第五讲　　其它有关稳定性问题
（指数、最终有界、扰动系统）

March 5, 2019

1.11 其它有关稳定性问题

- 指数稳定性
- 一致有界和一致最终有界
- 扰动系统的稳定性

- **定义** 系统(1.7)的零解$x=0$是局部按指数渐近稳定的，系指
$$(\exists\delta>0)\,(\exists M>0)\,(\exists\alpha>0(\forall t_0\in\mathbf{R}_\theta)(\forall x_0\in\mathring{\mathbf{B}}_\delta)(\forall t\geq t_0):$$
$$\|x(t;t_0,x_0)\|\leq M\|x_0\|e^{-\alpha(t-t_0)}$$
当$\delta=+\infty$时，则称对应的零解是全局指数渐近稳定的.

- **定理11.1** 对于系统
$$\dot{x}=f(t,x),\qquad f(t,0)\equiv 0 \tag{11.1}$$
$$\text{局部指数渐近稳定}\Longrightarrow\text{一致渐近稳定}$$
$$\text{全局指数渐近稳定}\Longrightarrow\text{全局一致渐近稳定}$$

- **定义11.1** $\alpha(\cdot),\beta(\cdot)\in\mathcal{K}$称为局部同级增势，系指

$$(\exists\mu_1>0)(\exists k_1>k_2>0)(\forall\mu\in[0,\mu_1]):$$

$$k_1\alpha(\mu)\geq\beta(\mu)\geq k_2\alpha(\mu)$$

为全局同级增势，系指

$$(\exists k_1>k_2>0)(\forall\mu\in\mathbf{R}_+):k_1\alpha(\mu)\geq\beta(\mu)\geq k_2\alpha(\mu)$$

定理11.2 如果

(i) $(\exists\eta>0,\mathbf{B}_\eta\subset\mathbf{S})(\exists C^1$函数$V(t,x):\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{B}_\eta\to$ $\mathbf{R})(\exists\alpha(\mu),\beta(\mu),\gamma(\mu)\in\mathcal{K}$, 且具同级增势$)(\forall(t,x)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{B}_\eta):$ $\alpha(\|x\|)\leq V(t,x)\leq\beta(\|x\|)$且$\dot{V}(t,x)|_{(11.1)}\leq-\gamma(\|x\|)$;

(ii) $(\exists\sigma>0):\alpha(\mu)$与$\mu^\sigma$同级增势.

则系统(11.1)的零解是局部指数渐近稳定的。

指数稳定性

证明思路：

(1) 由$\beta(\mu)$与$\gamma(\mu)$同级增势，则存在$k_1 > 0$和$\nu_1 > 0$使$\mathbf{B}_{\nu_1} \subset \mathbf{B}_\eta$, 且对$\mu \le \nu_1$ 有$\gamma(\mu) \ge k_1\beta(\mu)$

(2) 由于$\alpha(\mu), \beta(\mu)$与μ^σ同级增势，于是

$$(\exists l_1, l_2 > 0)(\exists \mu_1 > 0)(\forall \mu \in [0, \mu_1]) :$$

$$(l_1\mu)^\sigma \le \alpha(\mu), \beta(\mu) \le (l_2\mu)^\sigma$$

(3) 令$\nu = \min\{\nu_1, \mu_1\}$.
$\mathbf{A}_{t_0.\nu}$对一切$t_0 \in \mathbf{R}_\theta$具有非零的公共部分

$$\mathbf{A}_\nu = \bigcap_{t_0 \in \mathbf{R}_\theta} \mathbf{A}_{t_0.\nu}$$

它以原点为内点，因而$\exists\delta > 0$使$\mathbf{B}_\delta \subset \mathbf{A}_\nu$.

(4) 由$\mathbf{A}_\nu$的定义知

$$(\forall (t_0,x_0)\in \mathbf{R}_\theta\times \mathbf{B}_\delta)(\forall t\geq t_0): x_0\in \mathbf{A}_{t_0,\nu}$$

其中$\mathbf{A}_{t_0,\nu}=\{x|V(t_0,x)\leq \alpha(\nu)\}$.从而

$$x(t;t_0,x_0)\in \mathbf{B}_\nu\subset \mathbf{B}_\eta.$$

于是

$$\dot{V}(t,x)|_{(11.1)}\leq -\gamma(\|x\|)\leq -k_1\beta(\|x\|)\leq -k_1V(t,x).$$

因此

$$V(t,x(t;t_0,x_0))\leq V(t_0,x_0)e^{-k_1(t-t_0)},$$

进而

$$(\forall (t_0,x_0)\in \mathbf{R}_\theta\times \mathbf{B}_\delta)(\forall t\geq t_0):$$
$$\alpha(\|x(t;t_0,x_0)\|)\leq \beta(\|x_0\|)e^{-k_1(t-t_0)}$$

指数稳定性

(5) 结合(3)可推知

$$\|x(t;t_0,x_0)\| \le \frac{l_2}{l_1}\|x_0\| exp\left\{-\frac{k_1}{\sigma}(t-t_0)\right\}$$

若令$M = l_2/l_1, \alpha = k_1/\sigma$. 则零解局部指数渐近稳定。 □

定理11.3 系统(11.1)的零解是全局指数渐近稳定，如果

(i) $(\exists C^1$函数$V(t,x): \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R})(\exists \alpha(\mu), \beta(\mu) \in \mathcal{K}_\infty, \exists \gamma(\mu), \alpha, \beta, \gamma$为全局同级增势）$(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}^n)$:

$$\beta(\|x\|) \ge V(t,x) \ge \alpha(\|x\|), \dot{V}(t,x)|_{(11.1)} \le -\gamma(\|x\|).$$

(ii) $(\exists \sigma > 0)$: $\alpha(\mu)$与μ^σ同级增势。

- **注：** 在一些文献中认为定理11.2的(i)是指数渐近稳定的充分条件，这是不对的.

例11.1

$$\dot{\xi} = -\xi^3 \tag{11.2}$$

其解为

$$\xi(t) = \xi_0\sqrt{1/[1+2\xi_0^2(t-t_0)]},$$

零解一致渐近稳定，但不是指数渐近稳定的，其中$\xi_0 = \xi(t_0)$。

另一方面，若令

$$V = e^{-1/\xi^2}, V(0) = 0$$

则有

$$\dot{V}|_{(11.2)} = -2V$$

可令

$$\alpha(\mu) = \beta(\mu) = e^{-1/\mu^2}, \gamma(\mu) = 2e^{-1/\mu^2}$$

它们都是同级增势的，但系统零解却不是指数渐近稳定的。

利用定理11.2可有下述推论：

推论11.1　系统(11.1)的零解是局部指数渐近稳定的，如果

$$(\exists \eta > 0, \mathbf{B}_\eta \subset \mathbf{S})(\exists C^1\text{函数}V(t,x) : \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{B}_\eta \to \mathbf{R})(\exists \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0)(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{B}_\eta)$$

有

(i) $\beta x^T x \geq V(t,x) \geq \alpha x^T x;$

(ii) $\dot{V}(t,x) \leq -\gamma x^T x.$

- 若上述$\mathbf{B}_\eta = \mathbf{S} = \mathbf{R}^n$,则对应零解为全局指数渐近稳定.

一致有界性和最终有界

考虑系统

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{11.3}$$

由于研究的是远离平衡点系统的性能，一般可以不要求$f(t, 0) \equiv 0$.

定义11.2

- 系统(11.3)的解$x(t; t_0, x_0)$称为是有界的，系指

$$(\exists \beta(t_0, x_0) > 0)(\forall t \geq t_0) : x(t; t_0, x_0) \in \mathbf{B}_\beta \tag{11.4}$$

- 系统(11.3)的解为一致有界（初值有界解有界，其界不依赖于t_0.），系指

$$(\forall \alpha > 0)(\exists \beta(\alpha) > 0)(\forall t_0 \in \mathbf{R}_\theta)(\forall x_0 \in \mathbf{B}_\alpha)(\forall t \geq t_0) : x(t; t_0, x_0) \in \mathbf{B}_\beta \tag{11.5}$$

- 系统(11.3)的解为一致终结有界

$$(\exists M > 0)(\forall \alpha > 0)(\exists T > 0)(\forall (t_0, x_0) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{B}_\alpha)(\forall t \geq t_0 + T) : x(t; t_0, x_0) \in \mathbf{B}_M$$

定理11.4 系统(11.3)的解是一致有界的，如果

$$(\exists R > 0)(\exists V(t,x) : \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{O}_R \to \mathbf{R}\text{是}C^1\text{函数}, \mathbf{O}_R = \{x | \|x\| > R\})(\exists \varphi(\mu), \psi(\mu) \in \mathcal{K}_\infty)(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{O}_R)$$

使有

$1^\circ.\ \varphi(\|x\|) \le V(t,x) \le \psi(\|x\|)$;
$2^\circ.\ \dot{V}(t,x)|_{(11.3)} \le 0.$
若还有

$$(\exists \gamma(\mu) \in \mathcal{K})(\forall (t,x) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{O}_R) : \dot{V}(t,x)|_{(11.3)} \le -\gamma(\|x\|)$$

则系统(11.3)的零解是一致最终有界的.

一致有界性和最终有界

证明思路： 先证明一致有界性。

对任给$\alpha > 0$，只有两种情形：$\alpha > R$ 和$\alpha \le R$。

(1) 若$\alpha > R$, 则$\mathbf{B}_R \subset \mathbf{B}_\alpha$。

- 考虑情形：$\forall (t_0, x_0) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{B}_R$，此时有

(a) $\forall t \ge t_0, x(t; t_0, x_0) \in \mathbf{B}_R$. 或者

(b) $\exists t_1 > t_0$使得

$$\|x(t_1; t_0, x_0)\| = R, \text{当}(t \in [t_0, t_1]) : \|x(t; t_0, x_0)\| \le R;$$
$$\text{当}(t > t_1)\text{属于}t_1\text{的邻域时有}: \|x(t; t_0, x_0)\| > R$$

$1°$与$2°$$\Rightarrow$: 当$t > t_1$时，

$$\varphi(\|x(t; t_0, x_0)\|) \le V(t, x(t; t_0, x_0)) \le V(t_1, x(t_1; t_0, x_0)) \le \psi(R) \le \psi(\alpha)$$

令$\beta = \max\{R, \varphi^{-1}[\psi(\alpha)]\}$,

则$\|x(t; t_0, x_0)\| \le \varphi^{-1}[\psi(R)] < \varphi^{-1}[\psi(\alpha)] \le \beta$.

- 考虑情形：$\forall t_0 \in \mathbf{R}_\theta, x_0 \in \mathbf{B}_\alpha$但$\|x_0\| > R$。
  $1°$与$2° \Rightarrow$：当$t > t_0$时，

$$\varphi(\|x(t;t_0,x_0)\|) \leq V(t,x(t;t_0,x_0)) \leq V(t_0,x_0) \leq \psi(\alpha)$$

  则$\|x(t;t_0,x_0)\| \leq \beta$。

  （只要解在某一时刻跑出球$\mathbf{B}_R$，从这一时刻开始的的邻域内解不会跑出$\mathbf{B}_\beta$.)

(2) 若$\alpha \leq R$（画图）。同样分(a) 和(b)两种情形，证明同(1)。

下面证明第二个结论.

(1) 令$M = \max\{R, \varphi^{-1}[\psi(R)]\}$. 对任给$\alpha \le R$，类似于第一个结论的证明，则有

$$(\forall (t_0, x_0) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{B}_\alpha)(\forall t \ge t_0) : x(t; t_0, x_0) \in \mathbf{B}_M.$$

(2) 对上述M，对任给$\alpha > R$，取

$$T = \frac{\psi(\alpha) - \varphi(R)}{\gamma(R)}$$

则

$$(\forall (t_0, x_0) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{B}_\alpha)(\exists t_1 \in [t_0, t_0 + T]) : x(t_1; t_0, x_0) \in \mathbf{B}_R. \quad (11.6)$$

（反证）
再利用（1）就有

$$(\forall (t_0, x_0) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{B}_\alpha)(\forall t \ge t_0 + T) : x(t; t_0, x_0) \in \mathbf{B}_M.$$

(3) 下面证明(11.6).
事实上，若对$\forall t \in [t_0, t_0+T]$，有$\|x(t;t_0,x_0)\| > R$，由

$$\dot{V}(t, x(t;t_0,x_0)) \leq -\gamma(\|x(t;t_0,x_0)\|) \leq -\gamma(R)$$

$\Rightarrow$

$$V(t_0+T, x(t_0+T;t_0,x_0)) - V(t_0,x_0) \leq -\gamma(R)T = \varphi(R) - \psi(\alpha)$$

由条件（1）知$V(t_0,x_0) - \psi(\alpha) \leq 0 \Rightarrow$

$$V(t_0+T, x(t_0+T;t_0,x_0)) \leq \varphi(R)$$

$\Rightarrow \|x(t+T;t_0,x_0)\| \leq R$, 矛盾。

一致有界性和最终有界

- **注1**：在研究这种有界性时，Lyapunov函数在定理中实际上是起到一个解的估计作用。
- **注2**： 研究稳定性是从初始扰动出发考虑，当从系统本身存在不确定性考虑一般系统稳定性问题时，就归结为一种总稳定性.

考虑不受扰动的系统，其方程为

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) = 0 \tag{11.7}$$

系统的干扰为：$g : \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S} \to \mathbf{R}^n$,于是实际的系统方程为

$$\dot{z} = f(t, z) + g(t, z) \tag{11.8}$$

一般$f(t, z)$与$g(t, z)$一样具使系统(11.8)满足存在唯一性假设，但对$g(t, z)$不必要求$g(t, 0) = 0$.

定义11.3　系统(11.7)的零解是总稳定的，系指

$$\begin{aligned}(\forall\varepsilon \quad & > 0)(\exists\delta_1 > 0, \delta_2 > 0)(\forall t_0 \in \mathbf{R}_\theta)(\forall z_0 \\ & \in \mathbf{B}_{\delta_1})(\forall g(t, z)|(\forall(t, z) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{B}_\varepsilon : \|g(t, z)\| \\ & \le \delta_2)(\forall t \ge t_0) : z(t; t_0, z_0) \in \mathbf{B}_\varepsilon\end{aligned}$$

其中$z(t; t_0, z_0)$是(11.8)在初值$z(t_0) = z_0$下的解.

定理11.6 系统(11.7)的零解总稳定，如果

$$(\exists C^1\text{函数}V:\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S}\to\mathbf{R})(\exists\alpha(\cdot),\beta(\cdot),\gamma(\cdot)\in\mathcal{K})(\exists M\in\mathbf{R})$$

使得$(\forall(t,x)\in\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{S})$，有

(i) $\alpha(\|x\|)\le V(t,x)\le\beta(\|x\|)$;
(ii) $\dot V(t,x)|_{(11.7)}\le-\gamma(\|x\|)$;
(iii) $\left|\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right|\le M.$

证明思路：

(i) 任给$\varepsilon > 0$,取$\delta_1 > 0$和$\delta_2 > 0$满足$\delta_1 < \varepsilon, \beta(\delta_1) < \alpha(\varepsilon)$，$\delta_2 < \dfrac{k\gamma(\delta_1)}{M}, 0 < k < 1$。

(ii) $(\forall(t_0, z_0) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{B}_{\delta_1}), (\forall(t, z) \in \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{B}_\varepsilon : \|g(t, z)\| \le \delta_2)$, 对$\delta_1 \le \|z(t)\| \le \varepsilon$，有

$$\dot{V}(t, z)|_{(11.8)} = \dot{V}(t, x)|_{(11.7), x=z} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot g(t, z)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, z)|_{(11.8)} &\le -\gamma(\|z\|) + \frac{\partial V(t, z)}{\partial z} \cdot g(t, z) \\ &\le -\gamma(\delta_1) + \frac{Mk\gamma(\delta_1)}{M} < 0 \end{aligned}$$

(iii) 由$||z_0|| < \delta_1$，若对任意$t > t_0$有$||z(t;t_0,z_0)|| < \delta_1$，则结论成立。否则存在$t_1 > t_0$使得$||z(t_1;t_0,z_0)|| = \delta_1$。若对任意$t > t_1$，有$||z(t;t_0,z_0)|| < \varepsilon$，则结论成立。
否则存在$t_3 > t_1$ 使得$||z(t_3;t_0,z_0)|| = \varepsilon$。设$t_2$是离$t_3$最近的一个使得$||z(t_2;t_0,z_0)|| = \delta_1$的时刻，则

$$\delta_1 \le ||z(t;t_0,z_0)|| \le \varepsilon, \quad t_2 \le t \le t_3.$$

于是利用（ii）有

$$\beta(\delta_1) \ge V(t_2, z(t_2;t_0,z_0)) \ge V(t_3, z(t_3;t_0,z_0)) \ge \alpha(\varepsilon).$$

矛盾。 □

定理11.7 若系统(11.7)中f在$\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S}$上为$C^1$类函数且偏导数有界，又$x=0$是(11.7)的一个一致渐近稳定的零解，则$x=0$为总稳定平衡位置。

证明 定理9.1可推出存在$V(t,x):\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{S} \to \mathbf{R}^n$具定理11.6的条件(i) 与(ii)，而$V$本身又具连续有界的偏导数（见定理9.1的证明过程），因而定理11.6的条件(iii)也成立，从而系统零解是总稳定的. $\square$

Lasaller不变集原理

自治系统：

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0 \tag{11.9}$$

其中$f : D \to R^n$: 满足局部Lipschitz条件，$D \subset R^n$.

几个概念：

（1）一个解$x(t)$的正极限点

（2）正极限集

（3）(11.9)的不变集，正不变集

（4）$x(t) \to M$，当 $t \to \infty$，其中M是一集合：$\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0$，对$\forall t > T$，有$\rho(x(t), M) < \varepsilon$.

注1：渐近稳定的平衡点是从平衡点附近出发的解的正极限集；

注2：稳定的极限环是从这个极限环附近出发的解的正极限集；

注3：平衡点和极限环是不变集；

注4：集合：$\Omega_c = \{x \in R^n | V(x) \leq c\}, \dot{V}(x) \leq 0, x \in \Omega_c$是一个正不变集。

Lasaller不变集定理:
假设

(i) $\Omega \subset D$是一紧集，且关于(11.9)是正不变集;
(ii) $V : D \to R$是连续可微的函数，当$x \in \Omega$时，$\dot{V}(x) \leq 0$;
(iii) $E = \{x \in \Omega : \dot{V}(x) = 0\}$;
(iv) M是E中最大的不变集

则从Ω中出发的每一个解当$t \to \infty$时都趋于集合M.

注5：给出了吸引域的估计，Ω：任意紧的正不变集，不必只是Ω_c;

注6：定理可用于具有平衡点集的情形，不只是一个孤立的平衡点;

注7：函数$V(x)$不需要正定;

注8：（自治系统零解渐近稳定、全局渐近稳定）两个推论;

注9：例子见“Nonlinear Systems, Third Edition, Hassan K. Khalil”