第二章　　常系数线性系统

March 12, 2019

2.3 Hurwitz 矩阵与Hurwitz稳定性

- 常系数线性系统

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

渐近稳定$\Leftrightarrow \mathbf{\Lambda}(A) \subset \mathring{\mathbf{C}}_{-}$.
即A对应的特征多项式：$\varphi(s) = \mathrm{Det}(sI - A) = 0$ 的根均具负实部.

- $\mathbf{R}[s]$，$\mathbf{C}[s]$: 分别表示系数取实数与复数的多项式环.
- **定义2.3.1** $f(s) \in \mathbf{R}[s]$(或$\mathbf{C}[s]$)称为Hurwitz稳定多项式或Hurwitz多项式，系指

$$(\forall s | f(s) = 0) : \quad \mathrm{Re}s < 0 \tag{2}$$

Hurwitz多项式的全体记为$\mathbf{H}[s]$或简记为$\mathbf{H}$.

Hurwitz 矩阵与Hurwitz稳定性

- 设$f(s) \in \mathbf{R}[s]$，则$f(s)$可唯一分解为

$$f(s) = h(s^2) + sg(s^2) \tag{3}$$

其中h，g两个多项式均具实系数。

- 令$s = j\omega$，则有

$$f(j\omega) = h(-\omega^2) + j\omega g(-\omega^2) \tag{4}$$

其中$h(-\omega^2) = \mathrm{Re} f(j\omega)$，$\omega g(-\omega^2) = \mathrm{Im} f(j\omega)$。

- 记

$$f(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 \tag{5}$$

设其根为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，则

$$f(s) = \alpha_n \prod_{i=1}^{n} (s - \lambda_i) \tag{6}$$

不妨设$\alpha_n > 0$，当$\alpha_n = 1$时称对应多项式为首一多项式.

Hurwitz 矩阵与Hurwitz稳定性

- 当ω沿实轴变化时，对应的$f(j\omega)$在复平面上画出一条曲线。
- 用$\triangle_{\omega_1}^{\omega_2} \arg f(j\omega)$表复向量$f(j\omega)$当$\omega$由$\omega_1$变至$\omega_2$过程中对应复向量围绕原点扫过的总角度。

$$\triangle_{-\infty}^{+\infty} \arg f(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} \triangle_{-\infty}^{+\infty} arg(j\omega - \lambda_i) \tag{7}$$

- **定理2.3.1** 设$f(s) \in \mathbf{R}[s]$ 且$\alpha_n > 0$，则下述等价：
  1° $f(s) \in \mathbf{H}$;
  2° $\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg f(j\omega) = n\pi$;
  3° $h(s), g(s)$只具负单实根，令它们分别为

$$\begin{aligned} h(s)\text{的根:} \quad & u_l < u_{l-1} < \cdots < u_1 < 0 \\ g(s)\text{的根:} \quad & v_m < v_{m-1} < \cdots < v_1 < 0 \end{aligned}$$

且$l - 1 \leq m \leq l$，并有$u_i > v_i > u_{i+1}$，$\quad i = 1, 2, \cdots$

证明思路：

- $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$： $f(s) \in \mathbf{H} \Rightarrow (\forall i)$： $\mathrm{Re}\lambda_i < 0.$

$$\triangle_{-\infty}^{+\infty} \arg(j\omega - \lambda_i) = \pi \quad (-\pi/2 \to \pi/2)$$

利用(7) 知2°成立。

- $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$：

(i) $f(j\omega)$在复平面上关于实轴对称，则2°等价于

$$\triangle_0^{+\infty} \arg f(j\omega) = n\pi/2$$

(ii) 由$\alpha_n > 0$及$\lim\limits_{\omega\to\infty} \arg f(j\omega) = \arg(j)^n = n\pi/2$可知$\arg f(0) = 0$。

(iii) 由$\triangle_0^{+\infty} \arg f(j\omega) = n\pi/2$及(4) 知$f(j\omega)$的图形反时针方向依次与虚轴、实轴相交。于是$g(s)$与$h(s)$的根必互相间隔，且由$\deg h(s) = [n/2]$，则$h(s), g(s)$的根均为单根。

(iv) $f(j\omega) = h(-\omega^2) + j\omega g(-\omega^2)$依次与虚轴、实轴相交，于是$h(s), g(s)$的根均为负实数，$3^\circ$成立。

- $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$，显然. $\square$

Hurwitz 矩阵与Hurwitz稳定性

- 称满足3°的两个多项式$h(s), g(s)$为正多项式对。
- **推论2.3.1** 设多项式$f(s) \in \mathbf{R}[s]$，则$f(s) \in \mathbf{H}$当且仅当$f(s) = h(s^2) + sg(s^2)$ 对应的两多项式$h(s), g(s)$ 组成正多项式对。
- **定理2.3.2** (Hurwitz定理) 设$f(s) \in \mathbf{R}[s]$，则$f(s) \in \mathbf{H}$当且仅当由$f(s)$系数排成的下述Hurwitz矩阵:

$$H_f = \begin{pmatrix} \alpha_n & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_n & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

的一切顺序主子式皆正。其中

$$(\forall k < 0, \forall k > n): \quad \alpha_k = 0$$

- **引理2.3.1** 设$f(s) \in \mathbf{R}[s]$，$n = \deg f(s)$且

$$(\forall \omega \in \mathbf{R}): \ f(j\omega) \neq 0 \tag{9}$$

则$f(s) \in \mathbf{H}$当且仅当

$$(\forall \gamma > 0): \ F(s) = (s+\gamma)f(s) + sf^*(s) \in \mathbf{H} \tag{10}$$

其中$f^*(s) = (-1)^n f(-s)$。

- **证明思路：** 令

$$F_\mu(s) = (s+\gamma)f(s) + \mu s f^*(s) \tag{11}$$

则

1° $f(s) \in \mathbf{H}$当且仅当$F_0(s) \in \mathbf{H}$;

2° $F_1(s) = F(s)$;

3° $(\forall \mu \in [0,1]): \ \deg F_\mu(s) = n+1$;

4° $(\forall \omega \in \mathbf{R})(\forall \mu \in [0,1]): \ F_\mu(j\omega) \neq 0.$

- 证4°：
如果$(\exists\omega\in\mathbf{R})(\exists\mu\in[0,1])$使$F_\mu(j\omega)=0$，则由
$$(j\omega+\gamma)f(j\omega)+j\mu\omega f^*(j\omega)=0$$
可推知
$$\left|\frac{j\mu\omega}{j\omega+\gamma}\right|=\left|\frac{f^*(j\omega)}{f(j\omega)}\right|=1$$
从而有
$$(\exists\omega\in\mathbf{R})(\exists\mu\in[0,1]):\quad\frac{\mu^2\omega^2}{\omega^2+\gamma^2}=1$$
矛盾，故4°成立。
- 因$F_\mu(s)$ 的根是μ的连续函数，假如$F_1(s)=F(s)$有右半平面根，则一定存在$\mu_0\in(0,1)$及ω_0 使得$F_{\mu_0}(j\omega_0)=0$（穿过虚轴），与4°矛盾。因此$f(s)\in\mathbf{H}$当且仅当$F_1(s)=F(s)\in\mathbf{H}$.

- **引理2.3.2** 令
  $q(s) = s^{n+1} + \gamma_n s^n + \cdots + \gamma_1 s + \gamma_0 \in \mathbf{R}[s]$, $q^*(s) = (-1)^{n+1} q(-s)$.
  假设$\gamma_n > 0$，且
  $$(\forall \omega \in \mathbf{R}): \ q(j\omega) \neq 0$$
  则$q(s) \in \mathbf{H}$当且仅当n次多项式
  $$p(s) = -(s - 2\gamma_n)q(s) + sq^*(s) \in \mathbf{H} \tag{12}$$
- **证明** 利用引理2.3.1，设$\gamma = 2\gamma_n$，$f(s) = p(s)$，则
  $$F_1(s) = p(s)(s + 2\gamma_n) + sp^*(s) = 4\gamma_n^2 q(s)$$
  又由$q(j\omega) \neq 0$，则$(\forall \omega \in \mathbf{R})$： $p(j\omega) \neq 0$. 否则，
  $$p(j\omega) = 0 \Rightarrow \left| \frac{j\omega}{j\omega - 2\gamma_n} \right| = 1 \tag{13}$$
  矛盾，由引理2.3.1知结论成立。

定理2.3.2的证明　采用归纳法.

- $n=1$时，显然成立.
- 设定理在n时成立，考虑$n+1$时的情形。
  考虑一$n+1$次多项式（不妨设首项系数为1）

$$q(s)=s^{n+1}+\gamma_n s^n+\cdots+\gamma_1 s+\gamma_0$$

对应的Hurwitz矩阵为

$$H_q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_n & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_{n-3} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \gamma_n & 1 & \cdots \\ \gamma_{n-5} & \gamma_{n-4} & \gamma_{n-3} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Hurwitz 矩阵与Hurwitz稳定性

- 令
$$\begin{aligned} p(s) &= -(s-2\gamma_n)q(s) + sq^*(s) \\ &= 2\left[\gamma_n^2 s^n + (\gamma_n\gamma_{n-1} - \gamma_{n-2})s^{n-1} + \gamma_n\gamma_{n-2}s^{n-2} + (\gamma_n\gamma_{n-3} \right. \\ &\quad \left. -\gamma_{n-4})s^{n-3} + \gamma_n\gamma_{n-4}s^{n-4} + \cdots \right] \end{aligned}$$
- 对应的Hurwitz矩阵为

$$H_p = 2\begin{pmatrix} \gamma_n^2 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_n\gamma_{n-2} & \gamma_n\gamma_{n-1} - \gamma_{n-2} & \gamma_n^2 & \cdots \\ \gamma_n\gamma_{n-4} & \gamma_n\gamma_{n-3} - \gamma_{n-4} & \gamma_n\gamma_{n-2} & \cdots \\ \gamma_n\gamma_{n-6} & \gamma_n\gamma_{n-5} - \gamma_{n-6} & \gamma_n\gamma_{n-4} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \end{pmatrix}$$

- H_q的顺序主子式皆正$\Leftrightarrow H_p$的顺序主子式皆正,
  $q(s) \in \mathbf{H}$当且仅当$p(s) \in \mathbf{H}$ （引理2.3.2）,
  $p(s) \in \mathbf{H} \Leftrightarrow H_p$顺序主子式皆正(归纳法假定),
  $\Rightarrow q(s) \in \mathbf{H} \Leftrightarrow H_q$ 顺序主子矩阵皆正,
  即定理在$n+1$时亦成立。定理2.3.2得证。

- **定理2.3.3(Routh 定理)** 对$f(s)\in \mathbf{R}[s]$，则$f(s)\in \mathbf{H}$当且仅当下述Routh 算表的第一列全正.

Routh 算 表

$$
\begin{array}{llll}
\gamma_{11}=\alpha_n & \gamma_{12}=\alpha_{n-2} & \gamma_{13}=\alpha_{n-4} & \cdots \\
\gamma_{21}=\alpha_{n-1} & \gamma_{22}=\alpha_{n-3} & \gamma_{23}=\alpha_{n-5} & \cdots \\
\gamma_{31}=\gamma_{12}-\rho_1\gamma_{22} & \gamma_{32}=\gamma_{13}-\rho_1\gamma_{23} & \cdots & \rho_1=\dfrac{\gamma_{11}}{\gamma_{21}} \\
\gamma_{41}=\gamma_{22}-\rho_2\gamma_{32} & \gamma_{42}=\gamma_{23}-\rho_2\gamma_{33} & \cdots & \rho_2=\dfrac{\gamma_{21}}{\gamma_{31}} \\
\gamma_{51}=\gamma_{32}-\rho_3\gamma_{42} & \gamma_{52}=\gamma_{33}-\rho_3\gamma_{43} & \cdots & \rho_3=\dfrac{\gamma_{31}}{\gamma_{41}} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots
\end{array}
$$

证明思路：

(i) 对(8)式确定的H_f做列初等变换（第三类），将H_f化成一个下三角矩阵。

(ii) 容易证明，H_f的顺序主子式均正当且仅当所化成的下三角矩阵对角元均正，当且仅当Routh算表的第一列元均正。

- **例2.3.1**　考虑三阶多项式

$$f(s) = \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

则$f(s) \in \mathbf{H}$当且仅当

$$\alpha_i > 0, \quad i = 0, 1, 2, 3$$
$$\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_0 \alpha_3$$

- 对于一般n次多项式，若$\alpha_n > 0$，则有

$$f(s) \in \mathbf{H} \Rightarrow \alpha_i > 0, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{14}$$

- (14)式是稳定多项式的一个常用的必要条件。如何采用α_i的简单不等式来判定$f(s) \in \mathbf{H}$?

- 对多项式的Hurwitz矩阵H_f，$f(s)$具有分解式

$$f(s) = h(s^2) + sg(s^2)$$

令(以$n = 2k, \alpha_n \neq 0$为例)

$$R(h,g) = \\ \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \alpha_{2k} & \alpha_{2k-2} & \alpha_{2k-4} & \cdots & \alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & & \\ & \alpha_{2k} & \alpha_{2k-2} & \cdots & \alpha_2 & \alpha_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_0 \\ \alpha_{2k-1} & \alpha_{2k-3} & \cdots & \alpha_3 & \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_5 & \alpha_3 & \alpha_1 & 0 \end{bmatrix}$$

容易证明:

(1) $h(s)$与$g(s)$有公共根当且仅当 $R(h,g)=0$.

(2) $\mathrm{Det}H_f=0$ 当且仅当 $R(h,g)=0$ 或 $\alpha_0=0$

由此就有

定理2.3.4 $f(s)\in\mathbf{R}[s]$，则$\mathrm{Det}H_f=0$当且仅当下述二者至少有一个发生

1° $f(0)=0$ 或 $\alpha_0=0$

2° $h(s)$与$g(s)$有公共根.

- **推论2.3.2** $f(s) \in \mathbf{R}(s)$，则$f(s)$具零实部根的必要条件是$\mathrm{Det}H_f = 0$.
  证明思路 分两种情形：
  1° $f(0) = 0$ 则$\alpha_0 = 0$ 于是$\mathrm{Det}H_f = 0$.
  2° $f(j\omega) = 0$, $\omega \neq 0$ 由此有$h(-\omega^2) = g(-\omega^2) = 0$，表明$h(s)$与$g(s)$有公共根$-\omega^2$，从而$R(h, g) = 0$，于是$\mathrm{Det}H_f = 0$. □

- **例2.3.2**

(i) $f(s) = s^3 + s^2 + s + 1$,
$\mathrm{Det}H_f = 0$，$f(s) = 0$的根为$\pm j$ 与-1.

(ii) $f(s) = s^3 + s^2 - s - 1$,
$\mathrm{Det}H_f = 0$，$f(s) = 0$的根为$1, 1, -1$.

- 后一例表明$\mathrm{Det}H_f = 0$未必保证$f(s)$有零实部根. 此时h与g之间存在公共根.

- $(\forall s \in \mathbf{C}):\quad \mathrm{Re}s < 0$ 当且仅当 $\mathrm{Re}\frac{1}{s} < 0$
- **推论2.3.3** $f(s) \in \mathbf{R}[s]$，则$f(s) \in \mathbf{H}$当且仅当$s^n f(\frac{1}{s}) \in \mathbf{H}$.
  （$f(s) = a_n \Pi_{i=1}^{n}(s-\lambda_i), s^n f(\frac{1}{s}) = a_n \Pi_{i=1}^{n}(1-\lambda_i s)$）
- **定理2.3.5 (Orlando公式)** 设$f(s) \in \mathbf{C}[s]$，则

$$\tilde{\Delta}_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \alpha_n^{n-1} \prod_{i<k\leq n} (s_i + s_k) \qquad (15)$$

  其中s_i是$f(s)$ 的根，$\tilde{\Delta}_{n-1}$ 是$\tilde{H}_f$的前$n-1$阶主子式，而$\tilde{H}_f$是H_f除去首行首列余下的n阶方阵.
- **注:** 由Orlando公式，当$f(s)$具零实部根时，由于$\mathrm{Det}\tilde{H}_f = \alpha_0 \tilde{\Delta}_{n-1}$，则可知推论2.3.2成立。

Hurwitz 矩阵与Hurwitz稳定性

- 考虑带参数μ的多项式族

$$F_\mu = f_0 + \mu f_1 \tag{16}$$

则对应的Hurwitz矩阵有

$$H_F = H_{f_0} + \mu H_{f_1}$$

- 如果$f_0 \in \mathbf{H}$，设$\deg f_1 \leq \deg f_0$，则μ在充分小时有$F_\mu \in \mathbf{H}$。
-

$$\mathrm{Det}[H_{f_0} + \mu H_{f_1}] = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Det}[\lambda I + H_{f_0}^{-1} H_{f_1}] = 0 \qquad \lambda = \frac{1}{\mu}$$

λ必为$-H_{f_0}^{-1}H_{f_1}$的特征值。由于μ为实参数，则若记$-H_{f_0}^{-1}H_{f_1}$的最大与最小实特征值分别为λ_M 与λ_m，$\lambda_M > \lambda_m$，则有

Hurwitz 矩阵与Hurwitz稳定性

- **定理2.3.6** 考虑含单参数多项式族(16)，若$f_0 \in \mathbf{H}$，且$-H_{f_0}^{-1} H_{f_1}$的最大与最小实特征值分别为λ_M 与λ_m，则
  1° $\lambda_M < 0$，则$(\forall \mu \in \mathbf{R}_+)$：$f_0 + \mu f_1 \in \mathbf{H}$
  2° $\lambda_m > 0$，则$(\forall \mu \in \mathbf{R}_+)$：$f_0 - \mu f_1 \in \mathbf{H}$
  3° $\lambda_M > 0, \lambda_m < 0$，则$(\forall \mu \in (\lambda_m, \lambda_M))$：$f_0 + \mu f_1 \in \mathbf{H}$
- **注**：对于$f(s) \in \mathbf{R}[s]$，Hurwitz判据是一个判断$f(s) \in \mathbf{H}$ 稳定的充分必要条件。但计算H_f 的主子式较麻烦。

- **定理2.3.7** (Lienard and Chipart) 对给定

$$f(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 \tag{17}$$

则$f(s) \in \mathbf{H}$当且仅当下述条件之一成立：

(1) $\alpha_0 > 0, \alpha_2 > 0, \cdots, \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \cdots$

(2) $\alpha_0 > 0, \alpha_2 > 0, \cdots, \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \cdots$

(3) $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_3 > 0, \cdots, \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \cdots$

(4) $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_3 > 0, \cdots, \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \cdots$

- **注：** 定理2.3.7形式上减少判断H_f主子式的个数到原来的一半，但这一判断并没有给出相对系数的较简单的形式。

- **定理2.3.8** (谢绪恺 1957) $f(s) \in \mathbf{R}[s]$且具正系数，$\deg f \geq 3$，则$f(s) \in \mathbf{H}$ 必有

$$(\forall\ 1 \leq i \leq n-2): \quad \alpha_i \alpha_{i+1} > \alpha_{i-1}\alpha_{i+2} \tag{18}$$

- **定理2.3.9** $f(s) \in \mathbf{R}[s]$，则$f(s) \in \mathbf{H}$仅需

$$\alpha_i \alpha_{i+1} > 3\alpha_{i+2}\alpha_{i-1}, \qquad \forall i \tag{19}$$

Hurwitz 矩阵与Hurwitz稳定性

- **定理2.3.10** （聂义勇1976） $f(s) \in \mathbf{R}[s]$, 则$f(s) \in \mathbf{H}$，如果

$$\alpha_{i-1}\alpha_{i+2} \leq 0.4655\alpha_i\alpha_{i+1} \qquad i = 1, 2, \cdots, n-2 \qquad (20)$$

其中0.4655 是三次方程

$$\frac{\delta^3}{4} + \delta^2 + \delta - 2 = 0$$

唯一实根的$\beta \in [0.931 \quad 0.932]$的下限值的一半，且$n = 5$ 时条件(20)的等号应除去。

- 有人力图改进δ 的值，但几无进展.
- 用双线性不等式来代替$\mathbf{H}$稳定的充分必要条件在检验稳定性上有一定保守性。尽管如此，这一结果在选择稳定参数的近似方法上还是可取的。