathbf{B}}_{\varepsilon_1}$（同定理5.1），从而

$$(\forall t \geq t_0 + T) : x(t; t_0, x_0) \in \overset{\circ}{\mathbf{B}}_{\varepsilon}$$

这就证明了$\mathbf{S}$确为$x = 0$的一个吸引区.

- **注3** 由定理5.2的证明过程可知，对任何闭集$\mathbf{K} \subset \mathbf{S}$,与$\varepsilon > 0$, 则一切发生在$\mathbf{K}$中的扰动衰减至$\mathbf{B}_\varepsilon$内均存在一致的时间上界.
- **定理5.3** 在定理5.1的条件下，若$\mathbf{S} = \mathbf{R}^n$且有

$$\lim_{\mu \to \infty} \alpha(\mu) = +\infty \tag{5.8}$$

则$\mathbf{R}^n$是系统(5.1)的零解的吸引区，且从任何闭区域$\mathbf{K}$出发的解衰减至$\mathbf{B}_\varepsilon$的时间存在一致的上界，它由系统、$\mathbf{K}$与ε确定而与初始时刻无关。

例5.3 研究具阻尼的单摆，其方程为

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \sin\theta = 0 \tag{5.9}$$

其中θ是摆相对垂直轴的偏角. 用总能量来构造Lyapunov 函数，即

$$V_1 = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + (1 - \cos\theta)$$

它是正定的且与t无关，但

$$\dot{V}_1|_{(5.9)} = -\dot{\theta}^2$$

它是半负定的但不是负定的，因而用总能量作Lyapunov函数，目前只能得到零解稳定而不是渐近稳定的结论.

例子

- 如果考虑
$$V_2 = \dot{\theta}^2 + (\dot{\theta} + \theta)^2 + 4(1 - \cos\theta)$$
则对应有
$$\dot{V}_2|_{(5.9)} = -2(\dot{\theta}^2 + \theta\sin\theta)$$
是负定的，因而零解$(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$是一致渐近稳定的.
- **注4** V_1具有明显的物理意义，但不满足定理5.1的条件；而V_2满足了定理5.1的要求，但却没有什么直观的物理意义。更广的定理将可证明V_1也是可以用来判断渐近稳定性的

部分变元的渐近稳定性定理.

定理5.4 系统

$$\dot{z} = f(t,z), \quad z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbf{S} \subset \mathbf{R}^n,\ y \in \mathbf{R}^m \tag{5.10}$$

关于部分变元x取零为一致渐近稳定，如果存在连续可微的函数
$V(t,z) : \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$，且存在
$\alpha(\mu), \beta(\mu), \gamma(\mu) \in \mathcal{K}$，对$\forall (t,z) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S} \times \mathbf{R}^m$，有

(i) $\alpha(\|x\|) \leq V(t,z) \leq \beta(\|x\|^2 + \|Cy\|^2), C$系一矩阵；
(ii) $\dot{V}|_{(5.10)} \leq -\gamma(\|x\|)$.

- 在去掉Lyapunov函数V的具定常界的条件时，一般情形下将无法判断系统的渐近稳定性。但当系统右端的向量场$f(t,x)$是一有界的向量场时，结论是对的.
- **定理6.1** (L.,Salvdoni)系统

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) = 0 \tag{6.1}$$

的零解是渐近稳定的，仅需存在两个可微的辅助函数V与W : $\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S} \to \mathbf{R}$与三个$\mathcal{K}$类函数$\alpha(\cdot), \beta(\cdot)$与$\gamma(\cdot)$及一个常数$M > 0$,使当$\forall(t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}$有
$1°.V(t,x) \geq \alpha(||x||), W(t,x) \geq \beta(||x||), V(t,0) = W(t,0) = 0;$
$2°.\dot{V}(t,x)|_{(6.1)} \leq -\gamma(W(t,x));$
$3°.\dot{W}(t,x)|_{(6.1)} \leq M$或$\dot{W}(t,x)|_{(6.1)} \geq -M,$
又若$\nu > 0$使$\mathbf{B}_\nu \subset \mathbf{S}$,则

$$\mathbf{A}_{t_0,\nu} = \{x | x \in \mathbf{S}, V(t_0,x) \leq \alpha(\nu)\}$$

是t_0时的吸引区.

证明思路： 只需证明

$$(\forall x_0 \in \mathbf{A}_{t_0,\nu}) : \lim_{t\to\infty} W(t, x(t; t_0, x_0)) = 0 \tag{6.2}$$

（$W \geq \beta(\|x\|$ ）
现设上述结论不真，则

$$(\exists x_0 \in \mathbf{A}_{t_0,\nu}) : \lim_{t\to\infty} W(t, x(t; t_0, x_0)) \neq 0$$

记$W(t) = W(t, x(t; t_0, x_0))$。则仅下述两情形可以发生（看图）：

(a) $\lim_{t\to\infty} W(t, x(t; t_0, x_0)) = \alpha \neq 0$，或$\lim_{t\to\infty} W(t, x(t; t_0, x_0)) = +\infty$. 此时，

$$(\exists k > 0)(\exists \sigma > 0)(\forall t \geq t_0 + \sigma) : W(t, x(t; t_0, x_0)) \geq k;$$

(b) 振动: $(\exists k>0)$(∃两序列$\{t_i\}$与$\{t_i^{'}\}$使$t_i<t_i^{'}<t_{i+1}, i=1,2,\cdots): W(t_i)=\frac{k}{2}, W(t_i^{'})=k$ 且

$$\frac{k}{2}<W(\tau)<k, \forall\tau\in(t_i,t_i^{'})$$

简记$x(t)=x(t;t_0,x_0)$，由$x_0\in\mathbf{A}_{t_0,\nu}$，则有

$$\alpha(x(t))\le V(t,x(t))\le V(t_0,x_0)\le\alpha(\nu)$$

从而

$$x(t)\in\mathbf{B}_\nu, \forall t\ge t_0$$

- 现设(a)成立，此时有$\dot{V}|_{(6.1)}\le-\gamma(k)$，从而
$$0\le V(t,x(t))\le V(t_0+\sigma,x_\sigma)-\gamma(k)(t-t_0-\sigma), \forall t\ge t_0+\sigma$$
此式对充分大的t必不成立，于是(a)为不可能。

定理6.1的证明

- 再设(b)成立，不妨设
$$(\exists M > 0)(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}) : \dot{W}(t,x)|_{(6.1)} \le M$$
则有
$$(t_i^{'} - t_i)M \ge \frac{k}{2} \quad 或 \quad (t_i^{'} - t_i) \ge \frac{k}{2M}$$
再利用条件$2°$与$3°$，则
$$\begin{aligned} V(t_n^{'}, x(t_n^{'})) &\le V(t_0, x_0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_i^{'}} \dot{V}(s, x(s))|_{(6.1)} ds \\ &\le V(t_0, x_0) - n\gamma(\frac{k}{2})(\frac{k}{2M}) \end{aligned}$$
令n充分大，矛盾，因而(b)亦不成立。
- $(a),(b)$均不成立，表明(6.2)为真，从而零解是吸引的。由定理3.1零解已稳定，因而是渐近稳定的。又$x_0 \in \mathbf{A}_{t_0,\nu}$是任给的，表明$\mathbf{A}_{t_0,\nu}$确为$t_0$时的吸引区。
- 若考虑$\dot{W}(t,x)|_{(6.1)} \ge -M$的情形，证明相仿。

两个推论

- **推论6.1**　对系统(6.1),若有

$$(\exists k>0)(\forall (t,x)\in \mathbf{R}_\theta\times \mathbf{S}): ||f(t,x)||\le k \tag{6.3}$$

则其零解渐近稳定仅需存在一阶可微函数$V(t,x)$, $V(t,0)=0$与两个$\mathcal{K}$ 函数$\alpha(\cdot)$与$\beta(\cdot)$,使

$$(\forall (t,x)\in \mathbf{R}_\theta\times \mathbf{S}): V(t,x)\ge \alpha(||x||) \text{ 与 } \dot V(t,x)\le -\beta(||x||)$$

且按以前定义的$\mathbf{A}_{t_0,\nu}$是吸引区.
证明　令$W(t,x)=\sqrt{x^Tx}$，利用定理6.1即可证明。

- **推论6.2**　系统(6.1)的零解是渐近稳定的，仅需存在一阶可微的函数$V(t,x):\mathbf{R}_\theta\times \mathbf{S}\to \mathbf{R}$有$V(t,0)=0$与两个$\mathcal{K}$函数$\alpha(\cdot)$与$\gamma(\cdot)$使

$$(\forall (t,x)\in \mathbf{R}_\theta\times \mathbf{S}): V(t,x)\ge \alpha(||x||) \text{ 与 } \dot V(t,x)|_{(6.1)}\le -\gamma(V(t,x))$$

且如上定义的$\mathbf{A}_{t_0,\nu}$是吸引区。

部分变元渐进稳定性

若将推论6.1推广至部分变元，则易于证明：

- **推论6.3** (K. Peiffer, N. Rouche)假设$f_1(t,x_1,x_2)$ 有界，则系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t,x_1,x_2), & f_1(t,0,0)=0 \\ \dot{x}_2 = f_2(t,x_1,x_2), & f_2(t,0,0)=0 \end{cases}$$

的部分变元$x_1=0$是渐近稳定的，仅需存在一阶可微函数$V(t,x_1,x_2)$与两个$\mathcal{K}$类函数$\alpha(\cdot)$与$\gamma(\cdot)$使

$$(\forall(t,x)\in \mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}): V(t,x_1,x_2)\geq \alpha(||x_1||), \dot{V}|_{(6.4)}\leq -\gamma(||x_1||)$$

- 作业：证明推论6.1、推论6.2和推论6.3。

研究以T为周期的系统

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) \equiv 0 \tag{7.1}$$

其中f满足

$$(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}) : f(t,x) = f(t+T,x) \tag{7.2}$$

定理7.1 对系统(7.1)、(7.2),若有一阶可微的以T 为周期的函数$V(t,x)=V(t+T,x):\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}\to\mathbf{R}$和$\mathcal{K}$ 类函数φ，对$\forall(t,x)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}$，有

$1^\circ.V(t,x)\geq\varphi(||x||),V(t,0)\equiv 0;$

$2^\circ.\dot{V}(t,x)|_{(7.1)}\leq 0;$

$3^\circ.$ 在$\mathbf{M}\setminus(t,0)$中不存在系统的任何正半轨道，其中$\mathbf{M}=\{(t,x)|\dot{V}(t,x)|_{(7.1)}=0\}\subset\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}.$

则对给定的使$\overline{\mathbf{B}}_\alpha\subset\mathbf{S}$的$\alpha$,定义集合

$$\mathbf{A}_{t,\alpha}=\{x|V(t,x)\leq\varphi(\alpha)\}\subset\mathbf{S}$$

则

(a)零解渐近稳定；

$(b)t_0$时系统(7.1)的吸引区$\mathbf{A}_{t_0}\supset\mathbf{A}_{t_0,\alpha}.$

- 又若1°改为
  $1'.(\exists t_0 \in \mathbf{R}_\theta)(\forall \delta > 0)(\exists x_0 \in \mathring{\mathbf{B}}_\delta) : V(t_0, x_0) < 0$且$V(t, 0) = 0.$
  则系统的零解是不稳定的.

- **证明思路:**

(1) $V(t, x)$是一阶可微且对t为周期的函数$\Rightarrow$ $V(t, x)$ 在$[t, t+T] \times \overline{\mathbf{B}}_\alpha$上一致连续, 又$V(t, 0) = 0.$ $\Rightarrow$ $V(t, x)$具无穷小上界$\Rightarrow$ 零解已一致稳定.

(2) 对$\forall x_0 \in \mathbf{A}_{t_0,\alpha}$, 1°, $2^\circ$$\Rightarrow$ $\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \alpha.$

Krasovski定理的证明

- (3) 设$x_0 \in \mathbf{A}_{t_0,\alpha}$,以下仅需证明

$$\lim_{t\to\infty} x(t;t_0,x_0) = 0 \tag{7.3}$$

- 零解已一致稳定$\Rightarrow$ $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 当$\|x_0\| < \delta$ 时, 对任意$t \geq t_0$ 有$\|x(t;t_0,x_0)\| < \varepsilon$, 因而仅需证明(存在一个中间时刻)

$$(\forall\delta > 0)(\forall x_0 \in \mathbf{A}_{t_0,\alpha})(\exists t_1 \geq t_0) : \|x(t_1;t_0,x_0)\| < \delta \tag{7.4}$$

- 现设(7.4)不成立，即

$$(\exists\delta > 0)(\exists x_0 \in \mathbf{A}_{t_0,\alpha})(\forall t \geq t_0) : x(t;t_0,x_0) \in \mathbf{B}_\alpha \backslash \overset{\circ}{\mathbf{B}}_\delta \tag{7.5}$$

但差集$\mathbf{B}_\alpha \backslash \overset{\circ}{\mathbf{B}}_\delta$是闭的，于是在点列$\{x_k = x(t_0 + kT;t_0,x_0)\}$中必有一收敛的子列，设为$\{x_{i_k}\}$有

$$\lim_{k\to\infty} x_{i_k} = \lim_{k\to\infty} x(t_0 + i_kT;t_0,x_0) = x_0^* \in \mathbf{B}_\alpha \backslash \overset{\circ}{\mathbf{B}}_\delta$$

(4) $\dot{V} \leq 0, V \geq 0$,且V以T为周期⇒

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} V(t, x(t; t_0, x_0)) &= \lim_{k\to\infty} V(t_0 + i_k T, x_{i_k}) \\ &= \lim_{k\to\infty} V(t_0, x_{i_k}) = V(t_0, x_0^*)\end{aligned} \tag{7.6}$$

- 研究初值$x(t_0) = x_0^*$下的解$x(t; t_0, x_0^*)$。由于$\mathbf{M} \setminus (t, 0)$中不存在任何正半轨道，则$\exists t^* > t_0$使$\dot{V}(t^*, x(t^*; t_0, x_0)) < 0$，从而

$$V(t^*, x(t^*; t_0, x_0^*)) \neq V(t_0, x_0^*) \tag{7.7}$$

- 由$f(t, x) = f(t + T, x)$⇒ $x(t + i_k T; t_0 + i_k T, x_{ik})$是解，由唯一性⇒ $x(t + i_k T; t_0 + i_k T, x_{ik}) = x(t; t_0, x_{ik})$，则（看图）

$$x(t^*; t_0, x_{i_k}) = x(t^* + i_k T; t_0 + i_k T, x_{i_k}) = x(t^* + i_k T; t_0, x_0) \tag{7.8}$$

- 由(7.6) and (7.8)⇒

$$\begin{aligned}V(t_0, x_0^*) &= \lim_{k\to\infty} V(t^* + i_k T, x(t^* + i_k T; t_0, x_0)) \\ &= \lim_{k\to\infty} V(t^*, x(t^*; t_0, x_{i_k})) = V(t^*, x(t^*; t_0, x_0^*))\end{aligned}$$

Krasovski定理的证明

- 从而与(7.7)矛盾。矛盾表明(7.4)成立，即零解是渐近稳定的，又由于系统是周期的，由定理1.2,零解将是一致渐近稳定的。
- 下面证明第二部分, 解是不稳定（作业）. 用反证法.

例子

- **推论7.1**　若定理7.1中在条件1°上增加
$$\lim_{\mu\to\infty}\varphi(\mu)=+\infty$$
则$\mathbf{A}_{t_0}=\mathbf{R}^n$.
- **注**　如果系统是时不变的，V与$\dot V$亦为时不变.因此$\mathbf{M}$的定义可为$\mathbf{M}=\{x|\dot V=0\}$.上述定理中的$\mathbf{M}\setminus(t,0)$将用$\mathbf{M}\setminus\{0\}$代替.

例子

例7.2 研究受阻尼的线性弹性系统

$$\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$$

其中$C = C^T, K = K^T$均为实正定矩阵。现取V函数为

$$V = x^T Kx + \dot{x}^T \dot{x}$$

则V是$x, \dot{x}$的正定函数且$\dot{V} = -2\dot{x}^T C\dot{x} \leq 0$，并且

$$\mathbf{M} = \{(x, \dot{x}) | \dot{x} = 0\}$$

现仅需证明在$\mathbf{M} \setminus \{0\}$上无任何正半轨道即可。现设$(t, x(t), \dot{x}(t))$ 发生在$\mathbf{M} \setminus \{0\}$上，于是

$$\ddot{x}(t) = 0$$

代入方程可知

$$Kx = 0 \Rightarrow x = 0$$

于是由Krasovski定理可知零解$x = 0, \dot{x} = 0$是一致渐近稳定的.