第二讲　　稳定性与不稳定性的判定

February 18, 2019

1.3 稳定、输出稳定与部分变元稳定

- 稳定性判据
- 输出稳定性
- 部分变元稳定性

稳定性判据

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ f(t,0) \equiv 0,\ \forall t \in \mathbf{R}_\theta \end{cases} \tag{3.1}$$

定理3.1 如果存在Lyapunov函数V，使得

(i) $V(t,x) \in \mathbf{C^1}(\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S})$.

(ii) $\exists \rho > 0, \mathbf{B}_\rho \subset \mathbf{S}$，$V(t,x)$在$\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{B}_\rho$上正定且$\dot{V}(t,x)|_{(3.1)} \leq 0$.

则(3.1)的零解稳定。

证明思路：
往证对$\forall\varepsilon>0,\forall t_0,\exists\delta(\varepsilon,t_0),\forall\|x_0\|<\delta,\forall t\geq t_0$有$\|x(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon.$

(1) $V(t,x)$正定$\Rightarrow\exists\alpha(\mu)\in\mathcal{K}$，$V(t,x)\geq\alpha(\|x\|).$

(2) 对$\forall t_0$, $V(t_0,x)$在$x=0$点连续$\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon,t_0)>0,\forall x_0\in\mathring{\mathbf{B}}_\delta$，
有$V(t_0,x_0)<\alpha(\varepsilon).$

(3) $\dot{V}(t,x)|_{(3.1)}\leq 0\Rightarrow$
对$\forall t\geq t_0,V(t,x(t;t_0,x_0))\leq V(t_0,x_0)$。

(1), (2), (3)$\Rightarrow\alpha(\|x(t;t_0,x_0)\|)\leq V(t,x(t;t_0,x_0))<\alpha(\varepsilon)$
从而$(\forall t\geq t_0):\|x(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon.$ 零解稳定。 □

$$\alpha(\|x(t)\|)\leq V(t,x(t))\leq V(t_0,x_0)<\alpha(\varepsilon)$$

定理3.2 如果存在Lyapunov函数V，使得
(i) $V(t,x)\in \mathbf{C^1}(\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S})$.
(ii) $\exists\rho>0,\mathbf{B}_\rho\subset\mathbf{S}$，$V(t,x)$在$\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{B}_\rho$上正定且具无穷小上界。
(iii) 在$\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{B}_\rho$上$\dot{V}(t,x)|_{(3.1)}\leq 0$.
则(3.1)的零解一致稳定。

证明思路： 只需证明对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)$,
对$\forall t_0,\forall\|x_0\|<\delta,\forall t\geq t_0$有$\|x(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon$.

$$\alpha(\|x(t)\|)\leq V(t,x(t))\leq V(t_0,x_0)<\alpha(\varepsilon)$$

例3.1 刚体绕固定点转动的稳定性.

$$\begin{cases} \alpha\,\dot{\omega}_1 = (\beta-\gamma)\omega_2\omega_3 \\ \beta\,\dot{\omega}_2 = (\gamma-\alpha)\omega_3\omega_1 \\ \gamma\,\dot{\omega}_3 = (\alpha-\beta)\omega_1\omega_2 \end{cases} \tag{3.2}$$

研究其绕一固定轴作等速定常转动

$$\omega_1 = \omega_{10}, \omega_2 = \omega_3 = 0 \tag{3.3}$$

的稳定性. 令$\xi = \omega_1 - \omega_{10}, \eta = \omega_2, \zeta = \omega_3$ 则

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \dfrac{(\beta-\gamma)}{\alpha}\eta\zeta \\ \dot{\eta} = \dfrac{(\gamma-\alpha)}{\beta}(\omega_{10}+\xi)\zeta \\ \dot{\zeta} = \dfrac{(\alpha-\beta)}{\gamma}(\omega_{10}+\xi)\eta \end{cases} \tag{3.4}$$

系统(3.4)的零解$\xi = \eta = \zeta = 0$ 相当于系统(3.2)的特定运动(3.3).

例子

- 取Lyapunov函数为

$$V=\beta(\beta-\alpha)\eta^2+\gamma(\gamma-\alpha)\zeta^2+[\beta\eta^2+\gamma\zeta^2+\alpha(\xi^2+2\omega_{10}\xi)]^2$$

  则$\dot{V}\mid_{(3.4)}=0$，而当$\alpha<\min\{\beta,\gamma\}$ 时，V必正定，从而对应绕最小转动惯量的惯性主轴的转动是稳定的.

- 如果$\alpha>\min\{\beta,\gamma\}$，则可取

$$V=\beta(\alpha-\beta)\eta^2+\gamma(\alpha-\gamma)\zeta^2+[\beta\eta^2+\gamma\zeta^2+\alpha(\xi^2+2\omega_{10}\xi)]^2$$

  同样可以证明绕具最大转动惯量的惯性主轴的转动也是稳定的.

- 由于上述V是正定的，$\dot{V}=0$. 在三维空间中$V(\xi(t),\eta(t),\zeta(t))=C$代表一封闭曲面，当$C\neq 0$时，对应的解$\xi(t),\eta(t),\zeta(t)$不趋于零，零解不是渐近稳定的。

输出稳定性

- 研究系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S} \\ y = g(x) : \mathbf{S} \to \mathbf{S}' \subset \mathbf{R}^m \end{cases} \tag{3.5}$$

其中y是系统的输出.问题是要研究输出是否能保持某个特定的值y_0，即$y = g(x) = y_0$是否是稳定的. 不失一般性，可设$y_0 = 0 \in \mathbf{R}^m$，引入集合

$$\mathbf{F} = \{x \mid g(x) = 0\} = g^{-1}(0) \subset \mathbf{R}^n \tag{3.6}$$

假设$\mathbf{F}$是系统的一个不变集合（初值在此流形上，解曲线也在此流形上），即

$$(\forall t_0 \in \mathbf{R}_\theta)(\forall x_0 \in \mathbf{F})(\forall t \geq t_0) : x(t; t_0, x_0) \in \mathbf{F}.$$

- 定义集合

$$\mathbf{F}(\eta) = \{x \mid g(x) \in \mathbf{B}_\eta \subset \mathbf{R}^m\} \in \mathbf{R}^n$$

- 假定存在$\rho > 0$ 及系统在$\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{F}(\rho)$具解对给定初值的存在唯一性条件.

- **定义3.1** 系统(3.5)的输出$y = g(x)$取零是稳定的，系指

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall t_0 \in \mathbf{R}_\theta)(\exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0)(\forall x_0, \|g(x_0)\| < \delta)(\forall t \geq t_0): \|g(x(t; t_0, x_0))\| < \varepsilon.$$

而输出取零是一致稳定的，系指

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t_0 \in \mathbf{R}_\theta), (\forall x_0, \|g(x_0)\| < \delta)(\forall t \geq t_0): \|g(x(t; t_0, x_0))\| < \varepsilon.$$

- **定理3.3** 对系统(3.5), 如果

$$(\exists \rho > 0)(\exists \alpha \in \mathcal{K})(\exists V: \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{F}(\rho) \to \mathbf{R})(\forall (t, x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{F}(\rho)): V(t, x) \geq \alpha(\|g(x)\|)\text{且}\dot{V}|_{(3.5)} \leq 0 \tag{3.7}$$

则对应零输出是稳定的。
若还有

$$(\exists \beta \in \mathcal{K})(\forall (t, x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{F}(\rho)): V(t, x) \leq \beta(\|g(x)\|) \tag{3.8}$$

则零输出是一致稳定的，

部分变元的稳定性

- 当

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbf{R}^m, x_2 \in \mathbf{R}^{n-m},$$

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ f_2(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t,x_1,x_2) \\ f_2(t,x_1,x_2) \end{pmatrix}$$

  而输出$y = g(x) = x_1$ 时，上述函数取零的稳定性问题就变为一种部分变元稳定性问题。

- 考虑动态系统方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t,x_1,x_2), f_1(t,0,0) = 0 \\ \dot{x}_2 = f_2(t,x_1,x_2), f_2(t,0,0) = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

部分变元稳定性定义

- **定义3.2** 系统(3.9)的零解$x=0$是关于部分变元x_1为稳定，系指

$$(\forall\varepsilon>0)(\forall t_0\in\mathbf{R}_\theta)(\exists\delta>0)(\forall x_{10}\in\overset{\circ}{\mathbf{B}}_\delta)(\forall t\geq t_0):$$

$$\|x_1(t;t_0,x_{10},x_{20})\|<\varepsilon.$$

- 系统(3.9)的零解$x=0$关于部分变元x_1为一致稳定，系指

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall(t_0,x_{10})\in\mathbf{R}_\theta\times\overset{\circ}{\mathbf{B}}_\delta)(\forall t\geq t_0):$$

$$\|x_1(t;t_0,x_{10},x_{20})\|<\varepsilon.$$

- 以上定义中$x_0=(x_{10}^T,x_{20}^T)^T$.

定理3.4 系统(3.9)是关于部分变元x_1是稳定的，如果存在$V=V(t,x_1,x_2):\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}\times\mathbf{R}^{n-m}\to\mathbf{R}$是可微的，且$V(t,0,0)=0$，并且有

$$(\exists\alpha(\cdot)\in\mathcal{K})(\forall(t,x_1,x_2)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}\times\mathbf{R}^{n-m}):V(t,x_1,x_2)\geq\alpha(\|x_1\|)$$

并且$\dot{V}\mid_{(3.9)}\leq 0.$

若还有

$$(\exists\beta(\cdot)\in\mathcal{K})(\forall(t,x_1,x_2)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}\times\mathbf{R}^{n-m}):V(t,x_1,x_2)\leq\beta(\|x_1\|)$$

则稳定就是一致的.

研究不稳定性的必要性：

- 判断系统零解稳定性的Lyapunov方法只是充分性的方法，如果V函数的选取不满足稳定性定理的要求，我们依然对系统是否稳定不能下结论，因此对不稳定性给以充分性判定是必要的.
- 工程实际中，本身不稳定的对象是大量存在的，例如要在小初始扰动下产生一个稳定的自激振动（钟表），平衡位置必须是不稳定的.
- 系统的零解是不稳定的，实际上就是表明存在一个界限与一个初始时间，不论对初始扰动的限制是多么小，在这样的限制内都能找到合适的初始值，系统对应它的特解总有一个时候越出上述界限（画图）．(ε-δ语言）．
- 用Lyapunov函数办法来建立不稳定的充分条件，其基本思想就在于使$\dot{V}$能沿解保持定号而V却又可在原点附近取到与$\dot{V}$同符号的值.

定理4.1　　系统

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) \equiv 0 \tag{4.1}$$

的零解是不稳定的，如果

$$(\exists \varepsilon > 0 \mid \mathbf{B}_\varepsilon \subset \mathbf{S})(\exists \mathbf{P} = \overset{\circ}{\mathbf{P}} \subset \mathbf{B}_\varepsilon, 0 \in \partial \mathbf{P})(\exists V(t,x)$$

$$: \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{B}_\varepsilon \to \mathbf{R}, V\text{一阶可微})(\exists \alpha(\mu) \in \mathcal{K})$$

满足

$1^\circ.(\exists k > 0)(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{P}) : k > V(t,x) > 0;$

$2^\circ.(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{P}) : \dot{V}(t,x)|_{(4.1)} \geq \alpha(V(t,x));$

$3^\circ.(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times (\partial \mathbf{P} \cap \overset{\circ}{\mathbf{B}}_\varepsilon)) : V(t,x) = 0.$

定理4.1的证明

证明：（看图）

- 由$0 \in \partial \mathbf{P}$ 与1°，则

$$(\forall \delta > 0)(\exists (t_0, x_0) \in \mathbf{R}_\theta \times (\mathbf{P} \cap \mathbf{B}_\delta)) : V(t_0, x_0) > 0.$$

- 反证法：假设有

$$(\forall t \geq t_0) : x(t; t_0, x_0) \in \overset{\circ}{\mathbf{B}}_\varepsilon \tag{4.2}$$

则$(\forall t \geq t_0) : x(t; t_0, x_0) \in \mathbf{P}$。（由$x_0 \in \mathbf{P}, 2^\circ, 3^\circ$, (4.2)和解是连续的，知$\dot{V}(t_0, x(t_0; t_0, x_0)) \geq \alpha(V(t_0, x_0)) > 0$. 于是，于$t > t_0$的邻域内有$V(t, x(t; t_0, x_0)) > 0$, 从而解$x(t; t_0, x_0)$不能跑出$\mathbf{P}$，否则经过$\mathbf{P}$的边界$V(t, x) = 0$.）

- 利用1°和2°, 对一切$t \geq t_0$有

$$\begin{aligned} k &\geq V(t, x(t; t_0, x_0)) = V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{V}(\tau, x(\tau; t_0, x_0)) d\tau \\ &\geq V(t_0, x_0) + \alpha(V(t_0, x_0))(t - t_0) \to +\infty (t \to +\infty) \end{aligned} \tag{4.3}$$

矛盾. 从而系统的零解是不稳定的. □

- **推论4.1** 条件同定理4.1，但1°改为

$$(\exists\beta(\mu)\in\mathcal{K})(\forall(t,x)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{P}):\beta(\|x\|)\geq V(t.x)>0 \tag{4.4}$$

则零解不稳定. □

- **推论4.2** 条件与定理4.1相同，但1°改为(4.4), 2°改为

$$(\exists\gamma>0)(\exists W(t,x)\text{半正定})(\forall(t,x)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{P}):$$

$$\dot{V}(t,x)|_{(4.1)}=\gamma V(t,x)+W(t,x) \tag{4.5}$$

则零解不稳定. □

- **注** 上述两推论常称为Lyapunov不稳定的第一与第二定理.利用定理4.1的证明，只需作小的改动就可以证明这两个推论.

对于定常系统

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0 \tag{4.6}$$

可用两个辅助函数相互配合来讨论不稳定性.

推论4.3 系统(4.6)的零解是不稳定的，如果下述条件成立：

$1^\circ.(\exists \varepsilon > 0 \mid \mathbf{B}_\varepsilon \subset \mathbf{S})(\exists \mathbf{P} = \overset{\circ}{\mathbf{P}} \subset \mathbf{B}_\varepsilon \mid 0 \in \partial \mathbf{P})(\exists V(x) : \mathbf{B}_\varepsilon \to \mathbf{R}$且$V(x) \in C^1(\mathbf{B}_\varepsilon))$
$(\exists \beta(\cdot) \in \mathcal{K})(\forall x \in \mathbf{P}) : V(x) > 0$且$\dot{V} \mid_{(4.6)} \geq \beta(V(x))$;

$2^\circ.(\exists \mathbf{N} = \overset{\circ}{\mathbf{N}} \subset \mathbf{B}_\varepsilon \mid \partial \mathbf{P} \subset \mathbf{N})(\exists W(x) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$且$W(x) \in C^1(\mathbf{B}_\varepsilon))(\forall x \in \partial \mathbf{P} \cap \mathbf{B}_\varepsilon) : W(x) = 0$且

$$(\forall x \in \mathbf{P} \cap \mathbf{N} \cap \mathbf{B}_\varepsilon) : W(x) > 0 \text{且} \ \dot{W} \mid_{(4.6)} \geq 0$$

- **注** 不稳定性定理的本质在于给出一个条件，以便确定在任何原点的邻域内一种偏离原点的解总是存在的.以上定理4.1及其三个推论中的$\mathbf{P}$集合就是保证这一情形必然发生的区域.另一方面，$\mathbf{P}$的维数可以低于n.
- **例4.2**

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

可取$\mathbf{P} = \{ke_2 \mid k \geq 0\}$，其中$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，取$V = \xi_1^2 + \xi_2^2$，则$\dot{V} = -2\xi_1^2 + 2\xi_2^2$。由于$\mathbf{P}$上$\xi_1 = 0$，于是在$\mathbf{P}$ 上$\dot{V} = 2V$，并且$0 \in \partial_r \mathbf{P}$，从而满足定理4.1，零解是不稳定的，但$\mathbf{P}$只是一维的.
- 练习：证明定理3.3.